2012 届 硕 士 学 位 论 文 答 辩

Poincaré & Blaschke 平移运动公式

艾万君

指导教师： 周家足
学科专业： 基础数学
研究方向： 积分几何与几何不等式

研究动机

- 运动公式是积分几何研究的主题 [HS02], 两个基本的 (刚体) 运动公式分别是

Poincaré 运动公式 [San04]

假设 Γ_0, Γ_1 是欧氏平面 E^2 中两条 (逐段光滑的) 可求长曲线, $^{\#}\{\Gamma_0 \cap \Gamma_1\}$ 表示它们的交点数. 则

$$\int_{\{g \in G | \Gamma_0 \cap g\Gamma_1 \neq \emptyset\}} {}^{\#}\{\Gamma_0 \cap \Gamma_1\} \, dg = 4L_0 L_1.$$

其中, dg 是刚体运动群 G 的运动密度, 而 L_0, L_1 分别是 Γ_0, Γ_1 的周长.

研究动机

- 运动公式是积分几何研究的主题 [HS02], 两个基本的 (刚体) 运动公式分别是

Poincaré 运动公式 [San04]

假设 Γ_0, Γ_1 是欧氏平面 E^2 中两条 (逐段光滑的) 可求长曲线, $^{\#}\{\Gamma_0 \cap \Gamma_1\}$ 表示它们的交点数. 则

$$\int_{\{g \in \mathrm{G} | \Gamma_0 \cap g\Gamma_1 \neq \emptyset\}} {}^{\#}\{\Gamma_0 \cap \Gamma_1\}\, \mathrm{d}g = 4L_0 L_1.$$

其中, $\mathrm{d}g$ 是刚体运动群 G 的运动密度, 而 L_0, L_1 分别是 Γ_0, Γ_1 的周长.

研究动机

- 运动公式是积分几何研究的主题 [HS02], 两个基本的 (刚体) 运动公式分别是

Blaschke 运动公式 [San04]

假设 D_0, D_1 是欧氏平面 E^2 中两个区域 (单连通), $\chi(D_0 \cap D_1)$ 表示相交区域的欧拉示性数. 那么

$$\int_{\{g\in G|D_0\cap gD_1\neq\emptyset\}} \chi(D_0\cap gD_1)\mathrm{d}g = 2\pi(F_0\chi(D_0)+F_1\chi(D_1))+L_0L_1,$$

其中, F_0, F_1 分别表示 D_0, D_1 的面积.

研究动机

- 一个应用: 包含测度. 周家足 [Zho07] 利用 Poincaré 与 Blaschke 运动公式给出了两个凸体包含测度的一个下界估计, 进而得到一系列 Bonnesen 型 不等式
- 类似地, 周家足在 [Zho09] 中通过考虑平移运动下的包含测度, 他得到一系列 Bonnesen 型对称混合等似不等式
- 问题: 包含测度的高维推广. 主要困难在于寻求恰当的运动公式, 而且 Poincaré 运动公式的证明比较复杂, 需要几何测度论的知识 [RZ95]
- 目的: 对平面凸体的运动公式给出一个直接证明

研究动机

- 一个应用: 包含测度. 周家足 [Zho07] 利用 Poincaré 与 Blaschke 运动公式给出了两个凸体包含测度的一个下界估计, 进而得到一系列 Bonnesen 型 不等式
- 类似地, 周家足在 [Zho09] 中通过考虑平移运动下的包含测度, 他得到一系列 Bonnesen 型对称混合等似不等式
- 问题: 包含测度的高维推广. 主要困难在于寻求恰当的运动公式, 而且 Poincaré 运动公式的证明比较复杂, 需要几何测度论的知识 [RZ95]
- 目的: 对平面凸体的运动公式给出一个直接证明

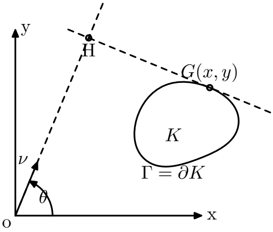
研究动机

- 一个应用：包含测度. 周家足 [Zho07] 利用 Poincaré 与 Blaschke 运动公式给出了两个凸体包含测度的一个下界估计，进而得到一系列 Bonnesen 型 不等式
- 类似地，周家足在 [Zho09] 中通过考虑平移运动下的包含测度，他得到一系列 Bonnesen 型对称混合等似不等式
- 问题：包含测度的高维推广. 主要困难在于寻求恰当的运动公式，而且 Poincaré 运动公式的证明比较复杂，需要几何测度论的知识 [RZ95]
- 目的：对平面凸体的运动公式给出一个直接证明

研究动机

- 一个应用: 包含测度. 周家足 [Zho07] 利用 Poincaré 与 Blaschke 运动公式给出了两个凸体包含测度的一个下界估计, 进而得到一系列 Bonnesen 型 不等式
- 类似地, 周家足在 [Zho09] 中通过考虑平移运动下的包含测度, 他得到一系列 Bonnesen 型对称混合等似不等式
- 问题: 包含测度的高维推广. 主要困难在于寻求恰当的运动公式, 而且 Poincaré 运动公式的证明比较复杂, 需要几何测度论的知识 [RZ95]
- 目的: 对平面凸体的运动公式给出一个直接证明

凸体的支持函数



K: 凸体, Γ: K 的边界
$\nu = (\cos\theta, \sin\theta)$: 给定方向
θ: ν 的方向角
凸体 K 的支持函数为:

$$p(\theta) = \max_{x\in K} \{x\cdot\nu | x\in K\}.$$

关于凸体 K 的支持函数 $p(\theta)$ 有如下结论:

- $p(\theta)$ 可以给出 $\Gamma = \partial K$ 的一个参数化:

$$\begin{cases} x &= p\cos\theta - p'\sin\theta \\ y &= p\sin\theta + p'\cos\theta. \end{cases} \tag{3.1}$$

- Γ 的周长以及围成的面积分别为

$$L(K) = \int_\Gamma ds, \quad F(K) = \frac{1}{2}\int_\Gamma p ds.$$

关于凸体 K 的支持函数 $p(\theta)$ 有如下结论:

- $p(\theta)$ 可以给出 $\Gamma = \partial K$ 的一个参数化:

$$\begin{cases} x &= p\cos\theta - p'\sin\theta \\ y &= p\sin\theta + p'\cos\theta. \end{cases} \tag{3.1}$$

- Γ 的周长以及围成的面积分别为

$$L(K) = \int_\Gamma \mathrm{d}s, \quad F(K) = \frac{1}{2}\int_\Gamma p\mathrm{d}s.$$

关于凸体 K 的支持函数 $p(\theta)$ 有如下结论:

- $p(\theta)$ 可以给出 $\Gamma = \partial K$ 的一个参数化:

$$\begin{cases} x & = p\cos\theta - p'\sin\theta \\ y & = p\sin\theta + p'\cos\theta. \end{cases} \tag{3.1}$$

- Γ 的周长以及围成的面积分别为

$$L(K) = \int_\Gamma \mathrm{d}s, \quad F(K) = \frac{1}{2}\int_\Gamma p\mathrm{d}s.$$

两凸体的混合面积

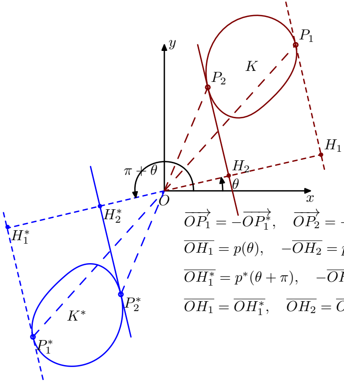
定义 3.1 (混合面积)

定义凸体 K_0 与 K_1 的**混合面积**为:

$$F_{01} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p_0p_1 - p_0'p_1')\mathrm{d}\theta,$$

其中, p_0', p_1' 表示对 θ 求导. 按照定义, 明显有 $F_{01} = F_{10}$.

凸体关于原点的反射



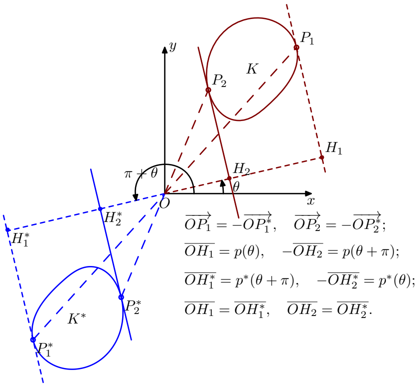
$$\overrightarrow{OP_1}=-\overrightarrow{OP_1^*},\quad \overrightarrow{OP_2}=-\overrightarrow{OP_2^*};$$
$$\overline{OH_1}=p(\theta),\quad -\overline{OH_2}=p(\theta+\pi);$$
$$\overline{OH_1^*}=p^*(\theta+\pi),\quad -\overline{OH_2^*}=p^*(\theta);$$
$$\overline{OH_1}=\overline{OH_1^*},\quad \overline{OH_2}=\overline{OH_2^*}.$$

K: 凸体, O: 坐标原点
K^*: K 关于原点反射后得到的凸体
p^*: K^* 的支持函数

我们有关系

$$\overline{OH_2^*}=\overline{OH_2}$$
$$\Downarrow$$
$$p^*(\theta)=p(\theta+\pi),\quad \theta\in\mathbf{R}.$$
$$\Downarrow$$
$$F_{01}=F_{10}.$$

凸体关于原点的反射



K: 凸体, O: 坐标原点
K^*: K 关于原点反射后得到的凸体
p^*: K^* 的支持函数

我们有关系

$$\overline{OH_2^*} = \overline{OH_2}$$

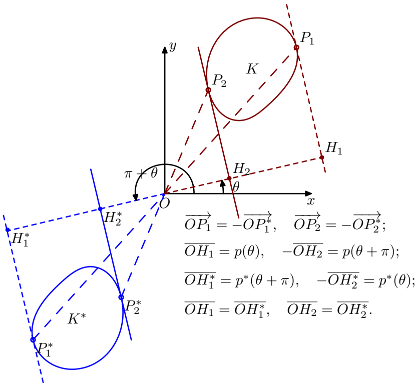
$$\Downarrow$$

$$p^*(\theta) = p(\theta+\pi), \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

$$\Downarrow$$

$$F_{01}^* = F_{10}^*.$$

凸体关于原点的反射



K: 凸体, O: 坐标原点
K^*: K 关于原点反射后得到的凸体
p^*: K^* 的支持函数

我们有关系

$$\overline{OH_2^*} = \overline{OH_2}$$
$$\Downarrow$$
$$p^*(\theta) = p(\theta+\pi), \quad \theta \in \mathbf{R}.$$
$$\Downarrow$$
$$F_{01}^* = F_{10}^*.$$

平移运动群

$$T_{a,b} : (x, y) \to (x + a, y + b) \quad \overset{一一对应}{\longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由积分几何中关于矩阵李群的理论, 知

$$\Omega = T^{-1}_{(a,b)} \mathrm{d}T_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{d}a \\ 0 & 0 & \mathrm{d}b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

的元素是**左不变的** [San04]. 于是

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b,$$

是左不变的 2-形式. 由交换性, 它也是右不变的. $\mathrm{d}t$ 称为平移运动群 $\mathfrak{T}$ 的**不变体积元**或者**运动密度**.

平移运动群

$$T_{a,b} : (x, y) \to (x + a, y + b) \quad \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由积分几何中关于矩阵李群的理论，知

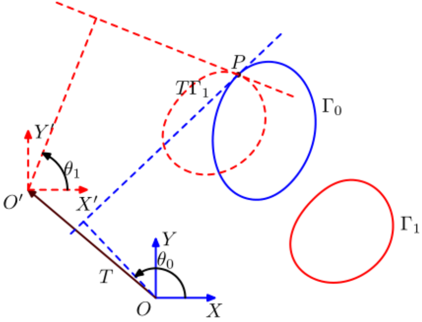
$$\Omega = T^{-1}_{(a,b)} \mathrm{d}T_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{d}a \\ 0 & 0 & \mathrm{d}b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

的元素是**左不变的** [San04]. 于是

$$\mathrm{dt} = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b,$$

是左不变的 2-形式. 由交换性，它也是右不变的. dt 称为平移运动群 $\mathfrak{T}$ 的**不变体积元**或者**运动密度**.

一个密度公式



目标：把平移向量 OO' 用 Γ_0, Γ_1 各自的支持函数表示出来

想法：利用关系

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P},$$

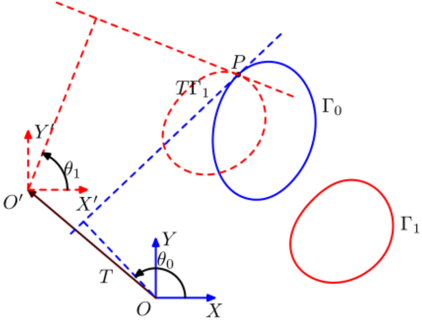
同时注意到如下事实：

- $\overrightarrow{OP}$ 的方向角是 θ_0，从而用支持函数 $p_0(\theta_0)$ 可以表出
- 同样，$\overrightarrow{O'P}$ 可用支持函数 $p_1(\theta_1)$ 表出

于是得到如下的密度公式：

$$dt = da \wedge db = \{p_0(\theta_0) + p_0''(\theta_0)\}\{p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1)\}|\sin(\theta_0 - \theta_1)| d\theta_0 \wedge d\theta_1.$$

一个密度公式



目标：把平移向量 OO' 用 Γ_0, Γ_1 各自的支持函数表示出来

想法：利用关系

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P},$$

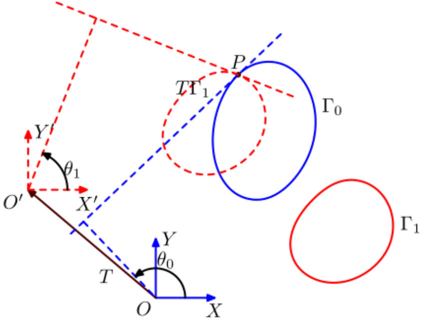
同时注意到如下事实：

- $\overrightarrow{OP}$ 的方向角是 θ_0，从而用支持函数 $p_0(\theta_0)$ 可以表出
- 同样，$\overrightarrow{O'P}$ 可用支持函数 $p_1(\theta_1)$ 表出

于是得到如下的密度公式：

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b = \left\{p_0(\theta_0) + p_0''(\theta_0)\right\}\left\{p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1)\right\}|\sin(\theta_0 - \theta_1)|\mathrm{d}\theta_0 \wedge \mathrm{d}\theta_1.$$

一个密度公式



目标：把平移向量 OO' 用 Γ_0, Γ_1 各自的支持函数表示出来

想法：利用关系

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P},$$

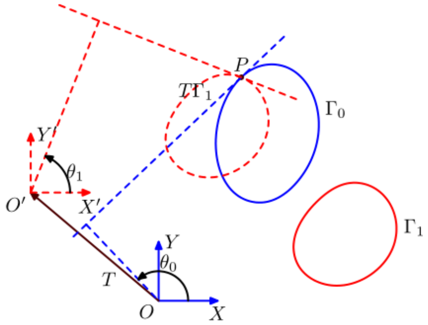
同时注意到如下事实：

- $\overrightarrow{OP}$ 的方向角是 θ_0，从而用支持函数 $p_0(\theta_0)$ 可以表出
- 同样，$\overrightarrow{O'P}$ 可用支持函数 $p_1(\theta_1)$ 表出

于是得到如下的密度公式：

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b = \{p_0(\theta_0) + p_0''(\theta_0)\}\{p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1)\}|\sin(\theta_0 - \theta_1)| \mathrm{d}\theta_0 \wedge \mathrm{d}\theta_1.$$

一个密度公式



目 标: 把 平 移 向 量 OO' 用 Γ_0, Γ_1 各自的支持函数表示出来

想法: 利用关系

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P},$$

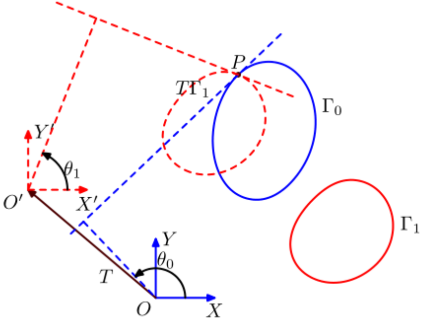
同时注意到如下事实:

- $\overrightarrow{OP}$ 的方向角是 θ_0, 从而用支持函数 $p_0(\theta_0)$ 可以表出
- 同样, $\overrightarrow{O'P}$ 可用支持函数 $p_1(\theta_1)$ 表出

于是得到如下的密度公式:

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b = \{p_0(\theta_0) + p_0''(\theta_0)\}\{p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1)\}|\sin(\theta_0 - \theta_1)| \mathrm{d}\theta_0 \wedge \mathrm{d}\theta_1.$$

一个密度公式



目 标: 把 平 移 向 量 OO' 用 Γ_0, Γ_1 各自的支持函数表示出来

想法: 利用关系

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P},$$

同时注意到如下事实:

- $\overrightarrow{OP}$ 的方向角是 θ_0, 从而用支持函数 $p_0(\theta_0)$ 可以表出
- 同样, $\overrightarrow{O'P}$ 可用支持函数 $p_1(\theta_1)$ 表出

于是得到如下的密度公式:

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b = \{p_0(\theta_0) + p_0''(\theta_0)\}\{p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1)\} |\sin(\theta_0 - \theta_1)| \mathrm{d}\theta_0 \wedge \mathrm{d}\theta_1.$$

Poincaré 平移运动公式

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b = \left\{ p_0(\theta_0) + p_0''(\theta_0) \right\} \left\{ p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1) \right\} |\sin(\theta_0 - \theta_1)| \mathrm{d}\theta_0 \wedge \mathrm{d}\theta_1.$$

将上述密度公式在 $\{T \in \mathfrak{T} | \partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset\}$ 上积分．我们得到

定理 4.1 (Poincaré 平移运动公式)

$$\int_{\Gamma_0 \cap T\Gamma_1 \neq \emptyset} \#\{\Gamma_0 \cap T\Gamma_1\} \, \mathrm{d}t = 4(F_{01} + F_{01}^*). \tag{4.1}$$

Poincaré 平移运动公式

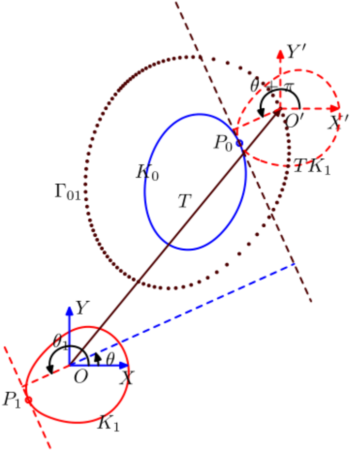
$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}b = \left\{p_0(\theta_0) + p_0''(\theta_0)\right\}\left\{p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1)\right\}|\sin(\theta_0-\theta_1)|\mathrm{d}\theta_0\wedge\mathrm{d}\theta_1.$$

将上述密度公式在 $\{T \in \mathfrak{T}|\partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset\}$ 上积分. 我们得到

定理 4.1 (Poincaré 平移运动公式)

$$\int_{\Gamma_0\cap T\Gamma_1\neq\emptyset} \#\{\Gamma_0 \cap T\Gamma_1\}\,\mathrm{d}t = 4(F_{01} + F_{01}^*). \tag{4.1}$$

平移运动密度的几何意义

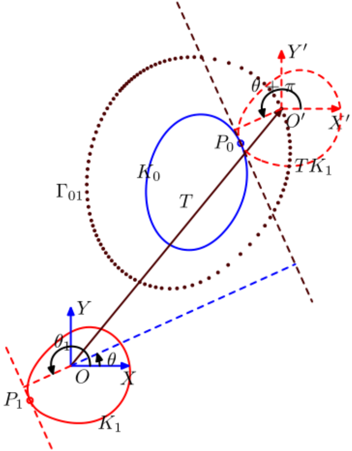


- 平移运动密度等于点 O' 的密度 (面积元), 其中 O' 是运动标架 $O'X'Y'$ 的原点.
- 所有使得 K_1 与 K_0 相交的 K_1 的位置, 一定包含在 O' 所成轨迹 Γ_{01} 内.

于是,

$$\int_{K_0\cap TK_1\neq\emptyset} dt = \Gamma_{01} \text{ 围成的面积.}$$

平移运动密度的几何意义

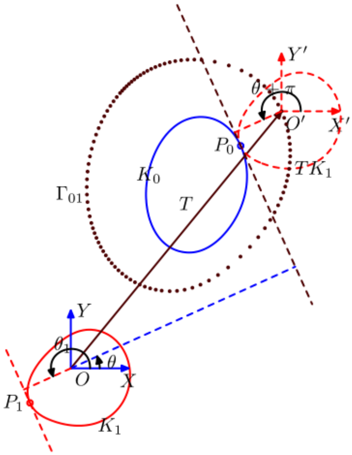


- 平移运动密度等于点 O' 的密度 (面积元), 其中 O' 是运动标架 $O'X'Y'$ 的原点.
- 所有使得 K_1 与 K_0 相交的 K_1 的位置, 一定包含在 O' 所成轨迹 Γ_{01} 内.

于是,

$$\int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} \mathrm{d}t = \Gamma_{01} \text{ 围成的面积.}$$

平移运动密度的几何意义



- 平移运动密度等于点 O' 的密度 (面积元), 其中 O' 是运动标架 $O'X'Y'$ 的原点.
- 所有使得 K_1 与 K_0 相交的 K_1 的位置, 一定包含在 O' 所成轨迹 Γ_{01} 内.

于是,

$$\int_{K_0\cap TK_1\neq\emptyset} \mathrm{dt} = \Gamma_{01} \text{ 围成的面积.}$$

Blaschke 平移运动公式

由于 Γ_{01} 的支持函数是 $p_0(\theta) + p_1(\theta + \pi)$, 于是 Γ_{01} 围成的面积为

$$\mathrm{Area}(\Gamma_{01}) = F_0 + F_1 + 2F^*_{10}. \tag{4.2}$$

这样, 我们就得到

定理 4.2 (Blaschke 平移运动公式)

$$\int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} \mathrm{dt} = F_0 + F_1 + 2F^*_{10}, \tag{4.3}$$

Blaschke 平移运动公式

由于 Γ_{01} 的支持函数是 $p_0(\theta) + p_1(\theta + \pi)$, 于是 Γ_{01} 围成的面积为

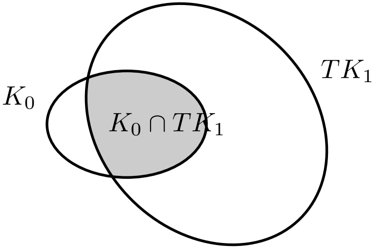
$$\text{Area}(\Gamma_{01}) = F_0 + F_1 + 2F_{10}^*. \tag{4.2}$$

这样, 我们就得到

定理 4.2 (Blaschke 平移运动公式)

$$\int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} \mathrm{dt} = F_0 + F_1 + 2F_{10}^*, \tag{4.3}$$

平移包含的思想



K_0, K_1：凸体

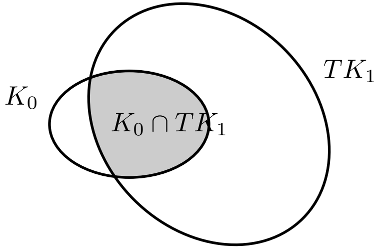
$K_0 \subset TK_1$ 或者 $TK_1 \subset K_0$

$\Updownarrow$

$K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset$

$\partial K_0 \cap \partial(TK_1) = \emptyset.$

平移包含的思想



K_0, K_1：凸体

$K_0 \subset TK_1$ 或者 $TK_1 \subset K_0$

$$\Updownarrow$$

$$K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset$$

$$\partial K_0 \cap \partial(TK_1) = \emptyset.$$

此外，当它们边界相交时，交点个数大于等于 2(除一个零测集外). 于是

$$
\begin{aligned}
& m\left\{T \in \mathfrak{T} | TK_1 \subset K_0 \text{ or } TK_1 \supset K_0\right\} \\
&\quad = m\left\{T \in \mathfrak{T} | TK_1 \cap K_0 \neq \emptyset\right\} - m\left\{T \in \mathfrak{T} | \partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset\right\} \\
&\quad = \int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} \mathrm{dt} - \int_{\partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset} \mathrm{dt} \\
&\quad \geq \int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} \mathrm{dt} - \frac{1}{2} \int_{\partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset} \# \left\{\partial K_0 \cap \partial(TK_1)\right\} \mathrm{dt} \\
&\quad = F_0 + F_1 - 2F_{10}.
\end{aligned}
$$

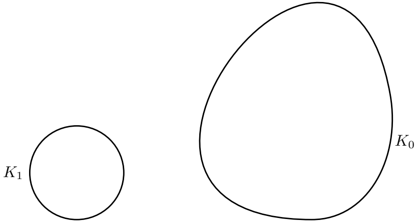
此外，当它们边界相交时，交点个数大于等于 2(除一个零测集外). 于是

$$
\begin{aligned}
& m\{T \in \mathfrak{T} | TK_1 \subset K_0 \text{ or } TK_1 \supset K_0\} \\
&= m\{T \in \mathfrak{T} | TK_1 \cap K_0 \neq \emptyset\} - m\{T \in \mathfrak{T} | \partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset\} \\
&= \int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} \mathrm{d}t - \int_{\partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset} \mathrm{d}t \\
&\geq \int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} \mathrm{d}t - \frac{1}{2} \int_{\partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset} \# \{\partial K_0 \cap \partial(TK_1)\} \, \mathrm{d}t \\
&= F_0 + F_1 - 2F_{10}.
\end{aligned}
$$

这样就得到了两凸体平移 (真) 包含测度的一个**下界估计**

$$
m\{T \in \mathfrak{T} | TK_1 \subset K_0 \text{ or } TK_1 \supset K_0\} \geq F_0 + F_1 - 2F_{10}. \tag{5.1}
$$

等周不等式的证明



K_0：固定凸体
K_1：运动单位圆盘
r_i：K_0 的最大内切圆半径
r_e：K_1 的最小外接圆半径

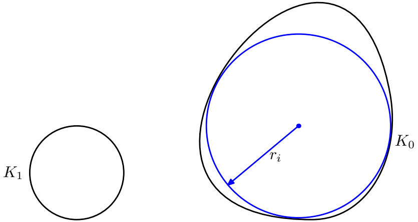
取 $K_1 = B(r)$, $r_i \le r \le r_e$

则 K_0 和 K_1 不能真包含.

$\Downarrow$ 下界估计

$$\pi r^2 - L_0 r + F_0 \le 0$$

等周不等式的证明



K_0：固定凸体
K_1：运动单位圆盘
r_i：K_0 的最大内切圆半径
r_e：K_1 的最小外接圆半径

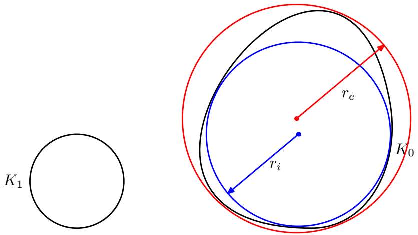
取 $K_1 = B(r)$, $r_i \leq r \leq r_e$

则 K_0 和 K_1 不能真包含.

$\Downarrow$ 下界估计

$$\pi r^2 - L_0 r + F_0 \leq 0$$

等周不等式的证明



K_0：固定凸体
K_1：运动单位圆盘
r_i：K_0 的最大内切圆半径
r_e：K_1 的最小外接圆半径

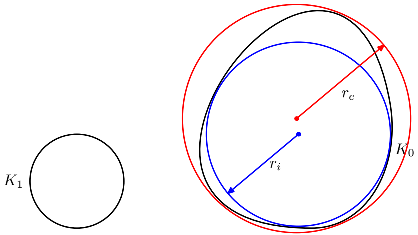
取 $K_1 = B(r), r_i \leq r \leq r_e$

则 K_0 和 K_1 不能真包含.

$\Downarrow$ 下界估计

$$\pi r^2 - L_0 r + F_0 \leq 0$$

等周不等式的证明



K_0：固定凸体
K_1：运动单位圆盘
r_i：K_0 的最大内切圆半径
r_e：K_1 的最小外接圆半径

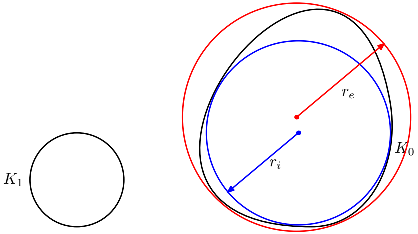
取 $K_1 = B(r)$, $r_i \le r \le r_e$

则 K_0 和 K_1 不能真包含.

$\Downarrow$ 下界估计

$$\pi r^2 - L_0 r + F_0 \le 0$$

等周不等式的证明



取 $K_1 = B(r)$, $r_i \le r \le r_e$

则 K_0 和 K_1 不能真包含.

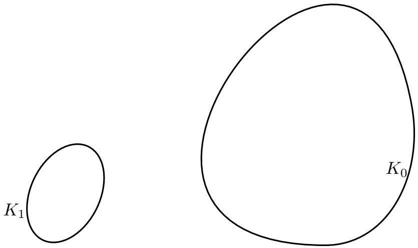
$$\Downarrow \text{ 下界估计}$$

$$\pi r^2 - L_0 r + F_0 \le 0$$

$$\Downarrow$$

$$L_0^2 - 4\pi F_0 \ge 0.$$

Minkowski 不等式的证明



K_0：固定凸体

K_1：运动凸体

$$t_M = \sup_{T\in\mathfrak{T}} \{t > 0 | t(TK_1) \subset K_0\}$$

$$t_m = \inf_{T\in\mathfrak{T}} \{t > 0 | t(TK_1) \supset K_0\}$$

当 $t \in [t_M, t_m]$ 时

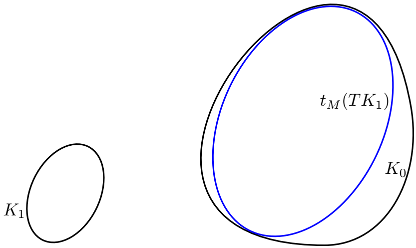
K_0 和 $t(TK_1)$ 不能真包含.

$$\Downarrow$$

下界估计

$$t^2F_1 - 2tF_{10} + F_0 \leq 0$$

Minkowski 不等式的证明



K_0: 固定凸体

K_1: 运动凸体

$$t_M = \sup_{T\in\mathfrak{T}} \{t > 0 | t(TK_1) \subset K_0\}$$

$$t_m = \inf_{T\in\mathfrak{T}} \{t > 0 | t(TK_1) \supset K_0\}$$

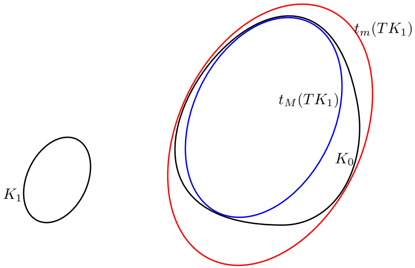
当 $t \in [t_M, t_m]$ 时

K_0 和 $t(TK_1)$ 不能真包含.

$$\Downarrow \text{下界估计}$$

$$t^2F_1 - 2tF_{10} + F_0 \le 0$$

Minkowski 不等式的证明



K_0: 固定凸体
K_1: 运动凸体

$$t_M = \sup_{T \in \mathfrak{T}} \{t > 0 | t(TK_1) \subset K_0\}$$

$$t_m = \inf_{T \in \mathfrak{T}} \{t > 0 | t(TK_1) \supset K_0\}$$

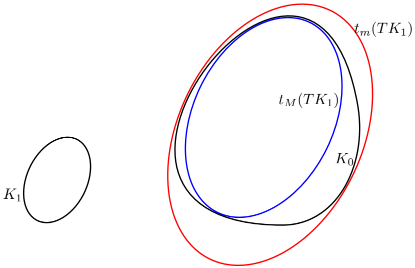
当 $t \in [t_M, t_m]$ 时

K_0 和 $t(TK_1)$ 不能真包含.

$$\Downarrow$$ 下界估计

$$t^2 F_1 - 2tF_{10} + F_0 \leq 0$$

Minkowski 不等式的证明



K_0：固定凸体
K_1：运动凸体

$$t_M = \sup_{T\in\mathfrak{T}} \{t > 0 | t(TK_1) \subset K_0\}$$

$$t_m = \inf_{T\in\mathfrak{T}} \{t > 0 | t(TK_1) \supset K_0\}$$

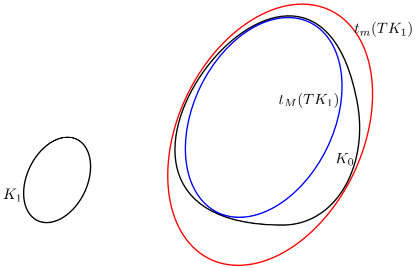
当 $t \in [t_M, t_m]$ 时

K_0 和 $t(TK_1)$ 不能真包含.

$$\Downarrow \text{ 下界估计}$$

$$t^2F_1 - 2tF_{10} + F_0 \leq 0$$

Minkowski 不等式的证明



当 $t \in [t_M, t_m]$ 时

K_0 和 $t(TK_1)$ 不能真包含.

$$\Downarrow \text{ 下界估计}$$

$$t^2F_1 - 2tF_{10} + F_0 \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$F_{01}^2 - F_0F_1 \geq 0.$$

参考文献 I

- D. Hug and R. Schneider, *Kinematic and crofton formulae of integral geometry: recent variants and extensions*, Homenatge al professor Llu s Santal oi Sors (C. Barcel oi Vidal, ed.), Universitat de Girona (2002), 51--80.
- J. Rataj and M. Zähle, *Mixed curvature measures for sets of positive reach and a translative integral formula*, Geometriae Dedicata **57** (1995), no. 3, 259--283.
- L.A. Santaló, *Integral geometry and geometric probability*, Cambridge Univ. Pr., 2004.
- J. Zhou, *Plan Bonnesen-type inequalities*, Acta Math. Sinica (Chinese Series) **50** (2007), no. 6, 1397--1402.
- ______, *On the isohomothetic inequalities*, preprint (2009).

- **感谢 我的导师 周家足 教授**
- **感谢 答辩委员会的各位专家**
- **感谢 评审论文的各位专家**
- **感谢 在场的各位老师和同学**

谢谢!

欢迎各位专家提问!

- **感谢 我的导师 周家足 教授**
- **感谢 答辩委员会的各位专家**
- **感谢 评审论文的各位专家**
- **感谢 在场的各位老师和同学**

谢谢!

欢迎各位专家提问!