

中国科学技术大学

博士学位论文



黎曼面上的规范变换流与多调和映照的 Neck 分析

作者姓名： 艾万君

学科专业： 基础数学

导师姓名： 李嘉禹 教授

殷浩 副教授

完成时间：2017 年 1 月 5 日

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor's degree



Gauge Transformation Flow on Riemannian Surfaces and the Neck Analysis of Polyharmonic Maps

Author's Name: Wanjun Ai

Speciality: Pure Mathematics

Supervisor: Prof. Jiayu Li

Assoc. Prof. Hao Yin

Finished Time: January 5, 2017

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：_____

签字日期：_____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

☐ 公开 ☐ 保密（_____ 年）

作者签名：_____

导师签名：_____

签字日期：_____

签字日期：_____

摘 要

本文由两个部分组成. 在第一部分, 我们考虑了紧致带边黎曼面上 G -向量丛的规范变换流, 并利用热流方法, 证明了该流的短时间存在性与广义解的长时间存在性. 作为推论, 我们给出了 Uhlenbeck-Rivière 分解的一个热流证明. 在第二部分, 我们证明了一列能量一致有界的外多调和映照在爆破过程中成立能量等式与 no neck 性质.

关键词: 热流 库伦规范 爆破分析 多调和映照 能量等式 No neck 性质

ABSTRACT

This dissertation consists of two parts. In the first part, we consider the gauge transformation of the metric G -bundle on a compact Riemannian surface with boundary. The short-time existence of the flow and the long-time existence of generalized solution are proved. As an application, we derive a heat flow proof for the Uhlenbeck-Rivière decomposition. In the second part, we prove that the energy identity and no neck property hold for a sequence of exterior polyharmonic maps with uniformly bounded energy in the blow-up process.

Key Words: heat flow, Coulomb gauge, blow-up analysis, polyharmonic maps, energy identity, no neck

目 录

摘要	I
Abstract	III
符号列表	XI
 第一部分 黎曼面上的规范变换流	1
第 1 章 主要结果的陈述	3
第 2 章 预备知识	9
2.1 G -丛与配丛	9
2.1.1 G -丛的一些重要的配丛	15
2.1.2 典型例子: 向量丛及其标架丛	16
2.2 Ehresmann 联络与曲率	17
2.2.1 纤维丛上的联络	17
2.2.2 G -丛的联络及其局部表示	19
2.2.3 主联络的共变外微分	23
2.2.4 主联络在配丛上的诱导联络	23
2.2.5 主联络在配向量丛上的诱导联络	24
2.2.6 向量丛的共变微分	24
2.2.7 向量丛的共变外微分	25
2.3 Sobolev 空间与 Hölder 空间	27
第 3 章 梯度流及其短时间存在性	35
3.1 方程的局部坐标表示	35
3.2 负向梯度流	36
3.3 短时间存在性	37
第 4 章 爆破过程中的关键引理与估计	43
4.1 局部能量不等式	43
4.2 小能量正则性	45
4.3 奇点可去	51
第 5 章 解的奇性分析	53
5.1 爆破准则与奇点的有限性	53

5.2 椭圆版小能量正则性	54
5.3 调和球的产生	55
5.4 边界 bubble 的不存在性	57
第 6 章 奇异解的延拓	59
6.1 奇点附近的震荡估计	59
6.2 逼近引理的证明	61
6.3 广义解的存在性	65
第 7 章 Uhlenbeck-Rivière 分解的热流证明	69
 第二部分 多调和映照的 Neck 分析	 73
第 8 章 主要结果的陈述	75
第 9 章 调和映照的爆破分析	79
9.1 Bubble Tree 的构造	79
9.1.1 Ding-Tian 的约化办法	79
9.1.2 Parker 的办法	88
9.2 能量等式与 No Neck	96
9.3 Pohozaev 恒等式	98
9.4 切向能量的衰减估计	98
第 10 章 多调和映照的三圈定理	105
10.1 实 Hilbert 空间中两个 2 维子空间的夹角	105
10.2 双调和映射的三圈引理	108
10.3 多调和映照的三圈引理	113
第 11 章 多调和映照的 Pohozaev 不等式	119
11.1 多调和映照方程的结构	119
11.2 相对 Pohozaev 恒等式	121
第 12 章 多调和映照的能量等式与 No Neck	125
12.1 小能量正则性	125
12.2 能量的径向—切向分解	132
12.3 线性化多调和映照方程及其高阶估计	133
12.4 Neck 分析的基本框架	134
12.5 切向能量的衰减估计	136
12.5.1 逼近多调和函数与 L^p 估计	137
12.5.2 逼近多调和映照的三圈引理	138

12.5.3 逼近多调和函数的构造	140
12.5.4 切向能量衰减的证明	142
12.6 径向能量的衰减估计	143
参考文献	147
致谢	151
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	153
索引	155

图目录

4.1 远离边界与靠近边界的情形	46
5.1 爆破过程	56
6.1 边界爆破点处的截断	63
9.1 区域分解与映射分解	94

符号列表

Ad	伴随表示, 伴随作用. 16
$\text{Ad}(E)$	G -从 E 的李代数配丛. 16
$\text{Aut}_G(E)$	G -丛 E 的规范变换丛. 16
$\mathcal{C}$	共轭作用. 15, 16
ω	李代数值的联络 1 形式. 20
Const.	常数. 85
C_R	重整化常数. 90, 91
Δ_0	球面 S^{2m-1} 上的 Laplace 算子. 108, 114
diag	对角矩阵. 106
$E^\perp$	E 的垂直切丛. 17
$\mathcal{G}$	规范变换丛. 16
$\mathfrak{g}$	李群 G 的李代数. 16
$\mathfrak{g}_E$	G -从 E 的李代数配丛. 16
$\mathcal{L}$	逐段光滑曲线的范畴. 19
$\mathbb{N}$	自然数 $0, 1, 2, \dots$. 108
$\mathcal{P}$	平行移动. 19
$\mathcal{Q}$	曲率 2 形式. 23
R_a	主丛的主右作用. 20
$\mathcal{R}$	联络的曲率. 17, 23
$\mathbb{R}$	实数. 6

$\mathcal{A}$	指标集. 10
S	奇点集. 53
v	联络 1-形式. 17
$\rightharpoonup$	弱收敛. 55
$\mathbb{Z}$	整数. 77

第一部分

黎曼面上的规范变换流

第 1 章 主要结果的陈述

假设 E 是黎曼流形 Σ 上一个具有度量的 G -向量丛, 其秩为 r , 结构群为 G . 给定 E 上的两个 G -联络 A_0, A , 对 E 的任一规范变换 S , 考察如下的能量

$$\mathcal{E}(S) := \int_{\Sigma} e(S) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |S^*(A) - A_0|^2,$$

它可看作度量经由规范变换 S 作用后的联络 $S^*(A)$ 与固定联络 A_0 之间的 L^2 距离. 因此, 当 S 是 $\mathcal{E}(S)$ 的临界点时, 在 A 的所有通过规范变换作用所形成的轨道中, $S^*(A)$ 相对于 A_0 处于一个自然位置. 事实上, $\mathcal{E}(S)$ 的欧拉—拉格朗日方程 (暂时不考虑边界) 可写成

$$\nabla_{S^*(A)}^*(S^*(A) - A_0) = 0. \quad (1.1)$$

几何地, (1.1) 表明 $S^*(A) - A_0$ 与 A 由规范变换作用的轨道在 $S^*(A)$ 处垂直. 事实上, 该轨道在 $S^*(A)$ 处的切向量均由 $\nabla_{S^*(A)}\xi$ 给出, 其中 ξ 是李代数丛 $\mathfrak{g}_E$ 的一个截面. 由 (1.1) 知,

$$0 = \langle \nabla_{S^*(A)}^*(S^*(A) - A_0), \xi \rangle = \langle S^*(A) - A_0, \nabla_{S^*(A)}\xi \rangle, \quad \forall \xi \in \Gamma(\mathfrak{g}_E).$$

此外, 直接计算可知 (参考 (3.1)),

$$\nabla_{A_0}^*(S^*(A) - A_0) = 0. \quad (1.2)$$

上式表明, $S^*(A)$ 可看作整体的库伦规范. 事实上, 当 Σ 是欧式空间中的单位圆盘, E 是平凡丛 $B \times \mathbb{R}^r$ 时, 取 $A_0 = d$, $A = d + \Omega$, 这里 Ω 是某个矩阵值的 1 形式, 将 (1.2) 展开即得

$$d^*(S^{-1}dS + S^{-1}\Omega S) = 0.$$

这正是 $S^*(A) = d + S^{-1}dS + S^{-1}\Omega S$ 是局部库伦规范的条件.

尽管 Uhlenbeck [53, Theorem 2.1] 是使用连续性方法来证明局部库伦规范的存在性, 但关于库伦规范的上述变分刻画并不是新的. 在 [15, Lemma 4.1.3] 中, Hélein 研究了 $\mathcal{E}(S)$ 的一种形式并用极小化方法得到库伦规范的存在性. 这一结果在研究二维调和映照的正则性方面非常有用. 我们将在第 7 章中看到如何用热流的方法来证明库伦规范的存在性.

利用连续性方法或者极小化方法找库伦规范在许多其他场合证明也是有用的. 例如, 用于双调和映射的部分正则性 [55, Proposition 3.2; 57, Proposition 3.1];

满足某种逼近性质的 Yang-Mills 场 [30, Theorem 1.3] 的部分正则性以及 admissible Yang-Mills 场的奇点可去 [51, Theorem 4.6]; 具有反对称结构的椭圆系统的部分正则性 [41, Lemma A.4; 42, Lemma 4.1]; Rivière-Uhlenbeck 分解的正则性 [33, Lemma 2.1] 等. 直接极小化方法可以参考 [9, Proposition 2; 44, Theorem 2.1].

第一部分的主要目的是当 Σ 是紧致黎曼面时, 用负向梯度流的方法来证明库伦规范的存在性. 为了后面的应用, 我们假设 Σ 具有非空边界. 但是应该指出, 当 Σ 无边时, 第一部分的主要结果都有对应的版本, 而且从分析上讲更加简单.

考察下面的演化问题

$$\begin{cases} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial t} = \nabla_{S^*(A)}^*(S^*(A) - A_0), & (x, t) \in \Sigma \times (0, T), \\ S(x, 0) = S_0(x), & x \in \Sigma, \\ \nu \lrcorner (S^*(A) - A_0) = 0, & (x, t) \in \partial \Sigma \times [0, T), \end{cases} \quad (1.3)$$

其中, A 与 A_0 如前是两个 G -联络, S_0 是初始的规范变换, ν 是 $\partial \Sigma$ 的法向而 $\lrcorner$ 是向量场与 1-形式间的缩并. 我们将假设如下的零阶相容性 ([21, Section IV, p.318ff])

$$\nu \lrcorner (S_0^*(A) - A_0) = 0. \quad (1.4)$$

理论上讲, 也可以考虑诸如 Dirichlet 边界条件的其它类型的边界条件. 我们选择这种混合型边界条件的主要原因是在局部的情形 ($E = B \times \mathbb{R}^r$, $A_0 = d$, $A = d + \Omega$), (1.3) 的边界条件约化为

$$\nu \lrcorner (S^{-1}dS + S^{-1}\Omega S) = 0, \quad \text{在边界 } \partial B \text{ 上.}$$

这正是 Uhlenbeck 在 [53, Theorem 2.1, Condition (b)] 所考虑的边界条件.

关于流(1.3)的讨论非常类似于二维调和映射流, 后者首先由 Struwe[49] 对闭曲面的情形进行研究, 而后 Chang K.C. [4] 考虑了带有 Dirichlet 边界的情形, 而 Ma.L[29] 考虑了自由边值的情形. 为了看出二者之间的相似性, 我们只需将方程在局部平凡化下表示出来. 此时, S 是到李群 G 的一个映射, $\mathcal{E}(S)$ 的主项恰好是 S 作为调和映射的 Dirichlet 能量. 因此, 本文中的证明和调和映照流的证明是类似的, 但由于没有整体标架以及混合边界条件使得证明有些非平凡.

定理 1.1 令 E, G, A, A_0, Σ 如上, $S_0 \in \Gamma(\text{Aut}_G E)$ 是规范变换丛的一个光滑截面且满足 $\mathcal{E}(S_0) < +\infty$. 如果相容性条件(1.4)成立, 则

- (i) 存在某个 $T_1 > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ 以及 $S \in C^\infty((0, T_1) \times \Sigma, \text{Aut}_G E) \cap C^{2,\alpha}([0, T_1) \times \Sigma, \text{Aut}_G E)$, 使得 S 是(1.3)的解.
- (ii) 此外, 若 $T_1 < +\infty$, 则存在有限个爆破点 $\{x_i\}_{i=1}^N$, 使得 $S(t) \rightarrow S(T_1)$ in $C_{\text{loc}}^\infty(\Sigma \setminus \{x_i\}_{i=1}^N, \text{End } E)$, 其中 $\text{End } E$ 是 E 的自同态丛, $S(\cdot, T_1)$ 是 $t \nearrow T_1$ 时 $S(\cdot, t)$ 的 $W^{1,2}$ -弱解.

(iii) 对任一爆破点 x_i 以及任何 $t_k \nearrow T_1$, 存在点列 $x_i^k \rightarrow x_i$ 以及数列 $\lambda_i^k \rightarrow 0$ 和某个 bubble $\omega_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2, G)$ (ω_i 是调和映照), 使得当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$w_i^k(x) := u(x_i^k + \lambda_i^k x, t_k) \rightarrow \omega_i, \quad \text{in } C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2, G),$$

其中 $u: B_1(x_i) \rightarrow G$ 是 S 在某个固定平凡化下的局部表达式.

(iv) 最后, 如下的能量不等式成立

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}(S(\cdot, t_k)) \geq \mathcal{E}(S(\cdot, T_1)) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \omega_i|^2.$$

如果 T_1 是有限的, 则 $S(T_1)$ 除去有限个奇点 $\{x_i\}_{i=1}^N$ 之外是光滑的, 而且由范数的弱下半连续性, 其 $\mathcal{E}$ -能量有限. 正如调和映照流的情形 (参考 [29, p.295; 49, p.576]), 我们可以用 Schoen&Uhlenbeck 的逼近引理 [45, Lemma 3.2] 构造 $S(T_1)$ 的逼近序列 $\{S_k\}$ 并证明以该序列为初值的流的解确实收敛到以 $S(T_1)$ 为初值的流的一个弱解. 这里, 我们的处理方式稍有不同. 在 [39, Theorem 1.1] 中, Qing 为了分析 $u(T_1)$ (调和映照流在第一爆破时刻的弱极限) 的奇性, 改进了解在奇点附近的估计. 尽管 $u(T_1)$ 一般而言不是连续的 (可以参考 Topping [52, Theorem 1.14] 构造的反例), 这一估计却能使我们用截断函数具体地构造 $S(T_1)$ 的逼近序列. 这一构造更加具有几何直观性.

引理 1.2 (逼近引理) 对定理 1.1 中的 $S, T_1, \{x_i\}_{i=1}^N$ 以及任意的 $\sigma > 0$, 存在 $S(T_1)$ 的一个光滑 σ -逼近. 即, 存在 $\delta_i > 0$ 以及一个光滑的规范变换 $\tilde{S}$, 使得在 $\Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^N B_{\delta_i}(x_i)$ 上 $S(T_1) = \tilde{S}$ 且

$$\left| \mathcal{E}(S(T_1)) - \mathcal{E}(\tilde{S}) \right| < \sigma, \quad \nu \lrcorner (\tilde{S}^*(A) - A_0) = 0.$$

利用上述引理, 我们以 $\tilde{S}$ 为初值重新开始流 (短时间存在性由定理 1.1 保证) 直到下一个奇异时刻, 不断重复该过程, 则可以得到 $t \in (0, \infty]$ 上的逐段光滑解, 我们称其为 (1.3) 的 **广义解**. 上述过程之所以会在有限次后停止, 是因为如果 σ 小于从 S^2 到 G 的调和映照的最小能量, 那么上述广义解在每个奇异时刻都将至少损失固定的能量. 广义解在 $t \rightarrow \infty$ 时的极限将是 (1.1) 的弱解 (除去有点多个爆破点后光滑), 进而我们将证明此时它的奇点是可去的, 从而该极限其实是 Σ (包括边界) 上的光滑解.

定理 1.3 令 ε_0 是小能量正则性中的常数 (见后定理 4.2). 则对任意的 $\sigma < \varepsilon_0$, 存在 (1.3) 的解 $S(x, t)$, 它在 $K+1$ 个区间 $[T_k, T_{k+1})$ 上是逐段光滑的 ($T_0 = 0$,

$T_{K+1} = \infty$), 即

$$\begin{cases} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial t} = -\nabla_{S^*(A)}^*(S^*(A) - A_0), & (x, t) \in \Sigma \times I_k \\ S(x, T_k) = S_k(x), & x \in \Sigma \\ \nu \lrcorner (S^*(A) - A_0) = 0, & (x, t) \in \partial \Sigma \times I_k, \end{cases}$$

其中 $S_k \in \Gamma(\text{Aut}_G E)$, S_0 的 $\mathcal{E}$ 能量有限. 且对任意的 $1 \leq k < K$, S_k 是弱极限 $S(T_k) := S(\cdot, T_k)$ 的一个 σ -逼近解 (参考 引理 1.2).

此外, 对任何爆破序列 $\{t_i\} \nearrow T_k$,

$$\lim_{t_i \rightarrow T_k} \mathcal{E}(S_{k-1}(\cdot, t_i); \Sigma) \geq \mathcal{E}(S_k(\cdot, T_k); \Sigma) + N(T_k)(\varepsilon_0 - \sigma), \quad (1.5)$$

其中 $N(T_k)$ 是在奇异时刻 T_k 时的爆破点个数. 特别地, 广义解的能量沿着流是单调递减的, 从而当 $t \rightarrow \infty$ 时, 对 $S(\cdot, t)$ 的弱极限 S_∞ , 可以证明它在 Σ 上光滑而且是 (1.1) 的解.

注意到上面给出的逐段光滑解仍然依赖于参数 σ . 我们相信, 当 $\sigma \rightarrow 0$ 时, 上述逼近解收敛到类似 Struwe [49, Proposition 4.2] 得到的整体弱解. 因为 S_k 只是 $S(T_k)$ 的一种特殊的逼近.

最后, 作为应用, 我们给出 Rivière 发现的守恒律 [41, Lemma A.3] 的一个流的证明. Rivière 的原始证明用的是连续性方法, 变分的证明可以参考 Schikorra [44, Theorem 2.1] 和 [9, Proposition 2].

推论 1.4 假设 E 是 $B \subset \mathbb{R}^2$ 上一个结构群为 $SO(m)$ 的向量丛, 则对任何的联络 1-形式 $\Omega \in L^2(B, \mathfrak{so}(m) \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^2)$, 存在 $\xi \in W^{1,2}(B, \mathfrak{so}(m))$ 以及 $S \in W^{1,2}(B, SO(m))$ 使得

$$\begin{cases} \nabla^\perp \xi = S^{-1} \nabla S + S^{-1} \Omega S, & x \in B, \\ \xi = 0, & x \in \partial B. \end{cases} \quad (1.6)$$

此外, 存在常数 $C(m)$, 使得

$$\|\xi\|_{1,2;B} + \|\nabla S\|_{2;B} \leq C(m) \|\Omega\|_{2;B}.$$

注记 根据 [41] 中的定义, $\nabla^\perp$ 是梯度算子旋转 90 度而得到的微分算子. 容易验证该算子的散度为零. 这正是 (1.6) 中第一式称为守恒律的原因.

第一部分的结构如下: 在第 2 章中给出关于丛的一些基本事实, 在随后的第 3 章, 首先我们证明 (1.3) 是 $\mathcal{E}(S)$ 的负向梯度流, 然后证明 (1.3) 的短时间存在性. 作为爆破分析的准备, 在第 4 章, 我们证明了爆破分析中的一些经典但重要的

引理在丛情形的推广, 它们是局部能量不等式 (local energy inequality), ε -正则性定理 (small energy regularity theorem) 和奇点可去定理 (removable of singularity). 然后在第 5 章, 我们在每个奇点处, 利用上述引理得到一个 bubble, 即到 G 的调和球. 此外, 我们还证明了边界 bubble 不存在. 接下来, 在第 6 章中, 作为证明逼近引理的准备, 我们首先证明了奇点附近的震荡估计 (oscillation estimate). 有了逼近引理, 我们可以比较容易的得到广义解的存在性. 最后, 在第 7 章中, 我们证明推论 1.4 可以用流的方法证明.

第2章 预备知识

本章从一般的纤维丛的定义出发,说明纤维丛定义中最要紧的只是转移函数并证明了纤维丛的构造引理(参考命题 2.5).而后通过逐步增加结构,依次介绍了 G -丛, G -主丛及其配丛.有了这些准备,我们很方便的引入 G -向量丛,以及与之相伴的自同构丛与自同态丛的概念.通过限制群作用和纤维空间,作为特例,我们给出了 G -丛在伴随表示下的配丛即李代数丛以及在共轭作用下的配丛即规范变换丛.

随后,我们介绍了丛上非常重要的另一结构——联络.这里仍然先从一般纤维丛上的联络开始介绍了它的三种等价定义:联络 1 形式,水平分布与平行移动.而后转入 G -主丛的联络的定义,并简要的证明了联络的活动标架表示,这在局部计算中是有用的.我们通过将主联络诱导在配丛上得到配丛的联络,进而得到向量丛上的联络,即通常所谓的作用在光滑截面上的方向导数.

最后,我们定义了向量丛截面的 Sobolev 空间与 Hölder 空间,并证明了这两种空间在局部平凡化下可用分量函数来等价定义.为了简化今后的证明,我们还证明了当底流形是紧致的时候,局部地,上述泛函空间和标准欧氏度量下定义的相应的空间是等价的.

2.1 G -丛与配丛

本节主要讨论主丛与配丛的定义以及如何从主丛构造配丛,如何从配丛构造主丛.这为以后讨论丛上的诸如联络、规范变换等几何对象打好基础.为了定义主丛,我们先来看李群作用在光滑流形上的定义.若非特别说明,本章用到的光滑性皆指 C^∞ 光滑.

定义 2.1 (群作用) 假设 G 是一个李群, M 是一个光滑流形,称光滑映射 $\rho: M \times G \rightarrow M$ 为 M 上的一个右作用,若

- (i) 对任意的 $a \in G$, $R_a: M \rightarrow M$, $R_a(x) = \rho(x, a)$ 是一个微分同胚;
- (ii) 对任意的 $x \in M$, $a, b \in G$, 有 $\rho(x, ab) = \rho(\rho(x, a), b)$;
- (iii) 对 G 中的单位元 e , 有 $\rho(\cdot, e)$ 为 M 上的恒等映射.

为简单起见,有时我们也将 $\rho(x, a)$ 简记为 $x \cdot a$. 完全类似定义左作用.

我们称作用 ρ 是**自由地**(freely), 如果存在 $x \in M$, 使得 $\rho(x, a) = x$ 对某个 $a \in G$ 成立, 则 $a = e$. 称作用 ρ 是**有效地**(effectively), 如果对任意的 $x \in M$, 都有 $\rho(x, a) = x$ 对某个 $a \in G$ 成立, 则 $a = e$. 称作用 ρ 是**可迁地**(transitively), 如果对任意的 $x_1, x_2 \in M$, 都存在某个 $a \in M$, 使得 $\rho(x_1, a) = x_2$.

注记 假设作用 ρ 是自由的, 即对任意的 $a \in G$, 若 $a \neq e$, 则对任意的 $x \in M$ 都有 $\rho(x, a) \neq x$ (从而自由的作用也可理解为没有不动点的作用). 而按照有效作用的定义, 对任意的 $a \in G$, 若 $a \neq e$, 则存在 $x \in M$ 使得 $\rho(x, a) \neq x$. 由此可见, 自由的作用一定是有效的.

首先我们来定义一般的纤维丛, 以及如何从转移函数构造出纤维丛.

定义 2.2 (纤维丛) 假设 E, M, F 是光滑流形, $\pi: E \rightarrow M$ 是一个光滑映射, 我们称四元组 (E, π, M, F) 为**纤维丛**, 若下列条件成立

- (i) 映射 π 是满射;
- (ii) 丛的局部平凡性: 存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, 以及光滑微分同胚

$$\Phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F,$$

使得下列图 (Diagram) 交换

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_\alpha} & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & U_\alpha \times F \\ \downarrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

这等价于, 对任意的 $x \in U_\alpha$, $\Phi_\alpha(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times F$. 其中 pr_1 表示向第一分量的投射, 类似地定义 pr_2 .

一般地, 我们称上述定义中 $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 为相应纤维丛的一个**坐标图册** (atlas).

对纤维丛, 其实它完全由其转移函数决定.

定义 2.3 (转移函数) 假设 (E, π, M, F) 是一个纤维丛, $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 是其一个坐标图册, 称由

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x, f) = (x, \Phi_{\alpha\beta}(x)(f)),$$

决定的光滑映射

$$\Phi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F),$$

为纤维丛 (E, π, M, F) 的**转移函数**. 其中 $f \in F$, $\text{Diff}(F)$ 为 F 上的全体光滑微分同胚所构成的 (无限维李) 群.

注记 (i) $\text{Diff}(F)$ 的光滑结构我们并不是非常关心;

(ii) 容易验证, 转移函数 $\{\Phi_{\alpha\beta}\}$ 满足如下的cocycle 条件

$$\begin{cases} \Phi_{\alpha\gamma}(x) = \Phi_{\alpha\beta}(x) \circ \Phi_{\beta\gamma}(x), & x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset \\ \Phi_{\alpha\alpha}(x) = \text{Id}, & x \in U_\alpha, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 Id 是 $\text{Diff}(F)$ 上的恒等映射.

为了简化下面从转移函数构造纤维丛过程中说明所构造的流形及映射的光滑性, 我们先给出以下引理.

引理 2.4 ([48, Theorem 2.1, p. 44]) 假设 M 是一个集合, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 是 M 的一个可数开覆盖. $\Psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow M_\alpha$ 是到光滑流形 M_α 的映射. 若它们满足以下条件

- (i) 对任意的 $x, y \in M$, 要么存在 U_α , 使得 $x, y \in U_\alpha$; 要么存在 U_α, U_β , 使得 $x \in U_\alpha, y \in U_\beta$, 且 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ (覆盖足够细);
- (ii) 对任意的 β , 若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 则 $\Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 是 M_α 的一个开子集;
- (iii) 若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 则 $\Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha$ 是从 $\Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 到 M_β 中其像集的微分同胚;

则存在 M 上唯一的 (拓扑以及) 微分结构, 使得 U_α 是开集, 且 $\Psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow M_\alpha$ 是微分同胚.

命题 2.5 (从转移函数构造纤维丛) 假设 M, F 是光滑流形, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 是 M 的一个开覆盖. 对任意的 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 其上定义了光滑函数 $\Phi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$. 若它们满足 cocycle 条件(2.1), 则存在纤维丛 (E, π, M, F) , 使得其转移函数恰好是这些指定的函数簇.

证明 考察无交并 $\tilde{E} := \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{\alpha\} \times U_\alpha \times F$, 并赋予 $\mathcal{A}$ 以离散拓扑, 使 $\tilde{E}$ 的拓扑是由乘积拓扑 $\mathcal{A} \times M \times F$ 所诱导的. 在 $\tilde{E}$ 上定义等价关系如下

$$(\alpha, x, f) \sim (\beta, y, \tilde{f}) \iff x = y, \text{ 且 } \Phi_{\beta\alpha}(x)(f) = \tilde{f}.$$

由 cocycle 条件, 容易验证它确实是一个等价关系. 令 $E = \tilde{E} / \sim$, 即等价类全体. 其上有自然的商拓扑, 记其自然投射 (将元素映到其等价类) 为 q . 定义投影映射 $\pi: E \rightarrow M$ 为 $\pi([(\alpha, x, f)]) = x$. 明显它与等价类的选择无关. 假设 U 是 M 的一个开集, 易见 $q^{-1}(\pi^{-1}(U))$ 为开集 $(\mathcal{A} \times U \times F) \cap \tilde{E}$, 因此 π 是连续的.

考察连续 (因为 q 连续) 映射

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha: U_\alpha \times F &\rightarrow E, \\ (x, f) &\mapsto q(\alpha, x, f). \end{aligned}$$

注意到 $\pi(q(\alpha, x, f)) = x$, 因此 $\Psi_\alpha(U_\alpha \times F) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$. 反过来, 若 $[(\beta, y, \tilde{f})] \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, 则按定义, 存在 $(\alpha, x, f) \in \{\alpha\} \times U_\alpha \times F$ 使得 $(\beta, y, \tilde{f}) \sim (\alpha, x, f)$, 从而 $y \in U_\alpha \cap U_\beta$ 且 $\Phi_{\alpha\beta}(x)(\tilde{f}) = f$. 因此, $\Psi_\alpha(y, \Phi_{\alpha\beta}(x)(\tilde{f})) = q(\alpha, x, \Phi_{\alpha\beta}(x)(\tilde{f})) = [(\alpha, x, f)] = [(\beta, y, \tilde{f})]$. 这就证明了 Ψ_α 是 $U_\alpha \times F$ 到 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 连续的一一映射, 由代数拓扑里的区域不变定理 (Invariance of domain), 我们知道 Ψ_α^{-1} 也是连续的.

于是, $(\pi^{-1}(U_\alpha), \Psi_\alpha^{-1})_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 构成了 (拓扑) 丛 E 的一个局部平凡化. 注意到, 若假设其坐标转换函数

$$\Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow U_\beta \times F,$$

满足

$$\Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha(x, f) = \Psi_\beta^{-1} q(\alpha, x, f) = (y, \tilde{f}),$$

则

$$(\alpha, x, f) \sim (\beta, y, \tilde{f}).$$

因此 $x = y$, 且 $\tilde{f} = \Phi_{\beta\alpha}(x)(f)$. 故

$$\Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha(x, f) = (x, \Phi_{\beta\alpha}(x)(f)),$$

可见在平凡化 $(\pi^{-1}(U_\alpha), \Psi_\alpha^{-1})_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 下, 转移函数恰为 $\{\Phi_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}}$.

最后, E 的光滑结构由引理 2.4 对 $\Psi_\alpha^{-1}: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ 应用即得. $\square$

当标准纤维 F 上有群作用时, 我们可以得到一类更好的纤维丛, 称为 G -丛. 可以认为它是对转移函数附加了好的结构.

定义 2.6 (G -丛) 假设 G 是一个李群, (E, π, M, F) 是一个纤维丛. 我们称该纤维丛是一个 G -丛, 若下列条件成立

- (i) 李群 G 在 F 上有光滑左作用;
- (ii) (局部平凡化的等变性) 在纤维丛 (E, π, M, F) 的坐标图册 $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 下, 存在光滑映射 $\varphi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, 使得转移函数满足 $\Phi_{\alpha\beta}(x)(f) = \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot f$.

我们将上述 G -丛记作 $(E, \pi, M, F; G)$. 上述条件 (a)—(b) 称为纤维丛 (E, π, M, F) 上的一个 G -丛结构.

容易知道, $\{\varphi_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}}$ 也满足 cocycle 条件, 我们称其为 G -丛 $(E, \pi, M, F; G)$ 的转移函数. 同时定义中的坐标图册 $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 称为 G -坐标图册.

特别地, 若 F 是一个有限维线性空间 V , $G \subset \text{GL}(V)$ 则称 $(E, \pi, M, V; G)$ 是一个结构群为 G 的向量丛, 有时也简单的称为 G -向量丛.

完全类似地, 我们可以从转移函数构造出相应的 G -丛.

命题 2.7 (从转移函数构造 G -丛) 假设 M, F 是光滑流形, G 是一个光滑李群, 且 G 在 F 上有光滑的左作用. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 是 M 的一个开覆盖. 对任意的 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 其上定义了光滑函数 $\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$. 若它们满足 cocycle 条件(2.1), 则存在 G -丛 $(E, \pi, M, F; G)$ 使得其转移函数恰好是这些指定的函数簇.

证明 完全类似于从转移函数构造纤维丛, 若我们令 $\Phi_{\alpha\beta}(x)(f) := \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot f$, 则可构造出纤维丛 (E, π, M, F) , 使得在开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 作为开集的局部平凡化下其转移函数恰为 $\{\Phi_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}}$. 进而按照定义便知 G -丛中定义的第二个条件满足, 从而我们构造的纤维丛是 G -丛. $\square$

现在, 假设 $(E, \pi, M, F; G)$ 是一个 G -丛, $\tilde{F}$ 是一个流形且 G 在 $\tilde{F}$ 上有光滑的左作用. 由命题 2.7, 我们可以构造 G -丛 $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, M, \tilde{F}; G)$ 与 $(E, \pi, M, F; G)$ 具有相同的转移函数.

定义 2.8 (配丛) 我们称上述构造的 G -丛 $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, M, \tilde{F}; G)$ 为与 $(E, \pi, M, F; G)$ 相配的 G -丛. 有时简单地称 $\tilde{E}$ 为 E 的配丛.

有了 G -丛的概念, 很容易得到 G -主丛的定义.

定义 2.9 (G -主丛) 假设 P, M 是光滑流形, G 是一个李群. 称 G -丛 $(P, \pi, M, G; G)$ 为以 G 为结构群, M 为底流形, P 为全空间的 G -主丛, 如果其群作用恰是群的左乘变换. 此时, 我们记该 G -主丛为 $P(\pi, M, G)$ 或者 $P(M, G)$ 甚至 P .

李群 G 可以自由地右作用在主丛 $P(M, G)$ 的全空间 P 上. 事实上, 假设 $p = \Phi_\alpha^{-1}(x, a)$, 若定义右作用 $P \times G \rightarrow P$ 为 $p \cdot b := \Phi_\alpha^{-1}(x, ab)$. 为了验证其与平凡化的选取无关, 注意到, 若 $p = \Phi_\beta^{-1}(x, \tilde{a})$, 则

$$\begin{aligned} \Phi_\beta^{-1}(x, \tilde{a}b) &= \Phi_\alpha^{-1} \circ (\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(x, \tilde{a}b) = \Phi_\alpha^{-1}(x, \Phi_{\alpha\beta}(x)(\tilde{a}b)) \\ &= \Phi_\alpha^{-1}(x, \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot (\tilde{a}b)) = \Phi_\alpha^{-1}(x, (\varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot \tilde{a}) \cdot b) = \Phi_\alpha^{-1}(x, ab), \end{aligned}$$

最后一步是因为, $\Phi_\alpha^{-1}(x, a) = p = \Phi_\beta^{-1}(x, \tilde{a})$, 从而

$$(x, a) = \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x, \tilde{a}) = (x, \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot \tilde{a}).$$

该右作用还是自由的. 事实上, 假设存在 $p \in P, p = \Phi_\alpha(x, a)$, 使得 $p \cdot b = p$, 则

$$(x, a) = \Phi_\alpha(p) = \Phi_\alpha(p \cdot b) = (x, ab) \implies b = e,$$

其中 $e \in G$ 是单位元. 由此可见该右作用是自由的.

一般称该右作用为主丛 P 的主右作用(principal right action).

当隐函数定理可以使用时, 我们可以得到如下命题.

命题 2.10 ([31, Section 18.3, Lemma]) 假设 P, M 是光滑流形, G 是李群. 若 $\pi: P \rightarrow M$ 是一个到上的淹没, 且 G 自由地右作用在 P 上, 使得 $M = P/G$, 则 $P(\pi, M, G)$ 是一个 G -主丛.

回忆, 一个从光滑流形 P 到光滑流形 M 的光滑映射称为是淹没(submersion), 如果其切映射的秩处处为 $\dim M$.

由此, 我们容易得到 G -主丛如下的等价定义

定义 2.11 (G -主丛; [20, Chapter 1, Section 5, p. 50]) 假设 P, M 是光滑流形, G 是一个光滑李群. 我们称 $P(M, G, \pi)$ 为 M 上以 G 为结构群的**主丛**, 如果以下条件成立:

- (i) G 自由地右作用在 P 上;
- (ii) $M = P/G$, 其中等价关系由 $p_1 \sim p_2$ 当且仅当存在 $a \in G$, 使得 $p_2 = p_1 a$; 且自然投影映射 $\pi: P \rightarrow M$ 是光滑的;
- (iii) P 是局部平凡的, 即存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, 以及微分同胚 $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, 使得 $\Phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ 满足 $\Phi_\alpha(p) = (\pi(p), \varphi_\alpha(p))$, 且映射 $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow G$ 满足对所有的 $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, $a \in G$, 有 $\varphi_\alpha(p \cdot a) = \varphi_\alpha(p)a$.

上述定义中, P 称为**全空间**, M 称为**底空间**, G 称为**结构群**, π 称为**投影映射**.

在继续给出其它定义之前, 我们作如下

注记 (i) 上述定义中群的作用是自由的其实可以从局部平凡化推出;

(ii) $p \cdot G := \{p \cdot a | a \in G\} = \pi^{-1}(\pi(p))$, 从而任意 $x \in M$ 处的纤维 $\pi^{-1}(x) \cong G$;

(iii) 对任意的 $p \in \pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)$, 我们有 $\varphi_\beta(pa)\varphi_\alpha^{-1}(pa) = \varphi_\beta(p)\varphi_\alpha^{-1}(p)$. 因此, 我们可以定义映射

$$\varphi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G, \quad \varphi_{\alpha\beta}(\pi(p)) := \varphi_\beta(p)\varphi_\alpha^{-1}(p).$$

映射簇 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}}$ 统称为主丛 $P(M, G, \pi)$ 的**转移函数**.

(iv) 若定义包含映射 $i: \pi^{-1}(x) \rightarrow P$, 则 $i_*(T_p(\pi^{-1}(p))) \subset T_p P$ 称为 p 处的**纵空间**.

由**命题 2.7**我们可以利用转移函数局部地构造出给定 G -丛的配丛. 下面的方法给出了从 G -主丛构造配丛的另一种方式. 假设 $P(M, G)$ 是一个 G -主丛, F 是一个光滑流形. 又设 G 在 F 上有左作用. 现在我们考虑右作用

$$\begin{aligned} r: (P \times F) \times G &\rightarrow P \times F \\ ((p, f), a) &\mapsto (p \cdot a, a^{-1} \cdot f). \end{aligned}$$

若记 $P \times_G F$ 为该右作用下的轨道空间, 我们有以下

命题 2.12 (从主丛构造配丛; [31, Section 18.7, Theorem]) 在如上假设下, 下列结论成立

- (i) $P \times_G F$ 具有唯一的光滑结构, 使得商映射 $q: P \times F \rightarrow P \times_G F$ 是淹没 (submersion);
- (ii) 存在 $\bar{\pi}: P \times_G F \rightarrow M$, 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} P \times F & \xrightarrow{q} & P \times_G F \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ P & \xrightarrow{\pi} & M. \end{array}$$

而且若定义 $q_p := q(p, \cdot) \rightarrow (P \times_G F)|_{\pi(p)}$, 它还是一个微分同胚. 由此可以给出 $(P \times_G F, \pi, M, F; G)$ 的一个 G -丛结构. 我们称该 G -丛为在左作用 l 下主丛 P 的配丛;

- (iii) $(P \times F, q, P \times_G F, G; G)$ 也是一个主丛, 且其主右作用是 r ;
- (iv) 若 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ 是主丛的坐标图册, 其对应的转移函数是 $\varphi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, 则在左作用下, G -丛 $(P \times_G F, \bar{\pi}, M, F; G)$ 的转移函数也是 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}}$.

反过来, 其实我们有

命题 2.13 (主丛与配丛的对应; [31, Section 18.8, Corollary]) 假设 G 在 G -丛 $(E, \pi, M, F; G)$ 的标准纤维 F 的左作用记作 l , 并将 $(E, \pi, M, F; G)$ 的转移函数记作 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}}$, 则我们可以构造唯一的 G -主丛 $P(\pi, M, G)$ 使得由左作用 l 构造的配丛恰好是原来的 G -丛 $(E, \pi, M, F; G)$.

2.1.1 G -丛的一些重要的配丛

给定一个 G -丛, 当我们选取不同的 G 作用时, 从转移函数构造 G -丛的过程知, 可构造相应的与之相配的 G -丛.

首先来看线性作用, 它将给出与原 G -丛相配的 G -向量丛. 令 $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ 是李群 G (在线性空间 V 上) 的一个线性表示, 即 ρ 是从 G 到 $\text{Aut}(V) \cong \text{GL}(V)$ 的一个群同态. 从而, 群 G 在 V 上有自然的左作用, $G \times V \rightarrow V, (a, v) \mapsto \rho(a)v$. 这样, 给定一个 G -丛 $(E, \pi, M, F; G)$, 我们可以利用其转移函数以及群表示 ρ 得到与其相配的向量丛 $(E, \pi, M, V; G)$. 特别地, 当 G -丛是主丛 P 时, 将其配丛记作 $E := P \times_G V$. 今后, 在不至引起混淆时, 我们分别将主丛和与之相配的向量丛简记为 P 和 E .

当 $(E, \pi, M, V; G)$ 是一个 G -向量丛时, 我们知道此时 $G \subset \text{GL}(V)$. 因此 G 在 V 的自同构群 $\text{Aut}(V)$, 或者自同态群 $\text{End}(V)$ 上有共轭作用 $a, c_A(B) = ABA^{-1}$,

这里 $A \in G \subset \text{GL}(V) \cong \text{Aut}(V)$, $B \in \text{Aut}(V) \subset \text{End}(V)$. 利用共轭作用, 我们得到的与之相伴的 G -丛分别记为 $\text{Aut}(E)$ 与 $\text{End}(E)$, 称为 G -向量丛 E 的**自同构丛**与**自同态丛**.

一类重要的线性表示是 G 在其李代数 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示 Ad . 假设 G 的共轭记作 $\mathcal{C}_a: G \rightarrow G$, $\mathcal{C}_a(b) = aba^{-1}$, 其在单位元 e 处的切映射 $d\mathcal{C}_a(e): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 记作 $\text{Ad}(a)$, 容易验证 $a \mapsto \text{Ad}(a)$ 是 G 到 $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ 的一个同态, 从而给出了 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的一个线性表示, 称为伴随表示, 记作 Ad . 给定 G -丛 $(E, \pi, M, F; G)$, 其在伴随表示下的配丛记作 $\mathfrak{g}_E$, $\text{Ad}(E)$ 或者 $E \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$.

其次, 来看非线性表示 (作用). 给定 G -丛 $(E, \pi, M, F; G)$, 利用群 G 在其自身的共轭作用 $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}: G \times G \rightarrow G$, $\mathcal{C}(a, b) = aba^{-1} = \mathcal{C}_a(b)$, 我们可得到与之相配的 G -丛, 记作 $\text{Aut}_G(E)$ 或者 $E \times_{\mathcal{C}} G$, 称为**规范变换丛**. $\text{Aut}_G(E)$ 的截面称为**规范变换**, 全体规范变换构成一个群, 称为**规范变换群**, 记作 $\mathcal{G}$. 特别地, 当 E 是 G -向量丛时, $\text{Aut}_G(E)$ 是 $\text{Aut}(E)$ 以及 $\text{End}(E)$ 的子丛, 即纤维是 $\text{Aut}(V)$ 以及 $\text{End}(V)$ 的子群, 而且转移函数落在 $G \subset \text{Aut}(V)$.

2.1.2 典型例子: 向量丛及其标架丛

我们将证明, 向量丛 E 和其标架丛 $F(E)$ 是相配的丛.

假设 M 是一个拓扑空间, E 是 M 上一秩为 n 的向量丛. 我们称向量空间 E_x 的一个有序基为 x 处的一个标架. 等价地, 通过取给定标架下的坐标, 我们可将一个标架视为如下的线性同构

$$p: \mathbb{R}^n \rightarrow E_x.$$

记 F_x 为 x 处的标架全体所成的集合. 明显地, 一般线性群 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ 可以右作用在 F_x 上: 对任何 $g \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, 定义右作用为

$$p \cdot g := p \circ g: \mathbb{R}^n \rightarrow E_x.$$

容易验证, 该右作用是自由的也是可迁的. 从而, 作为拓扑空间, F_x 与 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ 同胚, 但是应该注意, F_x 本身没有群结构, 这是因为上述同胚映射并不是自然的, 即 F_x 上没有自然的标架.

E 的**标架丛**, 记为 $F(E)$, 作为集合定义为所有标架的无交并:

$$F(E) = \bigsqcup_{x \in M} F_x.$$

$F(E)$ 的每个元素由 (x, p) 表示, 其中 p 为 $x \in M$ 处的一个标架. 为了说明 $F(E)$ 是一个主丛, 我们定义自然投射 $\pi: F(E) \rightarrow M$, $(x, p) \mapsto x$. 以及 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ 的右作用 $(x, p) \cdot g := (x, p \circ g)$. 容易看出, 该右作用是自由的, 而且其轨道恰好是 $\pi^{-1}(x)$.

最后, 我们来定义其拓扑结构和丛结构. 令 (U_α, ϕ_α) 是 E 的局部平凡化. 则对任何 $x \in U_\alpha$, 我们有线性同构 $\phi_{\alpha,x} := \phi_\alpha|_x: E_x \rightarrow \mathbb{R}^n$. 由此, 我们可以定义

$$\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \psi_\alpha(x, p) = (x, \phi_{\alpha,x} \circ p).$$

我们规定 $F(E)$ 上的开集为 $\pi^{-1}(U_\alpha)$. 自此, 我们可以验证 $F(E)$ 是 M 上一个以 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 为结构群, 以 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 为局部平凡化的主丛. 而且 $F(E)$ 的转移函数和 E 的转移函数一致. 此外, 当 E 是光滑向量丛时, $F(E)$ 也是光滑的 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 主丛.

事实上, 按照纤维丛转移函数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ 的定义, 若记 $q = \phi_{\beta,x} \circ p$, 则

$$(x, \psi_{\alpha\beta}(x)(q)) := \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, q) = \psi_\alpha(x, p) = (x, \phi_{\alpha,x} \circ p) = (x, \phi_{\alpha,x} \circ \phi_{\beta,x}^{-1} \circ q),$$

可见 $\psi_{\alpha\beta}(x) = \phi_{\alpha,x} \circ \phi_{\beta,x}^{-1} = \phi_{\alpha\beta}(x)$, 这即验证了转移函数是一致的.

2.2 Ehresmann 联络与曲率

一般纤维丛上的联络, 它一般称为 Ehresmann 联络. Ehresmann 将向量丛上的联络定义中的微分算子完全丢掉, 只利用平行性提出联络的公理化. 而且它保留了向量丛上联络 (共变微分) 的主要特性: 平行移动, 曲率, 和乐群. 一般而言, 联络有好几种等价定义. 下面我们按照联络 1-形式, 水平分布, 平行移动的顺序来讨论.

2.2.1 纤维丛上的联络

假设 (E, π, M, F) 是一个纤维丛, 考察 $\pi_*: TE \rightarrow TM$, 其核 $\ker \pi_* := E^\perp$ 称为 E 的垂直切丛 (vertical bundle). 由于 $\pi_*|_p: T_p E \rightarrow T_{\pi(p)} M$ 是到上的线性映射, 且 $E_p^\perp = \ker \pi_*|_p$, 故由同态基本定理知 $T_p E / \ker \pi_*|_p \cong T_p M$, 特别地 $\dim T_p E = \dim E_p^\perp + \dim M$.

定义 2.14 (纤维丛的联络 1-形式) 假设 (E, π, M, F) 是一个纤维丛, 其上的一个联络 1-形式是 E 上一取值于 $E^\perp$ 的光滑 1-形式 $v \in \Omega_E^1(E^\perp)$, 若视 $v: TE \rightarrow E^\perp$, 则要求它是一个投影映射, 即

$$v \circ v = v, \quad \mathrm{Im} v = E^\perp.$$

有了联络 1-形式的概念, 很容易得到曲率

定义 2.15 (曲率) 假设 v 是纤维丛 (E, π, M, F) 上的联络 1-形式, 定义该联络的曲率为

$$\mathcal{R}(v) := \frac{1}{2}[v, v] \in \Omega_E^2(E^\perp),$$

其中, $[\cdot, \cdot]$ 是 Frölicher-Nijenhuis 括号积, 即

$$\mathcal{R}(v)(X, Y) = v([(Id - v)X, (Id - v)Y]), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TE).$$

由于 v 是常秩的 (回忆 $v|_p: T_p E \rightarrow E_p^\perp \subset T_p E$ 是线性映射, 则由线性代数中的秩-零化度定理 (rank-nullity theorem) 知 $\dim T_p E = \dim \ker v|_p + \dim \operatorname{Im} v|_p$, 从而 $\dim \ker v = \dim M$), $E^\top := \ker v$ 是 TE 的一个子向量丛, 它称为**水平切丛**. 由投影映射的基本性质知

$$TE = E^\top \oplus E^\perp, \quad T_p E = E_p^\top \oplus E_p^\perp, \quad \forall p \in E.$$

由此, 我们得到联络的水平分布定义

定义 2.16 纤维丛 E 上的联络是 TE 的一个光滑子丛 H , 它满足

- (i) 对任意的 $p \in E$, $H_p \subset T_p E$ 是一个子向量空间, 称为 p 处的水平子空间;
- (ii) H_p 光滑依赖于 p ;
- (iii) 对任意的 $p \in E$, $T_p E = E_p^\perp \oplus H_p$, 即 $E_p^\perp \cap H_p = \{0\}$, 且 $T_p E = E_p^\perp + H_p$.

我们称满足 (a)-(c) 的子丛 H 为联络的**水平子丛**, 有时也称 H 为**水平分布**.

利用维数相等知 $\pi_*|_p$ 作为线性映射, 给出了 $E_p^\top$ 到 $T_p M$ 的同构. 利用该同构可以得到切向量水平提升的概念.

定义 2.17 (水平提升) 假设 E 是 M 上一个纤维丛.

- 称一个切向量场 $\tilde{X} \in \Gamma(TE)$ 为**水平向量场**, 如果 $\tilde{X}_p \in E_p^\top, \forall p \in E$.
- E 中一条曲线称为是**水平曲线**, 如果其切向量场是沿着曲线的一个水平向量场.
- 对给定的 $p \in E$, 以及 $X \in T_{\pi(p)} M$, 我们称 $\tilde{X} \in T_p E$ 为 X 的**水平提升向量** (horizontal lifting), 如果 $\pi_*|_p(\tilde{X}) = X$. 因为 $\pi_*|_p$ 是 $E_p^\top \rightarrow T_{\pi(p)} M$ 的同构, 我们知道水平提升向量是存在唯一的.
- 给定 M 中一条曲线 $\gamma(t)$, 称 E 中的曲线 $\tilde{\gamma}(t)$ 是 γ 的**提升曲线**, 如果 $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.
- 曲线 γ 在 E 中的提升曲线 $\tilde{\gamma}$ 若是水平的, 则称为 γ 的**水平提升曲线**.

给定联络一形式, 利用一阶常微分方程组的存在唯一性定理 (Picard-Lindelöf theorem), 水平提升曲线是存在唯一的.

命题 2.18 ([47, Chapter 8, Proposition 7, p. 363-364]) 假设 (E, π, M, F) 是一个纤维丛, v 是其上的联络 1-形式. 给定 $x \in M$ 以及 M 中的曲线 $\gamma(t)$, $\gamma(0) = x$, 对任何 $p \in E$, 满足 $\pi(p) = x$, 存在充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得在 $t \in [0, \varepsilon]$ 上存在唯一的水平提升曲线 $\tilde{\gamma}(t)$, 满足 $\tilde{\gamma}(0) = p$.

下面我们来看沿着逐段光滑曲线 $\gamma(t)$ 的平行移动.

定义 2.19 ([36]) 假设 (E, π, M, F) 是纤维丛, $\mathcal{L}$ 是 M 上逐段光滑曲线所成的集合. 给定连接 x_0 与 x_1 的曲线 $\gamma_{01} := \gamma(t) \in \mathcal{L}$, $t \in [x_0, x_1]$, 定义沿着 γ_{01} 的平行移动是从 $E_1 \rightarrow E_0$ 的微分同胚 $\mathcal{P}(\gamma_{01})$, 其中 $E_i := \pi^{-1}(x_i)$, 且满足以下公理

(i) 对另一曲线 γ_{12} , 定义 $\gamma_{02} := \gamma_{01}\gamma_{12}$, 有

$$\mathcal{P}(\gamma_{02}) = \mathcal{P}(\gamma_{01}) \circ \mathcal{P}(\gamma_{12});$$

(ii) 对 γ_{01} 的反向曲线 γ_{10} , 有

$$\mathcal{P}(\gamma_{10}) = \mathcal{P}^{-1}(\gamma_{01});$$

(iii) $\mathcal{P}(\alpha\gamma)$ “光滑” 的依赖于 $\alpha\gamma$ 及其端点.

按照上述定义, 给定联络时, 利用曲线的水平提升, 容易得到沿该曲线的平行移动. 具体地, 假设 $\alpha\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, 是 M 中连接 x_0, x_1 的一条曲线, 由命题 2.18, 对任意的 $p \in E_{x_1}$, 存在唯一的水平提升曲线 $\tilde{\alpha}\gamma(t)$, $t \in [a, b]$. 则定义 $\mathcal{P}(\alpha\gamma_{01})(p) = \tilde{\alpha}\gamma(b)$.

当纤维 F 还具有其他结构时, 例如群作用, 线性空间等, 我们还需要平行移动保持这种结构. 这种保持是通过平行移动在如下的局部平凡化下的表现来刻画的. 对任一局部平凡化 $\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, 以及任一曲线 $\gamma_{01} \subset U$, 若令 $\Phi_i := \Phi|_{\pi^{-1}(x_i)}$, 定义微分同胚 $\tau_{01} := \Phi_0 \circ \mathcal{P}(\gamma_{01}) \circ \Phi_1^{-1}: (x_1, F) \rightarrow (x_0, F)$. 所有 F 上的结构, 我们都通过 τ_{01} 来搬到丛上. 例如, F 有线性结构, 则要求 τ_{01} 是线性变换. F 有群作用 ρ 时, 要求 $\tau_{01} \circ \rho = \rho \circ \tau_{01}$.

2.2.2 G -丛的联络及其局部表示

尽管我们可以讨论一般纤维丛上的联络 (Ehresmann connection), 但是本文主要用到的还是 G -丛上的联络. 由前面的讨论知道, 给定 G -丛, 可以构造出与之相伴的 G -主丛; 此外, 任何与之相配的 G -丛都是与该 G -主丛相配的 G -丛. 因此, 我们首先讨论 G -主丛上的联络, 然后再讨论与之相配的 G -丛的联络, 最后讨论特殊的 G -向量丛上的联络.

定义 2.20 假设 $P(M, G)$ 是一个 G -主丛, R_a 是主丛 P 上的主右作用. P 上一个 Ehresmann 联络 v 称为是主联络, 若 v 作为纤维丛的投影 $TP \rightarrow P^\perp$, 当视为 P 上取值于 $P^\perp$ 的 1-形式时, 关于主右作用是 G 等变的. 即, 对任意的 $p \in P$ 以及任意的 $X \in T_p P$,

$$v_{R_a(p)}(R_{a*}|_p X) = R_{a*}|_p(v|_p(X)). \quad (2.2)$$

上述条件有时也称为 v 是 R_a 自相关的 (R_a -related).

特别地,

$$\begin{aligned} R_{p*}^{-1}|_{e \circ v}: T_p E &\rightarrow \mathfrak{g}, \\ X_p &\mapsto \omega(X_p) := R_{p*}^{-1}|_{e \circ v}(X_p), \end{aligned}$$

定义了 P 上 $\mathfrak{g}$ -值的 1-形式 ω , 其中 $e \in G$ 是单位元, $R_p(a) := R_a(p)$, 称 ω 为联络 v 的李代数值的联络 1-形式.

假设 $P(M, G)$ 是一个主丛, $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数. 对任意的 $X \in \mathfrak{g}$, 以及 $p \in P$, 定义基本向量场 $X^\sharp(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \cdot \exp(tX) = R_{p*}|_e(X)$, 这里的右作用是 G 在 P 上的主右作用. 在这里, 我们引用关于基本向量场的基本事实, 其证明可参考 [47, Chapter 8]

命题 2.21 ([47, Chapter 8, Proposition 2, p. 352-353]) 假设 R_a 是主丛 $P(M, G)$ 的主右作用, 则关于基本向量场有

$$R_{a*}|_p(X^\sharp(p)) = (\text{Ad}(a^{-1})X)(R_a(p)), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

利用基向量场, 我们可以从李代数值的联络 1-形式 ω 得到主联络 v .

命题 2.22 ([31, Section 19.1, Lemma, p. 229]) 假设 $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ 是主联络对应的李代数值的 1-形式. 则有

(i)

$$\omega(X^\sharp(p)) = X, \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

它表明, ω 可以从基向量场重新得到该向量场的生成元;

(ii)

$$(R_a^* \omega)(X_p) = \omega(R_{a*}|_p(X_p)) = \text{Ad}(a^{-1})(\omega(X_p)), \quad \forall a \in G, X_p \in T_p P,$$

即 ω 是 G 等变的.

反过来, 假设 $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ 满足 G 等变性, 则由

$$v(X_p) := R_{p*}|_e(\omega(X_p)),$$

定义的 v 给出了主丛 P 上一联络.

若用水平分布的概念, 我们可以将联络定义如下

定义 2.23 假设 $P(M, G)$ 是一个 G -主丛, 其上一个 (Ehresmann) 联络 H 称为 P 上一个**主联络** (principal Ehresmann connection), 如果 H 作为 P 的水平切丛关于 G 的主右作用是不变的, 即

$$H|_{p \cdot a} = R_{a*}|_p(H_p), \quad \forall p \in P, a \in G,$$

这里 R_a 是主丛 P 上的主右作用.

可以直接验证, 由主联络定义的水平分布满足上述等变性.

同样, 我们可以利用平行移动来定义主联络.

定义 2.24 假设 $\mathcal{P}$ 是主丛 $P(M, G)$ 作为纤维丛的平行移动, 我们称 $\mathcal{P}$ 是**主平行移动**, 若由连接 $x_0, x_1 \in M$ 的曲线 γ_{01} 以及局部平凡化 $\Phi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$, $U_i \ni x_i, i = 0, 1$, 定义的分同胚

$$\tau_{01} = \Phi_0 \circ \mathcal{P}(\alpha \gamma_{01}) \circ \Phi_1^{-1}: (x_1, G) \rightarrow (x_0, G),$$

满足

- (i) 存在 $a_{01} \in G$, 使得 $\tau_{01}(x_1, b) = (x_0, a_{01} \cdot b), \forall b \in G$;
- (ii) 视 x_1 为动点时, 上述 a_{01} 关于 x_1 (作为曲线的弧长参数) 是 G 上一逐段光滑曲线, 且在 $x_1 = x_0$ 时, $a_{01} = e$ 为 G 中单位元. 此外, M 中在 x_0 处两条具有相同切向量 X 的曲线, 由 τ 定义了 G 上在 e 处相切的两条曲线, 记其切向量为 $\theta(x_0, X) \in \mathfrak{g}$, 我们要求 $\theta(x_0, X)$ 关于 x_0, X 光滑.

同样可以验证, 由主联络的水平提升定义的平行移动是主平行移动.

可以证明 G -主丛上存在主联络 (要求底流形是仿紧的 (paracompact)) [31, Section 17.9, Theorem].

下面, 我们来看主联络的局部表示. 假设 $P(\pi, M, G)$ 是一个主丛, $\{\Phi_\alpha, U_\alpha\}$, $\Phi_\alpha: P|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times G$ 是其局部平凡化并记其转移函数为 $\Phi_{\alpha\beta}$. 定义局部截面 $s_\alpha \in \Gamma(P|_{U_\alpha})$, $\Phi_\alpha(s_\alpha(x)) = (x, e)$. 则可以验证 $s_\alpha \cdot \Phi_{\alpha\beta} = s_\beta$. 事实上, $\Phi_\alpha(s_\beta(x)) = \Phi_\alpha \Phi_\beta^{-1}(x, e) = (x, \Phi_{\alpha\beta}(x))$, 因此 $s_\beta(x) = \Phi_\alpha^{-1}(x, e \cdot \Phi_{\alpha\beta}(x)) = \Phi_\alpha^{-1}(x, e) \Phi_{\alpha\beta}(x) = s_\alpha(x) \Phi_{\alpha\beta}(x)$. 利用 $\{s_\alpha\}$, 我们可以得到联络的活动标架表示 (Cartan moving frame version).

命题 2.25 ([31, Section 19.4, Lemma]) 假设 v 是 $P(M, G)$ 上一主联络, ω 是其对应的 $\mathfrak{g}$ 值的联络 1 形式. 定义

$$\omega_\alpha := s_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g}).$$

则

$$\omega_\alpha = \text{Ad}(\Phi_{\beta\alpha}^{-1})\omega_\beta + \Theta_{\beta\alpha},$$

其中 $\Theta \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ 定义为 $\Theta(X) := [L_{a^{-1}}]_*|_a X$, $X \in T_a G$, 这里 L 表示李群的左乘. Θ 称为左 Maurer-Cartan 形式. 并记 $\Theta_{\alpha\beta} := \Phi_{\alpha\beta}^* \Theta \in \Omega^1(U_{\alpha\beta}, \mathfrak{g})$.

注记 一般地, 我们称李群 G 上左不变的 1 形式为 Maurer-Cartan 形式, 它们可由单位元处的一形式通过 $L_{a^{-1}}^*$ 拉回而生成, 故其全体是一个 $\dim G$ 维的线性空间. 容易验证上述定义的 Θ 是左不变的 1 形式. 当 G 嵌入到一般线性群 GL , 一种常见的左不变 1 形式是如下的矩阵值的 1 形式

$$\omega(a) := a^{-1} da, \quad \omega_{ij}(a) = a^{ik} da_{kj}.$$

事实上

$$[L_{a_0^{-1}}^* \omega](a_0^{-1} a) = (a_0^{-1} a)^{-1} d(a_0^{-1} a) = a^{-1} a_0 a_0^{-1} da = a^{-1} da = \omega(a), \quad \forall a_0 \in G.$$

证明 事实上, 按照定义我们知道 $s_\alpha(x) = s_\beta(x) \Phi_{\beta\alpha}(x) = R_a(s_\beta(x))$. 其中 $a = \Phi_{\beta\alpha}(p) \in G$, $R_a(\cdot) = R(\cdot, a)$ 是主右作用. 为记号方便, 令 $p = s_\alpha(x)$, $q = s_\beta(x)$. 直接计算有, 对 $\xi_x \in TU_\alpha$,

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(\xi_x) &= \omega(s_{\alpha*}|_x \xi_x) = \omega(R_{*}|_{(q,a)}((s_{\beta*}|_x \xi_x, 0_a) + (0_q, \Phi_{\beta\alpha*}|_x \xi_x))) \\ &= \omega([R(\cdot, a)]_* s_{\beta*}|_x \xi_x) + \omega([R(q, \cdot)]_*|_a [\Phi_{\beta\alpha}]_*|_x \xi_x) \\ &= \text{Ad}(a^{-1})(\omega(s_{\beta*}|_x \xi_x)) + \omega([R(q, \cdot)]_*|_a [L_a \circ L_{a^{-1}}]_* [\Phi_{\beta\alpha}]_*|_x \xi_x) \\ &= \text{Ad}(a^{-1})(\omega_\beta(\xi_x)) + \omega([R(q, \cdot)]_*|_a L_{a*} \Theta_{\beta\alpha}(\xi_x)) \end{aligned}$$

这里我们应用了命题 2.21 以及 Θ 的定义,

$$L_{a^{-1}*}[\Phi_{\beta\alpha}]_*|_x(\xi_x) = \Theta_{\beta\alpha}(\xi_x) \in \mathfrak{g}.$$

现在

$$[R(q, \cdot)]_*|_a L_{a*}|_e = [R(qa, \cdot)]_*|_e.$$

由于 v 是主联络, 由命题 2.22(i) 知

$$\omega(R(qa, \cdot)_* X) = \omega(X^\sharp) = X, \quad X = \Theta_{\beta\alpha}(\xi_x) \in \mathfrak{g}.$$

□

2.2.3 主联络的共变外微分

假设 $P(\pi, M, G)$ 是一个主丛, 其联络记为 v . 考察水平投影映射

$$\chi := \text{Id}_{TP} - v: TP \rightarrow TP,$$

容易验证它满足如下性质

$$\chi \circ \chi = \chi, \quad \text{Im } \chi = P^\top, \quad \ker \chi = P^\perp,$$

且由(2.2), 对任何 $g \in G$,

$$\chi \circ (R_g)_* = (R_g)_* \circ \chi.$$

现在, 假设 W 是一个有限维向量空间 (例如李代数 $\mathfrak{g}$), 定义 $\chi^*: \Omega(P; W) \rightarrow \Omega(P; W)$, 这里 $\Omega(P; W)$ 表示取值在 W 中的 P 上的微分形式全体,

$$(\chi^* \phi)_p(X_1, \dots, X_k) = \phi_p(\chi(X_1), \dots, \chi(X_k)), \quad \phi \in \Omega^k(P; W), X_1, \dots, X_k \in T_p P.$$

定义 2.26 若 ω 为联络 v 对应的取值在李代数 $\mathfrak{g}$ 的联络 1 形式, 则**共变外微分** d_ω 定义为

$$d_\omega: \Omega^k(P; W) \rightarrow \Omega^{k+1}(P; W), \quad d_\omega := \chi^* \circ d.$$

可以证明共变外微分的如下基本性质.

命题 2.27 ([31, Section 19.5, Theorem]) 假设 d_ω 定义如上, 则

- (i) $d_\omega(\phi \wedge \psi) = d_\omega(\phi) \wedge \chi^* \psi + (-1)^{\deg \phi} \chi^* \phi \wedge d_\omega(\psi)$, 其中 ϕ, ψ 是取值于 $\mathbb{R}$ 的实形式;
- (ii) $d_\omega \omega = \mathcal{Q}$ 是 $\mathfrak{g}$ 值的曲率 2 形式; 回忆曲率 $\mathcal{R}(v)$ 取值在 $E^\perp$ 中, 我们可以定义联络 v 的李代数值的 2 形式 $\mathcal{Q} \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$ 如下

$$\mathcal{Q}(X_p, Y_p) := -(R_p^{-1})_*|_e \mathcal{R}(v)(X_p, Y_p).$$

- (iii) $d_\omega \mathcal{Q} = 0$, 即**Bianchi 恒等式**;
- (iv) $d_\omega \circ d_\omega = \chi^* \circ i(\mathcal{R}(v)) \circ d$, 其中 $i(\mathcal{R}(v))$ 是由曲率 $\mathcal{R}(v) \in \Omega^2(P; P^\perp)$ 决定的**分次代数导数**(algebraic graded derivation), 其定义可以参考 [31, Section 16.2, Theorem].

2.2.4 主联络在配丛上的诱导联络

假设 $P(\pi, M, G)$ 是一个主丛, 其右作用记为 $r: P \times G \rightarrow P$, 假设 $l: G \times F \rightarrow F$ 是其结构群 G 在光滑流形 F 上的一个左作用. 由**命题 2.12**我们知道可以构造配

丛 $P[F] = P[F, l] = P \times_G F$. 若 $v \in \Omega^1(P, P^\perp)$ 是主丛 P 的主联络. 配丛 $P[F]$ 的联络 $\bar{v}$ 由下列交换图定义

$$\begin{array}{ccccc} TP \times TF & \xrightarrow{v \times \text{Id}} & TP \times TF & \xlongequal{\quad} & T(P \times F) \\ q_* \downarrow & & q_* \downarrow & & q_* \downarrow \\ TP \times_{TG} TF & \xrightarrow{\bar{v}} & TP \times_{TG} TF & \xlongequal{\quad} & T(P \times_G F). \end{array}$$

其中, $q: P \times F \rightarrow P \times_G F$ 是商映射, TG 为 G 的切丛, 它是一个李群¹. 而且, $TP \times_{TG} TF = P[F]^\top$ 为配丛的水平切丛, $P \times_G TF = P[F]^\perp$ 为配丛的垂直切丛. 可以验证, $v \times \text{Id}$ 是 TG 不变的, 而且 $\bar{v}$ 确实是一个投影映射. 而且 $\bar{v}$ 限制在每条纤维上是线性的, $\text{Im } \bar{v} = P[F]^\perp$. 这说明 $\bar{v}$ 确实是一个联络.

2.2.5 主联络在配向量丛上的诱导联络

假设 $P(\pi, M, G)$ 是一个主丛, $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ 是结构群 G 在线性空间 V 上的一个表示 (即 ρ 是群同态). 考察与主丛 P 相配的向量丛 $(E := P[V, \rho], \pi, M; V)$. 可以证明 $T(E) := TP \times_{TG} TV$ 有两个向量丛结构, 它们的投射分别为

$$\pi_E: T(E) \rightarrow P \times_G V = E, \quad \pi_* \circ \text{pr}_1: T(E) \rightarrow TM.$$

现在, 对 P 上的主联络 $v \in \Omega^1(P; P^\perp)$, 按照第 2.2.4 小节定义诱导联络 $\bar{v} \in \Omega^1(E; E^\perp)$. 容易验证, 上述诱导联络关于如上提及的向量丛上的两个丛结构都是线性的. 从而称为配丛 E 上的线性联络.

2.2.6 向量丛的共变微分

假设 (E, π, M) 是一个向量丛, $\bar{v}$ 是 E 的一个线性联络. 记 $\text{vl}_E: E \times_{(\pi_E, M, \pi_E)} E^2 \rightarrow E^\perp$, $\text{vl}_E(\xi_p, \eta_p) := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\xi_x + t\eta_x)$ 为垂直提升. 假设 $s: N \rightarrow E$ 是从光滑流形 N 到 E 的光滑映射, $X \in \Gamma(TN)$ 是切向量场, 定义 s 沿着 X 的共变微分为

$$\nabla_X s := \text{pr}_2 \circ \text{vl}_E^{-1} \circ \bar{v} \circ s_* \circ X.$$

¹假设 μ 为李群 G 中的乘法, ν 为李群 G 中的逆, 定义 μ_a 为左乘 a , μ^b 为右乘 b . 则 TG 的乘法为 μ_* , $\mu_*|_{a,b}(\xi_a, \xi_b) = (\mu^b)_*|_a \xi_a + (\mu_a)_*|_b \xi_b$. 由此, 易知 TG 的逆为 ν_* , $\nu_*|_a \xi_a = -(\mu_{a^{-1}})_*|_e (\mu^{a^{-1}})_*|_a \xi_a$.

²我们称流形间的两个映射 $f_i: M_i \rightarrow N$ 是横截的如果对任何 $y \in N$, 有

$$f_1(x_1) = y = f_2(x_2) \implies \text{Im}(f_{1*}|_{x_1}) + \text{Im}(f_{2*}|_{x_2}) = T_y N.$$

可以证明此时, 拉回拓扑空间

$$M_1 \times_{(f_1, N, f_2)} := \{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 | f_1(x_1) = f_2(x_2)\},$$

是 $M_1 \times M_2$ 的子流形. 进一步地, 我们可以验证它是一个纤维丛, 其中丛结构由万有覆盖性质决定.

特别地, 假设 $f: N \rightarrow M$ 是一个固定的光滑映射. 记 $C_f^\infty(N, E)$ 为 E 中沿着 f 的向量场, 即所有的光滑映射 $s: N \rightarrow E$, 使得 $\pi_E \circ s = f$. 则 $C_f^\infty(N, E)$ 和拉回丛 f^*E 的截面是线性同构的. 而此时共变微分可以视作

$$\nabla: \Gamma(TN) \times C_f^\infty(N, E) \rightarrow C_f^\infty(N, E)$$

的双线性映射. 容易验证共变微分满足如下的基本性质, 其证明请参考 [31, Section 19.12, Lemma].

- (i) $\nabla_X s$ 是 $C^\infty(N)$ 线性的. 特别地, 对 $X_x \in T_x N$, 可以定义 $\nabla_{X_x} s: C_f^\infty(N, E) \rightarrow E_{f(x)}$ 为 $\nabla_{X_x} s := (\nabla_X s)(x)$;
- (ii) $\nabla_X s$ 关于 $s \in C_f^\infty(N, E)$ 是 $\mathbb{R}$ -线性的;
- (iii) ∇_X 具有导性, 即

$$\nabla_X(hs) = dh(X)s + h\nabla_X s, \quad \forall h \in C^\infty(N);$$

- (iv) 假设 $h: H \rightarrow N$ 是光滑流形间的映射, 则对 $Y_y \in T_y H$, 有

$$\nabla_{h_* Y_y} s = \nabla_{Y_y}(s \circ h).$$

若 $Y \in \Gamma(TH)$, $X \in \Gamma(TN)$ 是 h -相关的, 则

$$\nabla_Y(s \circ h) = (\nabla_X s) \circ h.$$

2.2.7 向量丛的共变外微分

假设 (E, π, M) 是一个向量丛, ∇ 是它的一个共变微分. 对光滑映照 $f: N \rightarrow M$, 令 $\Omega(N, f^*E)$ 为取值在 f^*E 中的 N 上的微分形式全体. 我们也可将其视为 N 上取值为 E 中沿着 f 的向量场. 可以验证 $\Omega(N, f^*E)$ 为一个分次 $\Omega(N)$ -模.

定义 2.28 假设 $X_i \in \Gamma(TN)$, E, ∇ 如上. 则定义 $d_\nabla: \Omega^p(N, f^*E) \rightarrow \Omega^{p+1}(N, f^*E)$ 为

$$\begin{aligned} (d_\nabla \eta)(X_0, \dots, X_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \nabla_{X_i} \eta(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \eta([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p). \end{aligned}$$

我们称其为共变外微分.

可以证明, 如上定义的向量丛的共变外微分满足

命题 2.29 ([31, Section 19.13, Lemma]) (i) 对任何 $s \in \Omega^0(N, f^*E)$, 有

$$(d_{\nabla}s)(X) = \nabla_X s;$$

$$(ii) \quad d_{\nabla}(\phi \wedge \eta) = d\phi \wedge \eta + (-1)^{\deg \phi} \phi \wedge d_{\nabla}\eta;$$

$$(iii) \quad \text{对光滑函数 } h: H \rightarrow N, \text{ 以及 } \eta \in \Omega(N, f^*E), \text{ 有 } d_{\nabla}(h^*\eta) = h^*(d_{\nabla}\eta).$$

我们继续给出关于向量丛的一些基本的定义以及事实. 假设 E 是 M 上一个具有度量的 G -向量丛, 其上有共变微分 ∇ . 我们称 ∇ 是**度量相容**的, 如果

$$d\langle \sigma, \eta \rangle = \langle \nabla \sigma, \eta \rangle + \langle \sigma, \nabla \eta \rangle, \quad \forall \sigma, \eta \in \Gamma(E).$$

定义共变外微分 d_{∇} 的**形式伴随**为

$$d_{\nabla}^*(\sigma \otimes \eta) := (-1)^{k \dim M + 1} * d_{\nabla} * (\sigma \otimes \eta), \quad \sigma \in \Gamma(E), \eta \in \Omega_M^k(TM),$$

其中 $*$ 是**Hodge 星算子**. $\Omega^k(E)$ 上的**整体内积**定义为

$$(\sigma \otimes \eta, \sigma' \otimes \eta') := \int_M \langle \sigma \otimes \eta, \sigma' \otimes \eta' \rangle * 1 = \int_M \langle \sigma, \sigma' \rangle \langle \eta, \eta' \rangle * 1 = \int_M \langle \sigma, \sigma' \rangle \eta \wedge * \eta'.$$

关于 d_{∇} 与 d_{∇}^* , 我们需要如下分部积分公式的简单形式, 对 $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E)$ 以及 $\eta \in \Omega_M^1(TM)$,

$$\int_{\partial M} \langle \sigma, \nu \lrcorner (\sigma' \otimes \eta) \rangle i_{\nu}(*1) = (d_{\nabla}\sigma, \sigma' \otimes \eta) - (\sigma, d_{\nabla}^*(\sigma' \otimes \eta)), \quad (2.3)$$

其中 ν 是 ∂M 的单位外法向, $i_{\nu}(*1)$ 是 ∂M 上关于诱导定向的体积形式. 为了简单起见, 在不至混淆的情况下, 我们将不区分 ∇ 与 d_{∇} 以及 ∇^* 与 d_{∇}^* .

假设 $\text{Aut}_G E$ 是 E 的规范变换丛, $\mathfrak{g}_E$ 是 E 的李代数丛. 我们知道存在逐点定义的**指数映照** $\exp: \Gamma(\mathfrak{g}_E) \rightarrow \Gamma(\text{Aut}_G E)$. $\text{Aut}_G E$ 和 $\mathfrak{g}_E$ 作为 $\text{End}(E)$ 的子丛, 有如下的诱导联络

$$(\nabla S)(\sigma) := \nabla(S\sigma) - (-1)^k S \wedge \nabla \sigma, \quad \sigma \in \Gamma(E), S \in \Omega_M^k(\text{End}(E)),$$

其中我们将 $S \in \Gamma(\text{Aut}_G E)$ 视作 $\text{End}(E)$ 的子丛.

我们通过下标 ∇_A, ∇_{A_0} 来区分不同的联络, 有时也简单的称 A, A_0 为联络规范变换 $S \in \Gamma(\text{Aut}_G E)$ 可以通过“拉回”作用在联络 A 上

$$\nabla_{S^*(A)}(\cdot) = S^{-1} \nabla_A(S(\cdot)),$$

即

$$S^*(A) = A + S^{-1} \nabla_A S.$$

2.3 Sobolev 空间与 Hölder 空间

为了本文的需要, 我们需将关于函数的 Sobolev 空间与 Hölder 空间推广到向量丛的截面的情形.

假设 M 是一个黎曼流形, 除非特别说明, 在本节中 M 不一定可定向, 也不一定紧致无边. 在定义 Sobolev 空间之前, 我们首先回忆流形上积分的定义. 取定 M 的一个坐标图册 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, 以及从属于 (subordinate) 该开覆盖的单位分解 $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \psi_\alpha = 1|_M$, $\text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha$, 对任意的 $\alpha \in \mathcal{A}$. 对 $f \in C_0^\infty(M)$, M 上的具有紧致支撑集的光滑函数, 定义其积分为

$$\int_M f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} \psi_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1} \cdot f \circ \phi_\alpha^{-1} \sqrt{\det(d\phi_\alpha(g))}.$$

上述求和是有限项的求和, 因为 M 是仿紧的.

假设向量丛 (E, π, M, F) 具有度量且有与该度量相容的联络 $\nabla^E: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$. 在向量丛 $\otimes^q T^*M \otimes E$ 上有诱导的度量, 以及由 ∇^E 和 M 的 Levi-Civita 联络 ∇^M 诱导的联络

$$\nabla: \Gamma(\otimes^q T^*M \otimes E) \rightarrow \Gamma(\otimes^{q+1} T^*M \otimes E),$$

其定义为

$$(\nabla T)(X_0, X_1, \dots, X_q) = \nabla_{X_0}^E(T(X_1, \dots, X_q)) - \sum_{i=1}^q T(X_1, \dots, \nabla_{X_0}^M X_i, \dots, X_q),$$

其中 $T \in \Gamma(\otimes^p T^*M \otimes E)$, 而 $X_0, X_1, \dots, X_q \in \Gamma(TM)$.

假设 $\Gamma_0(E)$ 记为 E 的具有紧致支集的光滑截面全体. 对 $1 \leq p < +\infty$, 我们定义 $T \in \Gamma_0(E)$ 的 L^p -模为

$$\|T\|_p := \left(\int_M |T|^p \right)^{1/p}.$$

当 $p = \infty$ 时, 定义

$$\|T\|_\infty := \sup_{x \in M} |T(x)|.$$

利用联络 ∇ , 我们得到 $W^{k,p}$ -Sobolev 模的定义

$$\|T\|_{k,p} := \left(\sum_{j=0}^k \|\nabla^j T\|_p^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=0}^k \int_M |\nabla^j T|^p \right)^{1/p},$$

当 $p = \infty$ 时,

$$\|T\|_{k,\infty} := \sup_{j \leq k} \|\nabla^j T\|_\infty,$$

我们称 $\Gamma_0(E)$ 在 $W^{k,p}$ -Sobolev 模下的完备化为向量丛 E 的截面的 $W^{k,p}$ -Sobolev 空间, 记作 $W^{k,p}(E)$. 按照定义, 它是一个 Banach 空间. 此外当 $p > 1$ 时, 它还是自反的(reflexive).

应该注意, 上述定义的 Sobolev 模依赖于丛以及底流形的度量和联络 (都要求是度量相容的). 但当 Σ 紧时, 可以证明等价度量给出的 Sobolev 模也是等价的, 从而作为集合 $W^{k,p}(E)$ 不依赖于度量与联络的选取. 事实上, 我们更精细的有

命题 2.30 假设 E 是紧流形 M 上一个向量丛, $T \in W^{k,p}(E)$ 当且仅当在局部平凡化 $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times V$ 下, T 的分量函数是 $K \subset\subset U_\alpha, \forall \alpha \in \mathcal{A}$, 上的 $W^{k,p}$ 函数.

证明 为简单起见, 我们只对 $W^{1,p}(E)$ 验证. 我们知道, 在局部平凡化 (Φ_α, U_α) 下, E 有局部截面 $\{\mu_\alpha\}_{\alpha=1}^{\text{rank}(E)}$, 事实上取 V 的一个基 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{\text{rank}(E)}$, 则局部截面 $\mu_\beta(x) = \Phi_\alpha^{-1}(x, e_\beta)$ 就满足要求 (因为 $\Phi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)}$ 是线性同构). 这样, 我们得到 T 在该局部标架下的系数

$$T = T^\alpha \mu_\alpha.$$

又设 M, E 的度量分别是 g, h , 度量相容的联络分别是 ∇^M, ∇^E , 且局部地 (在 U_α 上),

$$\nabla_{\partial_i}^M \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad \nabla_{\partial_i}^E \mu_\alpha = A_{i\alpha}^\beta \mu_\beta.$$

这样,

$$\nabla^E T = \nabla_{\partial_i}^E (T^\alpha \mu_\alpha) \otimes dx^i = \left(\partial_j T^\beta + T^\alpha A_{j\alpha}^\beta \right) \mu_\beta \otimes dx^j =: T_{;j}^\beta \mu_\beta \otimes dx^j.$$

因而,

$$|T|^2 = h_{\alpha\beta} T^\alpha T^\beta, \quad |\nabla^E T|^2 = h_{\alpha\beta} g^{ij} T_{;i}^\alpha T_{;j}^\beta.$$

注意到, $g_{ij}, h_{\alpha\beta}$ 作为紧流形 M 上的光滑函数, 和 $\delta_{ij}, \delta_{\alpha,\beta}$ 等价, 而 $A_{i\alpha}^\beta$ 是有界的. 我们可以用欧氏模来替代上述模, 即

$$|T|^2 \sim \sum_\alpha (T^\alpha)^2, \quad |\nabla T|^2 \sim \sum_{i,\alpha} \{(\partial_i T^\alpha)^2 + (T^\alpha)^2\}. \quad (2.4)$$

事实上, 假设在 U_α 中, 我们有

$$\frac{1}{C} I \leq (g_{ij}) \leq CI, \quad \frac{1}{C} I \leq (h_{\alpha\beta}) \leq CI, \quad |A_{i\alpha}^\beta| < C.$$

从而,

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} (T^\alpha)^2 &\leq |T|^2 = h_{\alpha\beta} T^\alpha T^\beta \leq C (T^\alpha)^2, \\ \frac{1}{C^2} (T_{;i}^\alpha)^2 &\leq |\nabla^E T|^2 = h_{\alpha\beta} g^{ij} T_{;i}^\alpha T_{;j}^\beta \leq C^2 (T_{;i}^\alpha)^2, \\ (T_{;i}^\alpha)^2 &\leq ((\partial_i T^\alpha) + (A_{i\beta}^\alpha)(T^\beta))^2 \leq 2(\partial_i T^\alpha)^2 + 2C^2 \dim M \text{rank}(E) (T^\alpha)^2, \\ (\partial_i T^\alpha)^2 &= T_{;i}^\alpha - A_{i\beta}^\alpha T^\beta \implies (\partial_i T^\alpha)^2 \leq 2(T_{;i}^\alpha)^2 + 2C^2 \dim M \text{rank}(E) (T^\alpha)^2. \end{aligned}$$

可见, (2.4) 成立, 进而欧氏模和黎曼度量下的模 (L^∞) 可相互控制.

为了计算 T 的 Sobolev 模, 取从属于 $\{U_\alpha\}$ 的一个单位分解 $\{\psi_\alpha\}$, 则按照定义, 令 $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{\dim M}$ 是 M 的局部坐标卡, 则

$$\begin{aligned} \|T\|_{1,p}^p &= \int_M (|\nabla T|^p + |T|^p) \\ &= \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} \psi_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1} \cdot (|\nabla T|^p + |T|^p) \circ \phi_\alpha^{-1} \sqrt{\det(d\phi_\alpha(g))}. \end{aligned}$$

由模的等价性, 易见结论成立. $\square$

下面来看 Hölder 空间的定义. 假设 (E, π, M) 是一个具有度量的向量丛, ∇^E 是其上一个度量相容的联络. 若 M 的内射半径 (injectivity radius) $i_M > 0$, 对 $T \in \Gamma(E)$, 以及 $B \subset M$, $\text{diam}(B) < i_M$, 定义 [34, Sec. 10.2.4]

$$\text{osc}(T; B) := \sup \{|T(x) - T(y)| \mid x, y \in B\},$$

其中我们利用 ∇^E 将 T 沿着连接 x 与 y 的唯一最短测地线作平行移动 (反向平行移动得到的距离相等). 而半模定义为

$$[T]_\alpha = \sup \{d^{-\alpha} \text{osc}(T; B_d(x)) \mid 0 < d < i_M, x \in M\}.$$

有了 C^α 半模的概念, 我们容易得到 $C^{k,\alpha}$ 模的定义.

$$\|T\|_{k,\alpha} := \sum_{j=0}^k \|\nabla^j T\|_\infty + [\nabla^k T]_\alpha.$$

E 上全体具有有限 $C^{k,\alpha}$ 模的截面所成的空间称为 $C^{k,\alpha}(E)$ -Hölder 空间.

由 Sobolev 空间中的讨论知, 要证 $T \in C^{k,\alpha}(E)$ 当且仅当 T 的分量是 $C^{k,\alpha}$ 函数, 只需要说明 T 的欧氏模与黎曼模等价. 类似地, 在 Hölder 模的情形, 我们有

命题 2.31 假设 E 是紧流形 M 上一向量丛, $B \subset (M, g)$, $\text{diam}(B) < i_M$ (与 M 的度量有关), 是 M 上一个区域. 则对任意的 $T \in C^{k,\alpha}(E)$, 存在常数 C , 使得

$$\frac{1}{C} \|T\|_{k,\alpha;B}^\delta \leq \|T\|_{k,\alpha;B} \leq C \|T\|_{k,\alpha;B}^\delta,$$

这里, $\|\cdot\|_{k,\alpha;B}^\delta$ 指在测地法坐标下, 视 B 为欧氏区域, 并给予欧氏度量下的模.

证明 我们仅对 $k = 1$ 的情形给予证明. 回忆, 对 $\text{diam}(B) < i_M$, 可以定义测地法坐标, 使得对任意的 $x \in B$, 在该坐标系下, $g_{ij}|_x = \delta_{ij}$, $g_{ij,k}|_x = 0$. 因而, 由度量的连续性, 存在 $C(g, B)$ 使得

$$\|g_{ij} - \delta_{ij}\|_{\infty;B} + \|g_{ij,k}\|_{\infty;B} \leq C(g, B).$$

首先, 由(2.4)知,

$$\begin{aligned} \|T\|_{\infty;B} &= \|T^\alpha T^\beta h_{\alpha\beta}\|_{\infty;B}^{1/2} \sim \|(T^\alpha)^2\|_{\infty;B}^{1/2} = \|T\|_{\infty;B}^\delta, \\ \|\nabla T\|_{\infty;B} &= \|h_{\alpha\beta} g^{ij} T_{;i}^\alpha T_{;j}^\beta\|_{\infty;B}^{1/2} \sim \|(T_{;i}^\alpha)^2\|_{\infty;B}^{1/2} \sim \|T\|_{\infty;B}^\delta + \|\nabla T\|_{\infty;B}^\delta. \end{aligned}$$

可见 Hölder 模定义中的 L^∞ 模与欧氏度量下的 L^∞ 模等价.

下面来看 $[\nabla T]_{\alpha;B}$ 的等价性.

由度量的等价性, 我们知 $x, y \in M$ 的欧氏距离和黎曼距离是等价的. 从而只需证明振幅 $\text{osc}(\nabla T, B)$ 是等价的即可. 事实上, 假设 $\nabla T|_x = T_{0;i}^\alpha \mu_\alpha \otimes dx^i$, 而 $T(t) := T_{;i}^\alpha(t) \mu_\alpha \otimes dx^i$ 是其关于测地线 $\gamma: x^i = x^i(t)$ 平行的张量场, 则

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}} T(t) = \dot{x}^i \{ \nabla_{\partial_i} (T_{;j}^\alpha(t) \mu_\alpha \otimes dx^j) \} = \left\{ \dot{T}_{;j}^\alpha + \dot{x}^i T_{;j}^\beta A_{i\beta}^\alpha - \dot{x}^i T_{;k}^\alpha \Gamma_{ij}^k \right\} \mu_\alpha \otimes dx^j,$$

即其系数满足如下的一阶常微分方程组,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} T_{;j}^\alpha + \dot{x}^i T_{;j}^\beta A_{i\beta}^\alpha - \dot{x}^i T_{;k}^\alpha \Gamma_{ij}^k = 0 \\ T_{;i}^\alpha(0) = T_{0;i}^\alpha. \end{cases}$$

有常微分方程的基本理论知 (主要是解可用指数矩阵表示出来),

$$\frac{1}{C} |T_{0;i}^\alpha| \leq |\tilde{T}_{;i}^\alpha|_y \leq C |T_{0;i}^\alpha|,$$

其中 $\tilde{T}$ 表示平行移动得到的张量场, C 是依赖于 $A_{i\alpha}^\beta, \Gamma_{ij}^k$ 以及 $d(x, y)$ 的常数. 进而,

$$\frac{1}{C} |T_{;i}^\alpha|_x \leq |\tilde{T}_{;i}^\alpha|_y \leq C |T_{;i}^\alpha|_x.$$

结合

$$\frac{1}{C} |T_{;i}^\alpha|_y \leq |T_{;i}^\alpha|_y \leq C |T_{;i}^\alpha|_y,$$

容易得到振幅的等价性. □

作为应用, 我们在做流形上的分析时, 需要经常用模的等价性将欧氏空间的估计翻译到流形上. 下面我们就以典型的 L^p 以及 C^α -椭圆估计来说明这个过程.

我们考虑的微分算子是

$$L = a^{ij} \nabla_i \nabla_j + b^i \nabla_i + c,$$

其中 a 是 M 上某个对称正定张量丛的 $L^p(C^\alpha)$ 截面, b 是 M 上的 $L^p(C^\alpha)$ 向量场, 而 $c \in L^p(M)(C^\alpha(M))$. 此外, L 还满足如下的结构条件 (structure condition)

$$\begin{aligned} \|a\|_{0,\alpha;M} + \|b\|_{0,\alpha;(M)} + \|c\|_{0,\alpha;M} &\leq \Lambda, \\ \lambda \|\xi\|^2 &\leq a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda \|\xi\|^2, \quad \forall x \in M, \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

我们将以如下的 Dirichlet 问题为例

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in M \\ u = g, & x \in \partial M, \end{cases}$$

其中 $f \in L^p(M)$ ($C^{0,\alpha}(M)$), $g \in W^{2,p}(M)$ ($C^{2,\alpha}(M)$).

命题 2.32 假设 L 是如上定义在紧流形 M 上向量丛 E 上的偏微分算子, 则存在常数 $C = C(M, \lambda, \Lambda)$, 使得

(i) 对任意的 $u \in W^{2,p}$,

$$\|u\|_{2,p;M} \leq C (\|Lu\|_{p;M} + \|u\|_{p;M});$$

(ii) 对任意的 $u \in C^{2,\alpha}$ 有,

$$\|u\|_{2,\alpha;M} \leq C (\|Lu\|_{\alpha;M} + \|u\|_{0,\alpha;M} + \|g\|_{2,\alpha;M}).$$

证明 只证 (ii). 假设 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 是 M 的一个有限覆盖, 且 $\text{diam}(U_\alpha) < i_M$. 则由模的等价性,

$$\begin{aligned} |u|_{2,0;M} &\leq \sum_{\alpha} |u|_{2,0;U_\alpha} \leq C \sum_{\alpha} |u \circ \phi_\alpha^{-1}|_{2,0;\phi_\alpha(U_\alpha)}^\delta \leq C \sum_{\alpha} |u \circ \phi_\alpha^{-1}|_{2,\alpha;\phi_\alpha(U_\alpha)}^\delta \\ &\leq C \sum_{\alpha} (|\phi_\alpha^* L(u \circ \phi_\alpha^{-1})|_{0,\alpha;\phi_\alpha(U_\alpha)}^\delta + |u \circ \phi_\alpha^{-1}|_{0,\alpha;\phi_\alpha(U_\alpha)}^\delta) \end{aligned}$$

这里, $\phi_\alpha^* L$ 表示 L 在 $\phi_\alpha(U_\alpha)$ 上的局部表达式. 再次利用模的等价性

$$|u|_{2,0;M} \leq C \sum_{\alpha} (|Lu|_{0,\alpha;U_\alpha} + |u|_{0,\alpha;U_\alpha}) \leq C (|Lu|_{0,\alpha;M} + |u|_{0,\alpha;M}).$$

接下来, 我们估计 C^α 半模. 当 $d(x, y) < i_M$ 时, 设 (B, ϕ) 是包含 x, y 的法坐标. 令 $T = \nabla^2 u$, 则

$$\begin{aligned} \frac{|T(x) - T(y)|}{d^\alpha(x, y)} &\leq [T]_{0,\alpha;B} \leq C[\phi^*(T)]_{0,\alpha;\phi(B)}^\delta \\ &\leq C (|\phi^* L(u \circ \phi)|_{0,\alpha;\phi(B)}^\delta + |u \circ \phi|_{0,\alpha;\phi(B)}^\delta) \\ &\leq C (|Lu|_{0,\alpha;B} + |u|_{0,\alpha;B}) \leq C (|Lu|_{0,\alpha;M} + |u|_{0,\alpha;M}). \end{aligned}$$

当 $d(x, y) > i_M$ 时,

$$\frac{|T(x) - T(y)|}{d^\alpha(x, y)} \leq C[T]_{0,\alpha;M} \leq C|u|_{2,0;M} \leq C (|Lu|_{0,\alpha;M} + |u|_{0,\alpha;M}).$$

□

为了研究抛物方程, 我们需要将上述空间推广到时空的情形. 此时, 我们考虑的向量丛是由自然投射 $\text{pr}_1: M \times [0, T] \rightarrow M$ 给出的拉回丛 $\text{pr}_1^{-1}(E)$. 为方便起见, 我们不对拉回丛引入另外记号.

Sobolev 空间的定义, 和椭圆情形非常类似. 首先, 对 $S \in \Gamma_0(E)$, 定义 $W^{k,p}$ 模,

$$\|S\|_{k,p;M \times [0,T]}^p := \sum_{i+2j \leq k} \|\nabla^i \partial_t^j S\|_{p;M \times [0,T]}^p.$$

$\Gamma_0(E)$ 关于 $W^{k,p}$ 模的完备化称为向量丛 E 的截面的 $W^{k,p}$ -Sobolev 空间, 记作 $W^{k,p}(M \times [0, T]; E)$. 它是 Banach 空间, 且 $p > 1$ 时还是自反的. 记 $W^{k,p}(M \times [0, T]/0; E)$ 为所有满足 $\nabla^i \partial_t^j S|_{M \times \{0\}} = 0$ 的截面在 $W^{k,p}$ -模下的完备化.

一般地, 我们考察的抛物区域都是形如 $P(X_0, R)$ 的圆柱,

$$P(X_0, R) = \{X = (x, t) \in \Sigma \times [0, +\infty) | d(X_0, X) \leq R\}$$

其中 $X_0 = (x_0, t_0)$, 而 $d(X_0, X) := \max\{|x - x_0|, \sqrt{t_0 - t}\}$ 是抛物距离.

下面, 假设 P 是任意的一个圆柱形抛物球, 为了叙述方便, 我们引入如下标准记号: 底边 $BP := \{X \in P | t = 0\}$, 侧边 $SP := \{X \in P | x \in \partial BP\}$, 角 $CP := \{X \in P | X \in BP \cap SP\}$.

从椭圆情形定义截面的 C^α 模知, 为了使得可以定义截面的距离, 下面我们总假设 $BP \subset \Sigma$ 满足 $\text{diam}(BP) < i_\Sigma$.

对 $\alpha \in (0, 1]$, $T(\cdot, t) \in \Gamma(E)$, $t \in [0, \infty)$, 我们有类似的 C^α 半模的定义:

$$[T]_{\alpha;P} := \sup_{X_0 \in P} \sup_{X \in P \setminus \{X_0\}} \frac{|T(X) - T(X_0)|}{d(X_0, X)^\alpha}.$$

由于时间导数相当于两次空间导数, 这导致对时空高阶 C^α 模的定义稍显复杂. 首先, 对 $\alpha \in (0, 2]$, 令

$$\langle T \rangle_{\alpha;P} := \sup_{X_0 \in P} \sup \left\{ \frac{|T(x_0, t) - T(X_0)|}{|t - t_0|^{\alpha/2}} | (x_0, t) \in P \setminus \{X_0\} \right\}.$$

对任意的实数 $k + \alpha$, k 是非负整数, $\alpha \in (0, 1]$, 定义

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_{k+\alpha;P} &:= \sum_{|\beta|+2j=k-1} \langle \nabla^\beta (\partial_t^j T) \rangle_{\alpha+1;P}, \\ [T]_{k+\alpha;P} &:= \sum_{|\beta|+2j=k} [\nabla^\beta (\partial_t^j T)]_{\alpha;P}, \\ \|T\|_{k+\alpha;P} &:= \sum_{|\beta|+2j \leq k} \sup_P |\nabla^\beta (\partial_t^j T)| + [T]_{\alpha;P} + \langle T \rangle_{\alpha;P}. \end{aligned}$$

最后, 我们的时空 $C^{k+\alpha}$ 模定义为

$$\|T\|_{k+\alpha; \overline{M} \times [0, T_1]} := \sup_{P \subset \overline{M} \times [0, T_1]} \|T\|_{k+\alpha;P}.$$

可以证明, 上述 $C^{k+\alpha}$ 模使得 $P, \overline{M} \times [0, T_1]$ 是 Banach 空间.

接下来, 我们引用 [19], 叙述本文中用到的 Sobolev 空间与 Hölder 空间的基本事实. 其证明可以参考 [12, 60].

引理 2.33 (Sobolev 嵌入) 假设 (M, g) 是 m 维紧流形, E 是 M 上一向量丛. 若 $k - (m + 2)/p = l + \alpha$, 其中 l 是正整数, $0 < \alpha \leq 1$, 则存在常数 C , 使得

$$\|S\|_{l+\alpha} \leq C\|S\|_{p,k}, \quad \forall S \in W^{k,p}(M \times [0, T]; E),$$

而且包含映射

$$W^{k,p}(M \times [0, T]; E) \rightarrow C^{l+\alpha}(M \times [0, T]; E),$$

是连续的. 此外, 若 $\gamma < l + \alpha$, 则包含映射

$$W^{k,p}(M \times [0, T]; E) \rightarrow C^\gamma(M \times [0, T]; E),$$

还是紧的, 即将有界集映为列紧集.

关于 Sobolev 空间不同指标之间的嵌入关系, 我们有如下

引理 2.34 (Rellich–Kondrachov 紧嵌入定理) 假设 M, E 如上. 对任意的 $l < k$, 包含映射

$$W^{k,p}(M \times [0, T]; E) \rightarrow W^{l,p}(M \times [0, T]; E)$$

是紧嵌入.

第 3 章 梯度流及其短时间存在性

在本章中, 我们首先写出整体问题的局部表示, 这为以后的分析作好准备. 从局部表达式可以看出, 我们所考虑的规范流是调和映射流在丛截面的推广. 接下来, 我们证明了规范变换流是能量泛函 $\mathcal{E}(S)$ 的负向梯度流. 为了证明短时间存在性, 我们首先利用局部到边的抛物估计, 简要的证明了该流在自同态丛中的短时间存在性. 然后再证明解确实落在规范变换丛上.

3.1 方程的局部坐标表示

我们考虑的方程(1.1)是整体定义的, 为了分析的需要, 需写出其在局部平凡化下的局部表示. 在局部计算中, 我们既可以用活动标架, 也可以用自然标架, 而且我们总假设 Einstein 求和约定. 令 $\{e_i\}$ 是 Σ 的一个局部么正标架, 其对偶标架记为 $\{\omega^j\}$. 回忆, 按照 ∇^* 的定义, 对任意的 $a \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ 有 $\nabla^* a = -(\nabla_{e_j} a)(e_j)$. 此外, 容易证明如下的关系

$$\nabla_{A+a}^* b = \nabla_A^* b + \{a, b\}, \quad \forall a, b \in \Omega^1(E), \quad (3.1)$$

其中 $\{a, b\}$ 是关于 a, b 的双线性形式, 局部地可以写成 $\{a, b\} := -g^{kl}[a_k, b_l]$. 因此, (1.1)可以改写为

$$-\nabla_A^* \nabla_A S = \nabla_{A;e_j} S S^{-1} \nabla_{A;e_j} S + S \{S^{-1} \nabla_A S, a\} + S \nabla_A^* a, \quad (3.2)$$

其中 $a = A - A_0 \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$.

为了写出(3.2)的局部表达式, 假设 μ_α 是 E 的一个局部标架, $\{\partial_i\}$ 是 Σ 的一个局部坐标基, 局部地

$$\nabla_{A;\partial_i} = \partial_i + A_i, \quad \text{或者等价地 } \nabla_A = d + A,$$

其中 A_i 是一个矩阵, 定义为 $\nabla_{A;\partial_i} \mu_\beta = A_{i\beta}^\alpha \mu_\alpha$. 在局部标架 $\{\mu_\alpha\}$ 下, $S|_U$ 可以视为一个矩阵值函数 u , 满足 $u(x) \in G \subset \text{SO}(r) \subset \mathbb{R}^{r \times r}$. 为了简化记号, 记 $(\nabla_{A;\partial_k} S)|_U$ 的局部表达式为 $u|_k$, 即

$$u|_k := \partial_k u + [A_k, u].$$

回忆, 对流行 Σ 上一个函数 f , 其 Hessian 和 Laplace 分别是

$$(\nabla^2 f)_{kl} = \partial_k \partial_l f - \Gamma_{kl}^i \partial_i f \text{ and } \Delta_g f = \text{tr}_g(\nabla^2 f) = g^{kl} (\nabla^2 f)_{kl}.$$

现在, 我们逐项地展开(3.2). 首先,

$$\begin{aligned} -\nabla_A^* \nabla_A S &= -\nabla_A^* (\nabla_{A;\partial_i} S \otimes dx^i) \\ &= g^{kl} [\nabla_{A;\partial_k} (\nabla_{A;\partial_i} S \otimes dx^i)] (\partial_l) \\ &= g^{kl} [\nabla_{A;\partial_k} \nabla_{A;\partial_l} S - \Gamma_{kl}^i \nabla_{A;\partial_i} S], \end{aligned}$$

因此, $-\nabla_A^* \nabla_A S$ 的局部表达式是

$$\begin{aligned} g^{kl} \{ \nabla_{A;\partial_k} (\partial_l u + [A_l, u]) - \Gamma_{kl}^i (\partial_i u + [A_i, u]) \} \\ = \Delta_g u + g^{kl} \{ \partial_k [A_l, u] + [A_k, u_{|l}] - \Gamma_{kl}^i [A_i, u] \}. \end{aligned}$$

容易知道, $g^{kl} \nabla_{A;\partial_k} S S^{-1} \nabla_{A;\partial_l} S$ 的局部表达式为 $g^{kl} u_{|k} u^{-1} u_{|l}$.

由 $\{\cdot, \cdot\}$ 以及伴随算子 ∇^* 的定义, 可以证明 $\{S^{-1} \nabla_A S, a\}$ 的局部表达式是 $-g^{kl} [u^{-1} u_{|k}, a_l]$, 而

$$\nabla_A^* a = d^* a - g^{kl} [A_k, a_l] = -g^{kl} (\partial_l a_k - \Gamma_{kl}^i a_i + [A_k, a_l]) = -g^{kl} (a_{l|k} - a_i \Gamma_{kl}^i).$$

特别地, 当 Σ 的度量 g 是欧氏的, (3.2) 的局部表达式可简化为

$$\Delta u - u_{|k} u^{-1} u_{|k} = -\partial_k [A_k, u] - [A_k, u_{|k}] - u[u^{-1} u_{|k}, a_k] - u a_{k|k}. \quad (3.3)$$

边界条件为

$$\nu \lrcorner (u^{-1} (du + [A, u]) + a) = 0. \quad (3.4)$$

由(3.3)知, 方程的主项和到 G 的调和映照的张力场是一致的. 事实上, 容易验证 $(u^{-1} u_{|k})^t = -u^{-1} u_{|k}$, 因此 $u_{|k} \in T_u G = u \mathfrak{g}_E$. 为了计算 $G \hookrightarrow \mathbb{R}^{r \times r}$ 的第二基本形式, 我们首先注意到紧李群的任何李子群都是全测地的, 从而在下面的计算中可以假设 $G = \mathrm{SO}(r)$. 容易知道 G 的李代数 $\mathfrak{g}_E = \{B \in M_{r \times r} | B = -B^t\}$, G 在 u 处的切空间是 $T_u G = u \mathfrak{g}_E = \{uB | B \in \mathfrak{g}\}$, 其正交补空间是 $T_u^\perp G = \{uC | C = C^t, C \in M_{r \times r}\}$, 这里 $M_{r \times r}$ 的内积由 $\langle B, C \rangle = \mathrm{tr}(BC^t)$ 给出. 对 u 处任一切向量 $X = uB$, 易见 $\gamma(t) := u \exp(tB)$ 是以 X 为切向的曲线. 而由第二基本型 II 的定义,

$$\mathrm{II}(X, X) = [\ddot{\gamma}(t)]^\perp = [uB^2]^\perp = u \frac{B^2 + (B^2)^t}{2} = uB^2 = Xu^{-1}X.$$

3.2 负向梯度流

我们将证明(1.3)是 S 的能量泛函 $\mathcal{E}(S)$ 的负向梯度流. 从而沿着流, S 的能量是单调递减的.

命题 3.1 斜边值演化问题(1.3)是能量泛函 $\mathcal{E}(S)$ 的负向梯度流.

证明 假设 $S(t) = S \exp(t\xi)$ 是 S 的一个垂直变分 (vertical variation), 其中 $\xi \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$, 则对任何的 $\sigma \in \Omega^0(E)$, 由诱导联络的定义,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (S^*(A) - A_0)(\sigma) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [S^{-1}(t) \nabla_A S(t) + A - A_0](\sigma) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} S^{-1}(t) \nabla_A (S(t)\sigma) \\ &= -\xi S^{-1} \nabla_A (S\sigma) + S^{-1} \nabla_A (S\xi\sigma) \\ &= (\nabla_A \xi)(\sigma) + [S^{-1} \nabla_A S, \xi](\sigma) \\ &= (\nabla_{S^*(A)} \xi)(\sigma). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(S(t)) &= \int_{\Sigma} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (S(t)^*(A) - A_0), S^*(A) - A_0 \right\rangle \\ &= \int_{\Sigma} \langle \nabla_{S^*(A)} \xi, S^*(A) - A_0 \rangle, \end{aligned}$$

利用分部积分公式和边界条件,

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \int_{\partial\Sigma} \langle \xi, \nu \lrcorner (S^*(A) - A_0) \rangle i_{\nu}(*1) + (\xi, \nabla_{S^*(A)}^* (S^*(A) - A_0)) \\ &= (\xi, \nabla_{S^*(A)}^* (S^*(A) - A_0)). \end{aligned}$$

这表明(1.3)是 $\mathcal{E}(S)$ 的梯度流, 因此沿着流能量是单调递减的. $\square$

3.3 短时间存在性

回忆, 我们考虑的方程是

$$\begin{cases} S^{-1} \partial_t S = -\nabla_{S^*(A)}^* (S^*(A) - A_0), & (x, t) \in \Sigma \times (0, T_1) \\ S(\cdot, 0) = S_0 \in \Gamma(\text{Aut}_G(E)), & x \in \Sigma \\ \nu \lrcorner (S^*(A) - A_0) = 0, & (x, t) \in \partial\Sigma \times (0, T_1). \end{cases}$$

它的一般形式是

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) S = F(x, t, S, \nabla S), & (x, t) \in M \times (0, T_1) \\ S(\cdot, 0) = S_0 \in \Gamma(\text{End}(E)), & x \in M \\ B(x, t, S, \nabla S) = 0, & (x, t) \in \partial M \times (0, T_1). \end{cases} \quad (3.5)$$

其中, $F(x, t, z, p)$ 是 $M \times (0, T_1) \times \Gamma(\text{End}(E)) \times \Omega^1(\text{End}(E))$ 到 $\Gamma(\text{End}(E))$ 的有界光滑映射, $B(x, t, z, p)$ 是 $M \times (0, T_1) \times \Gamma(\text{End}(E)) \times \Omega^1(\text{End}(E))$ 到 $\Gamma(\text{End}(E))$ 的有界光滑映射. 这里 $\Gamma(\cdot)$ 都是指光滑截面. 此外, 为了使得边值是斜导数的, 我们还要求, 对任意的紧子集 $\Sigma \subset \partial M \times [0, T_1] \times \Gamma(\text{End}(E)) \times \Omega^1(\text{End}(E))$, 存在正常数 χ_Σ , 使得

$$\nu \lrcorner B_p|_\Sigma \geq \chi_\Sigma. \quad (3.6)$$

在上述非线性斜边值的假设下, (3.5)的短时间存在性可模仿 [27, Theorem 8.8, p. 208] 利用先验估计和不动点定理给出, 其中关于非线性斜边值的处理是比较有技巧的 (参考 [27, Lemma 8.7, p. 207] 以及 [60, P. 45ff, Theorem 3.4]). 这里, 由于我们的边值是线性的, 即 B 关于 z 与 p 是线性函数, 从而可以模仿 [27, Theorem 8.2, p. 200ff] 给出一个简单的证明.

如果我们希望考虑的解的空间导数是连续到边的, 则要求在 $\partial M \times \{0\}$ 上有相容性

$$\nu \lrcorner B(x, t, S_0, \nabla S_0) = 0 \quad (3.7)$$

成立.

本节的目的是说明(3.5)在 $C^0(\overline{M} \times [0, T_1]; \text{End}(E)) \cap C^\infty(\overline{M} \times (0, T_1); \text{End}(E))$ 上存在解, 更确切地

定理 3.2 (短时间存在性) 假设 F, B, G 如上, 满足相容性条件(3.7)且 B 关于 z, p 是线性函数, 则存在充分小的 $T_1 > 0$, 使得初边值问题(3.5) 存在解 $S \in C^0(\overline{M} \times [0, T_1]; \text{End}(E)) \cap C^{2,\alpha}(\overline{M} \times (0, T_1); \text{End}(E))$, 对某个 $\alpha \in (0, 1)$.

证明 首先, 定义短时间抛物球

$$P_\varepsilon := \{(x, t) \in M \times (0, T_1) : t < \varepsilon\}.$$

令 $\theta \in (1, 2)$, 考察映射 $J: U \rightarrow C^\theta(M \times (0, T_1); \text{End}(E))$, $T = JS$, 其中 T 是下列线性问题的解

$$\begin{cases} \partial_t T - \Delta T = F(x, t, S, \nabla_A S), & (x, t) \in P_\varepsilon \\ T(\cdot, 0) = S_0 \in \Gamma(\text{End}(E)), & x \in M \\ B(x, t, T, \nabla_A T) = 0, & (x, t) \in \overline{M} \times (0, T_1), \end{cases}$$

其中

$$U = \{S \in C^\theta(M \times (0, T_1); \text{End}(E)) : \|S\|_{C^\theta} \leq M_0 := 1 + \|S_0\|_{C^{1,\theta}}\}.$$

它的可解性由标准的 Neumann 问题的到边估计和 Hölder 模可由局部平凡化下的分量函数的 Hölder 模控制得到. 事实上, 由可解性的局部估计, 我们还有

$$\|T\|_{C^1} \leq C(M_0)$$

进而由插值定理知 $T \in P_\varepsilon$. 故 J 是 U 到自身的连续映射. 注意到 U 是 $C^1(M \times (0, T_1); \text{End}(E))$ 的一个凸闭子集, 从而由不动点定理知存在 $S \in C^\theta(P_\varepsilon)$, 使得 $JS = S$. 由先验估计知 $S \in C^{2,\alpha}(P_\varepsilon)$, 这里 $\alpha \in (0, 1)$. 由 $JS = S$ 知它是(3.5)的解. $\square$

尽管我们证明了在 $\text{End}(E)$ 中存在短时间解, 但是规范变换却要求解落在 $\text{Aut}_G E$. 在研究调和映照流的时候, 也有同样的问题. 文献中有两种方法来解决这个问题. Hamilton [12, p. 108ff] 证明了一个唯一性定理, 而后将目标流形 Y 嵌入到一个具有非平坦度量的欧式空间, 使得在 Y 的一个管状邻域存在反射, 从而给出两个具有相同初边值的解, 进而得到解的像必须在 Y 上. 另一方面, Eells & Sampson [8, Section 7 (C), Theorem] 考虑了像集到目标流形 Y 的距离函数的演化方程. 因为 $[\Delta_g u + A(u)(\nabla u, \nabla u)]^\perp = [u_t]^\perp = 0$ 对任何目标流形上的 u 都成立, 故法部消失性质(normal part vanishing property)对调和映照流自然成立. 由此, 可以利用极大值原理来证明解在目标流形上. 我们将推广后一办法.

命题 3.3 假设 $\mathcal{B}$ 是紧流形 M 上的一个具有度量的向量丛, $\mathfrak{E}$ 是 $\mathcal{B}$ 的子丛, 而且其标准纤维是紧致的. 对 $\mathcal{B}$ 的一个截面 S , 考虑如下的热流

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta) S = f(\nabla S, S), & (x, t) \in M \times (0, T), \\ S(\cdot, 0) = S_0 \in \Omega^0(\mathfrak{E}), & x \in M, \\ \nu \lrcorner (S^*(A) - A_0) = 0, & (x, t) \in \partial M \times [0, T], \end{cases} \quad (3.8)$$

其中 $f : \Omega^1(\mathcal{B}) \times \Omega^0(\mathcal{B}) \rightarrow \Omega^0(\mathcal{B})$ 是一个光滑的丛映射, $\Delta = -\nabla^* \nabla$ 是分析拉普拉斯算子 (negative rough Laplace), $\nabla = \nabla_A$ 是一个度量相容的联络. 如果如下的法部消失性质成立

$$[\Delta \tilde{S} + f(\nabla \tilde{S}, \tilde{S})]^\perp = 0, \quad \forall \tilde{S} \in \Omega^0(\mathfrak{E}),$$

则(3.8)的任何光滑解一定在 $\mathfrak{E}$ 上.

在证明之前, 我们注意到定理 1.1 的 (i) 是上述命题的直接推论. 事实上, 令 $\mathcal{B}$ 为自同态丛 $\text{End } E$, $\mathfrak{E}$ 为规范变换丛 $\text{Aut}_G E$, 法部消失性质成立是因为

$$\nabla_{\tilde{S}^*(A)}^* (\tilde{S}^*(A) - A_0) \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E), \quad \forall \tilde{S} \in \Omega^0(\text{Aut}_G E).$$

命题 3.3 的证明 令 h 是 $\mathcal{B}$ 上的度量, 即 $h_x := \langle \cdot, \cdot \rangle_x$ 是每条纤维 $\mathcal{B}_x$ 上的内积且关于 x 是光滑的. 因为每条纤维 $\mathfrak{E}_x$ 是紧致且光滑的, 我们知道存在 $\delta = \delta(x) > 0$, 使得对任何 $v \in \mathcal{B}_x$, 只要 $d(v, \mathfrak{E}_x) := \inf_{w \in \mathfrak{E}_x} [h_x(v - w, v - w)]^{1/2} < \delta$, 都有唯一的 $\bar{v} \in \mathfrak{E}_x$, 满足

$$d(v, \mathfrak{E}_x) = [h_x(v - \bar{v}, v - \bar{v})]^{1/2}.$$

因此, 逐纤维定义的投射

$$\pi_x : \mathcal{B}_x \rightarrow \mathfrak{E}_x, \quad \pi_x(v) = \bar{v},$$

对满足 $d(v, \mathfrak{E}_x) < \delta$ 的 v 是良好定义的. 此外, 易知 $v - \pi_x(v) \perp \mathfrak{E}_x$. 给定 $\mathcal{B}$ 的一个光滑截面 V , $V(x)$ 属于 $\mathfrak{E}_x$ 的 δ 邻域, 映射 $x \mapsto \pi_x(V(x))$ 给出了 $\mathfrak{E}$ 的一个光滑截面, 我们将其记为 $\pi(V)$.

现在, 对 $t \in [0, \varepsilon)$, 当 $\varepsilon > 0$ 充分小, $S(x, t)$ 属于 $\mathfrak{E}$ 的 δ 邻域. 考察 S 的距离函数

$$\rho(x, t) := \frac{1}{2} \langle S(x, t) - \pi_x(S(x, t)), S(x, t) - \pi_x(S(x, t)) \rangle_x.$$

为了简化记号, 我们记

$$\rho(x, t) := \frac{1}{2} \langle S - \pi(S), S - \pi(S) \rangle_x.$$

则 ρ 的演化方程为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \rho &= \langle S - \pi(S), \partial_t S - d\pi_x|_{S(x)}(\partial_t S) \rangle_x + d^* d \rho \\ &= \langle S - \pi(S), \partial_t S \rangle_x + d^* \langle S - \pi(S), \nabla(S - \pi(S)) \rangle_x \\ &= \langle S - \pi(S), \partial_t S - \nabla_{e_j} \nabla_{e_j}(S - \pi(S)) \rangle_x \\ &\quad + \omega^j(\nabla_{e_i} e_i) \langle S - \pi(S), \nabla_{e_j}(S - \pi(S)) \rangle_x \\ &\quad - \langle \nabla_{e_j}(S - \pi(S)), \nabla_{e_j}(S - \pi(S)) \rangle_x \\ &= \langle S - \pi(S), \partial_t S + \nabla^* \nabla(S - \pi(S)) \rangle_x \\ &\quad - \langle \nabla_{e_j}(S - \pi(S)), \nabla_{e_j}(S - \pi(S)) \rangle_x \\ &= \langle S - \pi(S), \partial_t S - \Delta S + \Delta(\pi(S)) \rangle_x - |\nabla_{e_j}(S - \pi(S))|^2 \\ &= \langle S - \pi(S), f(\nabla S, S) + \Delta(\pi(S)) \rangle_x - |\nabla_{e_j}(S - \pi(S))|^2. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \rho + |\nabla_{e_j}(S - \pi(S))|^2 &= \langle S - \pi(S), f(\nabla S, S) + \Delta(\pi(S)) \rangle_x \\ &= \langle S - \pi(S), f(\nabla S, S) - f(\nabla(\pi(S)), S) \\ &\quad + f(\nabla(\pi(S)), S) - f(\nabla(\pi(S)), \pi(S)) \\ &\quad + f(\nabla(\pi(S)), \pi(S)) + \Delta(\pi(S)) \rangle_x. \end{aligned}$$

我们将逐项处理上式右边的三项. 令 $S_\tau = \pi(S) + \tau(S - \pi(S))$, $\tau \in [0, 1]$, 则

$$\begin{aligned}
 & \langle S - \pi(S), f(\nabla S, S) - f(\nabla(\pi(S)), S) \rangle_x \\
 &= \left\langle S - \pi(S), \int_0^1 \partial_\tau f(\nabla S_\tau, S) d\tau \right\rangle_x \\
 &= \int_0^1 \langle S - \pi(S), d f|_{(\nabla S_\tau, S)}(\nabla(S - \pi(S)), 0) \rangle_x d\tau \\
 &\leq \|d f\| \cdot |S - \pi(S)| \cdot |\nabla(S - \pi(S))| \\
 &= \sqrt{2\rho} \|d f\| \cdot |\nabla_{e_j}(S - \pi(S))| \\
 &\leq \rho \|d f\|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{e_j}(S - \pi(S))|^2.
 \end{aligned}$$

完全类似地,

$$\langle S - \pi(S), f(\nabla(\pi(S)), S) - f(\nabla(\pi(S)), \pi(S)) \rangle_x \leq 2\rho \|d f\|.$$

由法部消失性质, 最后一项为零. 综上所述我们得到,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \rho \leq \rho \|d f\|^2 + 2\rho \|d f\| \leq C(f)\rho. \quad (3.9)$$

现在, 在抛物边界,

$$\begin{aligned}
 \rho &= 0, \quad \text{on } M \times \{t = 0\}, \\
 \nu \lrcorner d\rho &= \nu \lrcorner \langle \nabla_A(S - \pi(S)), S - \pi(S) \rangle \\
 &= \nu \lrcorner \langle \nabla_A S, S - \pi(S) \rangle \\
 &= \nu \lrcorner \langle -S a, S - \pi(S) \rangle \\
 &= -\nu \lrcorner \langle (S - \pi(S))a + \pi(S)a, S - \pi(S) \rangle \\
 &= -\nu \lrcorner \langle (S - \pi(S))a, S - \pi(S) \rangle.
 \end{aligned}$$

最后一项为零是因为

$$\langle (S - \pi(S))a, S - \pi(S) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} |(S - \pi(S)) \exp(ta)|^2,$$

以及 $\exp(ta(x)) \in G \hookrightarrow SO(r) \subset M_{r \times r}$ 作用在 $S(x, t) - \pi(S(x, t)) \in M_{r \times r}$ 上是一个等距.

因为 ρ 满足(3.9) 而且边界条件为 $\mathcal{M}(\rho) = 0$, where

$$\mathcal{M}(\rho) := \begin{cases} \rho, & \bar{M} \times \{t = 0\} \\ \nu \lrcorner d\rho, & \partial M \times (0, T), \end{cases}$$

由此可见命题可由极大值原理得到. □

第 4 章 爆破过程中的关键引理与估计

在本章中, 我们将证明爆破分析中一些基本估计和关键引理. 首先是局部能量不等式, 它刻画了不同时刻能量的大小关系. 其次是小能量正则性, 即在能量小的条件下, 我们可以得到解的局部先验估计. 最后是奇点可去定理, 它表明具有孤立奇点的方程的解可延拓到整个区域.

4.1 局部能量不等式

命题 4.1 假设 $S \in \Gamma(\text{Aut}_G E)$ 是(1.3)的一个解, 且其初值 S_0 是光滑的, 满足 $\mathcal{E}(S_0; \Sigma) < +\infty$. 则对 $x_0 \in \Sigma, 0 < T_1 < T_2 \leq T, 0 < R_2 < R_1 \leq i_\Sigma$, 其中 i_Σ 是 Σ 的内射半径 (injectivity radius). 则成立如下的局部能量不等式

$$\mathcal{E}(S(T_2); D_{R_2}(x_0)) \leq \mathcal{E}(S(T_1); D_{R_1}(x_0)) + C \frac{|T_2 - T_1|}{|R_1 - R_2|^2} \mathcal{E}(S_0; \Sigma),$$

以及逆向局部能量不等式

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(S(T_1); D_{R_2}(x_0)) &\leq \mathcal{E}(S(T_2); D_{R_1}(x_0)) \\ &\quad + 2 \int_{T_1}^{T_2} \int_{D_{R_1}(x_0)} |\partial_t S|^2 + C \frac{|T_2 - T_1|}{|R_1 - R_2|^2} \mathcal{E}(S_0; \Sigma), \end{aligned}$$

其中 $C > 0$ 是一个常数, $D_r(x_0) := \overline{B_r(x_0)} \cap \Sigma$.

注记 由于我们不能排除能量在 Σ 的边界集中, 故我们需要上述边界版的局部能量不等式以及逆向局部能量不等式. 例如, 为了证明在某个奇异时刻, Σ 上的奇点数是有限的, 我们需要引用边界版的局部能量不等式.

证明 令 $\Sigma_{T_1}^{T_2} := \{(x, t) | x \in \Sigma, t \in [T_1, T_2]\}$ 以及 $\phi \in C_0^\infty(D_{R_1}(x_0))$ 是一个截断函数, 满足 $\phi(x) \equiv 1$, 对 $x \in D_{R_2}(x_0)$, $|\nabla \phi| \leq \frac{2}{R_1 - R_2}$ 且 $0 \leq \phi \leq 1$. 首先由边界条件, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} e(s) \phi^2 &= \int_{\Sigma} \langle S^*(A) - A_0, \partial_t (S^{-1} \nabla_A S) \rangle \phi^2 \\ &= \int_{\Sigma} \langle S(S^*(A) - A_0), -\partial_t S S^{-1} \nabla_A S + \nabla_A \partial_t S \rangle \phi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Sigma} \langle S(S^*(A) - A_0)(e_i)S^{-1}\nabla_{A;e_i}S, \partial_t S \rangle \phi^2 \\
 &\quad + \langle \nabla_A^*(S(S^*(A) - A_0)\phi^2), \partial_t S \rangle \\
 &\quad + \int_{\partial\Sigma} \langle \nu \lrcorner (S(S^*(A) - A_0)\phi^2), \partial_t S \rangle i_\nu(*1) \\
 &= \int_{\Sigma} \langle S(S^*(A) - A_0)(e_i) \circ S^{-1}\nabla_{A;e_i}S, \partial_t S \rangle \phi^2 \\
 &\quad + \langle \nabla_A^*(S(S^*(A) - A_0)\phi^2), \partial_t S \rangle,
 \end{aligned}$$

而由(3.1), 我们知道

$$\begin{aligned}
 \text{RHS} = \int_{\Sigma} \langle \nabla_{A+S^{-1}\nabla_AS}^*(S(S^*(A) - A_0)\phi^2) \\
 + S^{-1}\nabla_{A;e_i}S \circ S(S^*(A) - A_0)(e_i)\phi^2, \partial_t S \rangle,
 \end{aligned}$$

最后, 注意到

$$\nabla_{A+S^{-1}\nabla_AS;e_i}S = \nabla_{A;e_i}S + [S^{-1}\nabla_{A;e_i}S, S] = S^{-1}\nabla_{A;e_i}S \circ S.$$

我们得到,

$$\text{RHS} = \int_{\Sigma} \langle \nabla_{S^*(A)}^*(S(S^*(A) - A_0)\phi^2) + \nabla_{S^*(A);e_i}S \circ (S^*(A) - A_0)(e_i)\phi^2, \partial_t S \rangle.$$

现在, 对任意的 $T \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$, 成立

$$\nabla_A^*(S \circ T) = S \nabla_A^* T - \nabla_{A;e_i}S \circ T(e_i), \quad (4.1)$$

以及

$$\nabla_A^*(T\phi^2) = \phi^2 \nabla_A^* T - d(\phi^2)(e_i)T(e_i). \quad (4.2)$$

由流的方程(1.3), 我们继续计算如下

$$\begin{aligned}
 &\nabla_{S^*(A)}^*(S(S^*(A) - A_0)\phi^2) + \nabla_{S^*(A);e_i}S \circ (S^*(A) - A_0)(e_i)\phi^2 \\
 &\stackrel{(4.1)}{=} S \nabla_{S^*(A)}^*[(S^*(A) - A_0)\phi^2] \\
 &\stackrel{(4.2)}{=} S \nabla_{S^*(A)}^*(S^*(A) - A_0)\phi^2 - d(\phi^2)(e_i)S \circ (S^*(A) - A_0)(e_i) \\
 &\stackrel{(1.3)}{=} -\partial_t S \phi^2 - d(\phi^2)(e_i)S \circ (S^*(A) - A_0)(e_i).
 \end{aligned}$$

因此, Cauchy-Schwarz 不等式

$$\begin{aligned}
 \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} e(S) \phi^2 + \int_{\Sigma_{T_1}^{T_2}} |\partial_t S|^2 \phi^2 &= - \int_{\Sigma_{T_1}^{T_2}} 2\phi \, d\phi(e_i) \langle S \circ (S^*(A) - A_0)(e_i), \partial_t S \rangle \\
 &\leq \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Sigma} 2|\nabla \phi| |S^*(A) - A_0| \cdot \phi |\partial_t S| \\
 &\leq 2 \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Sigma} |\nabla \phi|^2 e(S) + \int_{\Sigma_{T_1}^{T_2}} |\partial_t S|^2 \phi^2 \\
 &\leq \int_{T_1}^{T_2} \frac{8}{|R_1 - R_2|^2} \mathcal{E}(S(\cdot, t); D_{R_1}) + \int_{\Sigma_{T_1}^{T_2}} |\partial_t S|^2 \phi^2 \\
 &\leq \frac{8|T_2 - T_1|}{|R_1 - R_2|^2} \mathcal{E}(S(\cdot, 0)) + \int_{\Sigma_{T_1}^{T_2}} |\partial_t S|^2 \phi^2,
 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
 8 \frac{|T_2 - T_1|}{|R_1 - R_2|^2} \mathcal{E}(S_0) &\geq \int_{\Sigma} e(S(\cdot, T_2)) \phi^2 - \int_{\Sigma} e(S(\cdot, T_1)) \phi^2 \\
 &\geq \mathcal{E}(S(T_2); D_{R_2}) - \mathcal{E}(S(T_1); D_{R_1}).
 \end{aligned}$$

完全类似地,

$$\begin{aligned}
 -\frac{8|T_2 - T_1|}{|R_1 - R_2|^2} \mathcal{E}(S_0) &\leq \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} e(S) \phi^2 + 2 \int_{\Sigma_{T_1}^{T_2}} |\partial_t S|^2 \phi^2 \\
 &\leq \mathcal{E}(S(T_2); D_{R_1}) - \mathcal{E}(S(T_1); D_{R_2}) + 2 \int_{T_1}^{T_2} \int_{D_{R_1}} |\partial_t S|^2.
 \end{aligned}$$

□

4.2 小能量正则性

小能量正则性是半线性偏微分方程中最重要的引理之一, 它表明在能量小的条件下, 临界非线性方程的行为非常类似于线性方程. 这一重要发现应归功于 Sacks&Uhlenbeck[43, Main Estimate 3.2] 对调和映照的研究. Schoen[46, Theorem 2.2] 用反证法给出一个新证明. 对调和映照流, 在闭曲面的情形可以参考 [49, Lemma 3.10], 以及张恭庆 [4, Lemma 4.2] 做的带边情形. 注意到(1.3)是调和映照流的小扰动, 可以期望当区域足够小时, 小能量正则性仍然成立. 我们的证明依赖于抛物估计和 Nirenberg 的一个插值不等式.

定理 4.2 (小能量正则性) 假设 S 是方程(1.3)在 $\Sigma \times [0, T)$ 上的一个解. 对 $z_0 = (x_0, t_0) \in \Sigma \times [\delta, T)$, 这里 $\delta > 0$ 是一个固定的常数, 定义抛物球

$$P_r(z_0) := \left\{ z = (x, t) \mid x \in \overline{B_r(x_0)} \cap \Sigma =: D_r(x_0), \sqrt{t_0 - t} \leq r \right\}.$$

则存在常数 $\varepsilon_0 > 0$ (不依赖于 S 以及 z_0) 和 $r_0 \in (0, \sqrt{\delta}/2)$, 使得对所有的 $r \in (0, r_0)$, 如果

$$\sup_{[t_0-r^2, t_0]} \mathcal{E}(S(t); D_r(x_0)) \leq \varepsilon_0,$$

那么

$$\sup_{P_{r/2}(z_0)} |\nabla_A^k S| \leq C_k r^{-k}, \quad \forall k = 1, 2, \dots,$$

其中 C_k 是一个常数.

证明 为简单起见, 假设 Σ 具有欧氏度量. 在 $P_r(z_0)$ 上, S (取定局部平凡化后) 可被视为一个到 $G \hookrightarrow SO(r) \subset \mathbb{R}^{r \times r}$ 的映射 u . 回忆 u 的方程是 (参考(3.3))

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) u &= -(\partial_k u + [A_k, u])u^{-1}(\partial_k u + [A_k, u]) \\ &\quad + \partial_k [A_k, u] + [A_k, \partial_k u + [A_k, u]] \\ &\quad + u[u^{-1}(\partial_k u + [A_k, u]), a_k] + u(\partial_k a_k + [A_k, a_k]). \end{aligned} \quad (4.3)$$

下面我们来看 $P_r(z_0)$ 上的边界条件, 它可分为内部情形和近边情形. 事实上, 当 $D_r^\circ(x_0) \cap \partial\Sigma \neq \emptyset$ 时, 不失一般性, 我们可假设 $D_r^\circ(x_0) \cap \partial\Sigma$ 是平坦的. 则根据 x_0 的相对位置, 可以分为如下几类:

- 内部: $D_r^\circ(x_0) = B_r(x_0)$, 即开圆盘完全不和边界相交.
- 远离边界: $D_r^\circ(x_0) \cap \partial\Sigma \neq \emptyset$ 且 $\text{dist}(x_0, \partial\Sigma) \geq r/2$. 这种情形可以通过把 r 用 $r/2$ 替换来约化到内部情形.
- 近边: $D_r^\circ(x_0) \cap \partial\Sigma \neq \emptyset$ 且 $\text{dist}(x_0, \partial\Sigma) < r/2$. 此时, 不失一般性, 可以假设 $D_r(x_0)$ 是上半圆盘 $B_{r/2}^+(x_0)$.

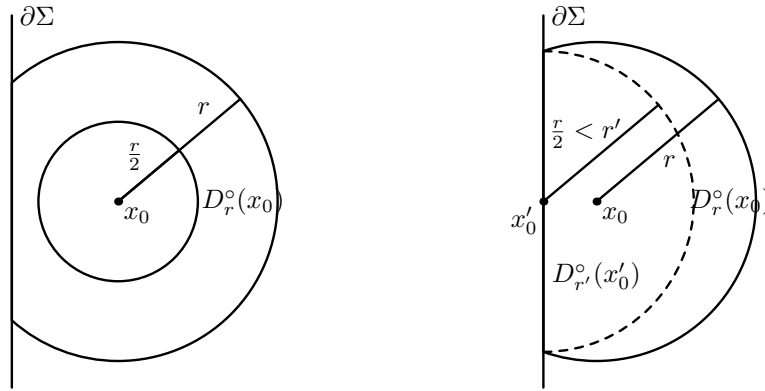


图 4.1 远离边界与靠近边界的情形

因此, 在下面我们只考虑如下两种情形

- 内部: $D_r^\circ(x_0) = B_r(x_0)$, 此时边界条件将是 Dirichlet 型的;
- 边界: $D_r^\circ(x_0) = B_r^+(x_0)$, 此时将是斜边界 (非齐次 Neumann 边界).

在转入推导具体的边界条件之前, 我们指出(1.3)是共形不变的. 令 $(x, t) \rightarrow (x_0 + rx, t_0 + r^2t)$, 它将 $D_r(x_0) \times [t_0 - r^2, t_0]$ 映射成 $D_1 \times [-1, 0]$. 则我们可以假设 $r = 1, z_0 = (0, 0)$, 且此时, 小条件为

$$\sup_{t \in [-1, 0]} \int_{D_1} |\nabla u|^2 \leq 2\varepsilon_0.$$

事实上, 定理条件中的小能量条件是

$$\sup_{t \in [t_0 - r^2, t_0]} \mathcal{E}(S(t), D_r(x_0)) = \sup_{t \in [t_0 - r^2, t_0]} \int_{D_r(x_0)} |du + [A, u] + ua|^2 \leq \varepsilon_0.$$

因为 $u \in G \hookrightarrow \text{SO}(r)$, 我们有

$$\sup_{t \in [t_0 - r^2, t_0]} \int_{D_r(x_0)} |[A, u] + ua|^2 \leq C \sup_{t \in [t_0 - r^2, t_0]} \int_{D_r(x_0)} |u|^2 \leq Cr_0^2,$$

因此如果取 r_0 充分小, 那么

$$\sup_{t \in [t_0 - r^2, t_0]} \int_{D_r(x_0)} |\nabla u|^2 \leq 2\varepsilon_0. \quad (4.4)$$

注意到 $u \in G$, 以及 $A_k, \partial_k A_k, a_k, \partial_k a_k$ 都是有界的, 我们可将标准化后的方程改写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) u = -\text{II}(u)(\nabla u, \nabla u) + \alpha \nabla u + \beta, \quad (x, t) \in P_1 := D_1 \times [-1, 0], \quad (4.5)$$

其中 $\alpha, \beta \in L^\infty$, $\text{II}(u)$ 是 $G \hookrightarrow \mathbb{R}^{r \times r}$ 在 u 处的第二基本型, ∇u 是 u 的梯度.

考虑截断函数 $\phi(x, t)$ 满足

$$\phi(x, t) = \begin{cases} 1, & (x, t) \in P_{1/2} \\ 0, & (x, t) \notin P_1. \end{cases}$$

令 $v = \phi u$, 由 (4.5), v 的方程是

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) v = -\phi \text{II}(u)(\nabla u, \nabla u) + (\alpha \phi - 2\nabla \phi) \nabla u + \phi \beta + u \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \phi,$$

它仍然具有如下的形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) v = -\phi \text{II}(u)(\nabla u, \nabla u) + \alpha \nabla u + \beta, \quad (x, t) \in P_1. \quad (4.6)$$

接下来, 我们将推导出内部情形和边界情形下 v 的边界条件. 明显地, 在内部情形, 初边值条件是如下的 Dirichlet 型

$$\begin{cases} v(x, -1) = 0, & x \in B_1 \\ v(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial B_1 \times [-1, 0]. \end{cases} \quad (4.7)$$

而在边界情形, 由(3.4), 它是如下的混合型

$$\begin{cases} v(x, -1) = 0, & x \in D_1 \\ \phi \frac{\partial v}{\partial \nu} = -\nu \lrcorner ([A, v] + va)\phi + \frac{\partial \phi}{\partial \nu} v, & (x, t) \in H_1 \times [-1, 0] \\ v(x, t) = 0, & (x, t) \in (\partial D_1 \cap \Sigma) \times [-1, 0], \end{cases}$$

其中 $H_1 = \overline{B_1^+(0)} \cap \partial \Sigma$.

为了处理坏项 $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} v$, 我们修改 ϕ 使得在 $H_1 \times [-1, 0]$ 上, 成立 $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \equiv 0$. 事实上, 很容易构造半圆盘 B_1^+ 上的截断函数 ϕ_1 使得

$$\phi_1(r) = \begin{cases} 1, & r = |x| < 1/2, \\ 0, & r = |x| > 1. \end{cases}$$

然后, 我们令 $\phi = \phi_1(r)\phi_2(t)$, 其中 $\phi_2(t)$ 是一个截断函数, 满足

$$\phi_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1/2, 0] \\ 0, & t < -1. \end{cases}$$

因此, 在边界的情形, 初边值条件可改写为

$$\begin{cases} v(x, -1) = 0, & x \in D_1 \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = -\nu \lrcorner ([A, v] + va), & (x, t) \in H_1 \times [-1, 0] \\ v(x, t) = 0, & (x, t) \in (\partial D_1 \cap \Sigma) \times [-1, 0]. \end{cases} \quad (4.7')$$

有了方程与初边值条件, 我们将应用抛物估计来完成定理的证明. 首先对 $p = 2$, (4.6), (4.7) 以及 P_1 上的整体 (Dirichlet 边界的) L^p -估计表明

$$\|\phi u\|_{W_p^{2,1}(P_1)} \leq C \|\phi^{1/2} |\nabla u|\|_{L^{2p}(P_1)}^2 + C, \quad (4.8)$$

这里我们利用了 $\|\alpha \nabla u + \beta\|_{L^p(P_1)}$ 的有界性.

我们断言上述估计对(4.6)和初边值条件(4.7')仍然成立. 为此, 首先我们通过解乘以一个已知函数将斜边值条件(4.7')转为齐次 Neumann 边值条件, 然后用反射的技巧将边界估计转化为内估计. 事实上, 将 B_1^+ 参数化为 (y, r) , 其中 r 是

x 到 H_1 的距离, y 是 H_1 上的坐标. 令 $\tilde{v} = g_1 v g_2$, 其中 $g_1 = \exp(-rA(\nu)) \in C^\infty(\bar{B}_1^+, G)$, $g_2 = \exp(-r(a(\nu) - A(\nu))) \in C^\infty(\bar{B}_1^+, G)$. 这里, g_1, g_2 的特殊取法是为了保证在边界 H_1 上成立,

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial \nu} = -\frac{\partial g_1}{\partial r} = A(\nu) \\ g_1 = \text{Id}, \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} \frac{\partial g_2}{\partial \nu} = -\frac{\partial g_2}{\partial r} = a(\nu) - A(\nu) \\ g_2 = \text{Id}, \end{cases}$$

这样初边值条件(4.7')变为

$$\begin{cases} \tilde{v}(x, -1) = 0, & x \in D_1 \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu} = 0, & \text{on } H_1 \times [-1, 0] \\ \tilde{v}(x, t) = 0, & \text{on } (\partial D_1 \cap \Sigma) \times [-1, 0]. \end{cases}$$

接下来, 我们计算 $\tilde{v}$ 的方程. 我们将要证明, 它满足和(4.6)类似的方程, 但是 α 和 β 稍有不同. 在下面的计算中, 任何具有 $\alpha \nabla u + \beta$ 的函数都称为低阶项. 由于 g_1, g_2 是光滑函数, 我们得到

$$\Delta \tilde{v} = g_1 \Delta v g_2 + l.o.t.$$

因此, $\tilde{v}$ 的方程是

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \Delta \tilde{v} = -g_1 \phi \Pi(u)(\nabla u, \nabla u) g_2 + \tilde{\alpha} \nabla u + \tilde{\beta}. \quad (4.9)$$

现在, 我们定义 $\hat{v}$ 是 $\tilde{v}$ 关于 H_1 的反射, 即,

$$\hat{v}(x, t) = \begin{cases} \tilde{v}(x, t), & x \in B_1^+ \times [-1, 0] \\ \tilde{v}(-x, t), & x \in (B_1 \setminus B_1^+) \times [-1, 0]. \end{cases}$$

容易验证 $\hat{v}$ 是(4.9)在 B_1 上的弱解, 且在 ∂B_1 上具有 Dirichlet 初边值条件. 由于 $v = \phi u = g_1^{-1} \tilde{v} g_2^{-1}$, 而且 g_1^{-1}, g_2^{-1} 都是光滑函数, 我们知道, 和内部情形一样, (4.8)在这种情况下也成立.

接下来, 我们断言

$$\int_{P_1} |\phi^{1/2} \nabla u|^{2p} \leq \varepsilon \int_{P_1} |D^2(\phi u)|^p + C. \quad (4.10)$$

注意到

$$|D^2(\phi u)| \sim \phi |D^2 u| + |D^2 \phi u| + |\nabla \phi \nabla u|,$$

而且后两项的时空 L^p 范数都是有界的, 故只需证明

$$\int_{P_1} |\phi^{1/2} \nabla u|^{2p} \leq \varepsilon \int_{P_1} |\phi D^2 u|^p + C. \quad (4.11)$$

这实际上是如下“固定 t 版本”不等式的直接推论:

$$\int_{D_1} \psi |\nabla u|^{2p} \leq \varepsilon \int_{D_1} \psi |D^2 u|^p + C, \quad (4.12)$$

其中 $\psi = [\phi(t)]^p$ 是一个空间截断函数, 而且我们假设它仅依赖于 r .

由于 ψ 可被阶梯函数逼近, (4.12) 可进一步约化为

$$\int_{D_R} |\nabla u|^{2p} \leq \varepsilon \int_{D_R} |D^2 u|^p + C, \quad \forall R \in [1/2, 1].$$

而上述不等式是如下的 Gagliardo-Nirenberg 不等式 [35, Thmorem. 1] 的直接推论: 对任何 $\mathbb{R}^n$ 中具有锥性质的区域, 成立

$$\|D^j w\|_p \leq C_1 \|D^m w\|_r^a \|w\|_q^{1-a} + C_2 \|w\|_q,$$

其中指标满足

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1-a) \frac{1}{q}, \quad 0 \leq j \leq m, \quad \frac{j}{m} \leq a \leq 1.$$

现在, 令 $w = |\nabla u|$, 以及

$$p = 2p, \quad r = p, \quad j = 0, \quad n = 2, \quad m = 1, \quad a = 1/2, \quad q = 2,$$

则

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{2p; D_R} &\leq C_1 \|D^2 u\|_{p; D_R}^{1/2} \|\nabla u\|_{2; D_R}^{1/2} + C_2 \|\nabla u\|_{2; D_R} \\ &\leq C \varepsilon_0^{1/2} \|D^2 u\|_{p; D_R}^{1/2} + C. \end{aligned}$$

由此我们得到了 $p = 2$ 时断言的证明.

综上所述, (4.8) 以及 (4.12) 表明

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(P_{1/2})} \leq C \quad (4.13)$$

最后, 我们提升先验估计 (4.13). 由 Sobolev 嵌入,

$$\|\nabla u\|_{L^4(P_{1/2})} \leq C \|u\|_{W_2^{2,1}(P_{1/2})} \leq C.$$

因此对任意的 $q > 4$, 我们可以对 $p = 4$ 重复以上过程得到 $\|\nabla u\|_{L^q}$ 的有界性,

再次重复以上过程, 我们知道 $|\nabla u|$ 是 Hölder 连续的. 更高阶的估计由抛物方程的标准理论易得. $\square$

4.3 奇点可去

调和映照的奇点可去定理 [43, Theorem 3.6] 表明定义在挖掉原点的单位圆盘上的光滑调和映照可以光滑的延拓到整个单位圆盘上, 只要该调和映照的能量有限.

注意到在局部表达式 (3.3) 中, $u|_k u^{-1} u|_k$ 是 $G \hookrightarrow M_{r \times r} \cong \mathbb{R}^{r^2}$ 的第二基本型. 而 $u \in G$, A_k , $\partial_k A_k$, a_k , $\partial_k a_k$ 都是 Σ 上的有界光滑函数. 因此, 我们可以直接引用文 [25, Theorem 1] 中的奇点可去定理.

引理 4.3 (奇点可去) 假设 B_1 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘, $u: B_1 \setminus \{0\} \rightarrow G$ 是一个能量有限的 $W_{\text{loc}}^{2,2}$ 映射. 若 u 满足 (3.3), 它可以改写为如下一般形式

$$\tau(u) := \Delta u - \Pi(u)(\nabla u, \nabla u) = \alpha \nabla u + \beta,$$

其中 $\alpha \in L^\infty(B_1, \mathbb{R}^2)$, $\beta \in L^p(B_1, TG)$ 对某个 $p > 2$, 则 u 可延拓成 $W^{2,p}(B_1, G)$ 中的映照 $\tilde{u}$.

在实际应用中, 我们还需要关于边界孤立奇点的奇点可去定理. 注意到我们的方程是共形不变的, 故可以假设边界奇点的邻域是半圆盘. 则像小能量正则性定理 (参考定理 4.2) 中一样把边界情形约化到内部情形.

推论 4.4 (边界奇点可去) 令 B_1^+ 是中心在原点的上半圆盘, 其平坦边界记为 $H_1 := B_1^+ \cap \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0\}$. 回忆, $A, a \in C^\infty(B_1^+, \mathfrak{g} \otimes T^*B_1^+)$, 这里 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数. 假设 $u: B_1^+ \setminus \{0\} \rightarrow G$ 是一个能量有限的 $W_{\text{loc}}^{2,2}$ 映照. 如果 u 满足

$$\begin{cases} \tau(u) := \Delta u - \Pi(u)(\nabla u, \nabla u) = \alpha \nabla u + \beta, & x \in B_1^+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + [A(\nu), u] + ua(\nu) = 0, & x \in H_1, \end{cases}$$

其中 $\alpha \in L^\infty(B_1^+, \mathbb{R}^2)$, $\beta \in L^p(B_1^+, TG)$ 对某个 $p > 2$, 而 ν 是 H_1 的外法向. 那么 u 可以延拓成 $\tilde{u} \in W^{2,p}(B_1^+, G)$.

第 5 章 解的奇性分析

和调和映照一样, 流(1.3)可能在有限时间产生奇点, 而且奇点产生的原因是能量在该点集中. 首先, 我们利用局部能量不等式和小能量正则性, 证明在有限个能量集中点之外, 解是光滑收敛的, 这即是定理 1.1 的 (ii). 其次, 我们证明了一个椭圆版的小能量正则性, 并将其用于研究解的爆破. 与 Qing[38] 不同的是, 我们可以研究 $t_i \rightarrow T$ 的任何爆破序列. 最后, 我们将证明上述爆破过程中所产生的 bubble 是到李群 G 的调和映照, 而且由于我们边界条件的特殊性, 可以排除边界 bubble 的存在性, 这即证明了定理 1.1 的 (iii).

注记 由于定理 1.1 的 (i) 已经在第 3 章中证明. 而从后面的讨论知道 (iv) 是平凡的. 因而到本章为止, 我们实际上完成定理 1.1 的证明.

5.1 爆破准则与奇点的有限性

我们已经证明具有光滑初值的规范变换流(1.3)的短时间存在性. 令 $[0, T_1)$ 是解的极大存在区间, 我们称 $x_0 \in \Sigma$ 是时刻 T_1 的一个奇点或者能量集中点, 如果

$$\lim_{R \rightarrow 0} \limsup_{t \uparrow T_1} \int_{D_R(x_0)} e(S(t)) \geq \varepsilon_0.$$

此时, 相应地称 T_1 为一个奇异时刻. 不是奇异点的点称为正则点. 这里 ε_0 是小能量正则性 (参考定理 4.2) 中的常数. 一个一般的原理是: 如果 T_1 是极大的, 则在 T_1 至少存在一个奇点. 其证明依赖于小能量正则性和经典的 bootstrap 技巧.

接下来, 我们将证明 T_1 时刻奇点的有限性. 令 $\mathcal{S}(S, T_1)$ 是 T_1 时刻奇点集全体, 它定义为

$$\mathcal{S}(S, T_1) = \bigcap_{r>0} \left\{ x \in \Sigma \mid \limsup_{t \uparrow T_1} \mathcal{E}(S(t); D_r(x)) \geq \varepsilon_0 \right\}.$$

对 $\mathcal{S}(S, T_1)$ 的任何子集 $\{x_i\}_{i=1}^N$,

$$\limsup_{t \uparrow T_1} \mathcal{E}(S(t); D_r(x_i)) \geq \varepsilon_0, \quad \forall 1 \leq i \leq N, \forall r > 0.$$

我们可以取 r 足够小, 使得 $\{D_{2r}(x_i)\}_{i=1}^N$ 是互不相交的, 从而局部能量不等式 (参考命题 4.1) 表明, 对任意的 $\tau \in [T_1 - \frac{\varepsilon_0 r^2}{2C\mathcal{E}(S_0; \Sigma)}, T_1)$.

$$N\varepsilon_0 \leq \sum_{i=1}^N \limsup_{t \uparrow T_1} \mathcal{E}(S(t); D_r(x_i))$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{E}(S(\tau); D_{2r}(x_i)) + \limsup_{t \uparrow T_1} C \frac{|t - \tau|}{r^2} \mathcal{E}(S_0; \Sigma) \right) \\
 &\leq \mathcal{E}(S(\tau); \cup_{i=1}^N D_{2r}(x_i)) + \frac{N}{2} \varepsilon_0 \\
 &\leq \mathcal{E}(S_0; \Sigma) + \frac{N}{2} \varepsilon_0.
 \end{aligned}$$

因而, $N \leq 2\mathcal{E}(S_0; \Sigma)/\varepsilon_0$.

最后, 如果 $x^0 \in \Sigma \setminus \mathcal{S}(S, T_1)$, 则 S 在 (x^0, T_1) 处光滑. 事实上, 因为 x^0 是正则点, 存在 $r > 0$ 使得

$$\limsup_{t \uparrow T_1} \mathcal{E}(S(t); D_{2r}(x^0)) < \varepsilon_0.$$

因此, 存在 $r^0 \in (0, \min\{r, r_0\}]$, 其中 r_0 是小能量正则性中的常数 (参考定理 4.2), 使得

$$\sup_{[T_1 - (r^0)^2, T_1)} \mathcal{E}(S(t); D_{r^0}(x^0)) < \varepsilon_0.$$

ε -正则性定理告诉我们存在弱极限 $S(\cdot, T_1)$, 它在 $\mathcal{S}(S, T_1)$ 之外光滑. 这就证明了定理 1.1 中的 (ii).

5.2 椭圆版小能量正则性

应用逆向局部能量不等式 (参考命题 4.1), 我们可以证明能量在给定时刻小这一条件会保持一定的时间. 因此, 我们可以从抛物版的小能量正则性 (参考定理 4.2) 导出一个椭圆版的小能量正则性. 这在解的爆破中是有用的, 事实上, 我们将证明, 在每个奇点附近, 对任意的 $t_i \nearrow T_1$, 可将 S 的局部表达式放大适当的倍数使得它满足上述的椭圆版小能量正则性的条件, 进而表明它的极限是到 G 的调和球.

命题 5.1 (椭圆版 ε -正则性) 假设 S 是 (1.3) 的一个极大解, 而且满足初始能量有限, 则存在常数 $\varepsilon^0 < 0$ 以及 $T' < T_1$, T' 可能依赖于具体的解, 使得对任意的 $t \in (T', T_1]$, 成立如下的椭圆版小能量正则性: 若对某个 $r < \min\{r_0, \sqrt{T_1 - T'}, i_\Sigma\}$, 这里 r_0 (以及后面的 ε_0) 都是 ε -正则性定理 (参考定理 4.2) 中的常数, 有

$$\mathcal{E}(S(t); D_r(x)) \leq \varepsilon^0, \quad (5.1)$$

则存在 $\delta_0 > 0$, 它只依赖于初始能量以及 ε_0 , 使得对常数 C_k 有

$$\sup_{\tilde{D}_{\delta_0 r}(x)} \delta_0^k r^k |\nabla_A^k S| \leq C_k, \quad \forall k \geq 1,$$

这里, 我们用 $\tilde{\cdot}$ 来记 $D_r(x)$ 缩放过后的区域, 即 $\tilde{D}_{\delta_0 r}(x) := \{\delta_0 y | y \in D_r(x)\}$.

证明 令 $\varepsilon^0 = \varepsilon_0/3$, 由沿着流能量的单调性 (参考命题 3.1) 以及积分的绝对连续性知, 存在 $T'' < T_1$, 使得

$$\int_{T''}^{T_1} \int_{\Sigma} |\partial_t S|^2 < \varepsilon^0/2.$$

令 $T' = \frac{T_1+T''}{2}$ 以及 $r'^2 = \frac{T_1-T''}{2}$. 对任意固定的 $t > T'$ 以及 $r < \min\{r_0, r', i_{\Sigma}\}$, 逆向局部能量不等式表明, 当 $s \in [t - r^2, t] \subset [T'', T_1]$ 时, 我们有

$$\mathcal{E}(S(s); D_{r/2}(x)) \leq \mathcal{E}(S(t); D_r(x)) + 2 \int_s^t \int_{D_r(x)} |\partial_t S|^2 + 4C \frac{|t-s|}{r^2} \mathcal{E}(S_0; \Sigma).$$

因此, 如果取 $\delta_0 > 0$ 充分小 ($\delta_0 < 1/4$), 使得 $16C\delta_0^2 \mathcal{E}(S_0; \Sigma) < \varepsilon^0$, 则

$$\sup_{s \in [t-4\delta_0^2 r^2, t]} \mathcal{E}(S(s); \tilde{D}_{2\delta_0 r}(x)) \leq \varepsilon_0,$$

这就验证了小能量正则性定理 4.2 中的条件, 从而要证的不等式成立. $\square$

5.3 调和球的产生

作为小能量正则性的应用, 我们将证明爆破产生的 bubble 是从 S^2 到 G 的调和映照.

我们仍然只考虑度量是欧氏的情形. 假设 $x_0 = 0$ 是 T_1 时刻坐标邻域 U 中唯一的一个奇点. 局部地, $S(x, t)$ 可以看作映照 $u(x, t) : U \times [0, T_1) \rightarrow G$. 令

$$u_i(x) = u(x, t_i), \quad x \in U, t_i \nearrow T_1.$$

由于 u_i 具有有限能量, 故 $u_i \in W^{1,2}(U) \cap C^\infty(U)$, 从而弱紧性表明 $u_i \rightharpoonup u_\infty \in W^{1,2}(U)$. 令

$$\frac{1}{\lambda_i} = \max_{\bar{U}} |\nabla u(x, t_i)| = |\nabla u(x_i, t_i)|, \quad x_i \in \bar{U}.$$

我们将 bubble 分为如下两类:

- (i) 边界: $\frac{1}{\lambda_i} \text{dist}(x_i, U \cap \partial\Sigma) \rightarrow \rho < +\infty$;
- (ii) 内部: $\frac{1}{\lambda_i} \text{dist}(x_i, U \cap \partial\Sigma) \rightarrow +\infty$.

明显地, 在两种情形下都有 $\lambda_i \rightarrow 0, x_i \rightarrow x_0$. 当我们考虑爆破过程时, 我们不区分子列与序列本身.

我们只考虑第一种情形, 因为第二种情形其实更加简单, 可由第一种情形稍加修改得到. 应该注意到第二种情形的爆破点 (能量集中点) 可能位于 Σ 的边界, 但是爆破得到的 bubble 却定义在整个平面 $\mathbb{R}^2$ 上, 这时我们仍然称其为内部 bubble. 所谓的边界 bubble 是指定义在半平面上的非平凡调和映照.

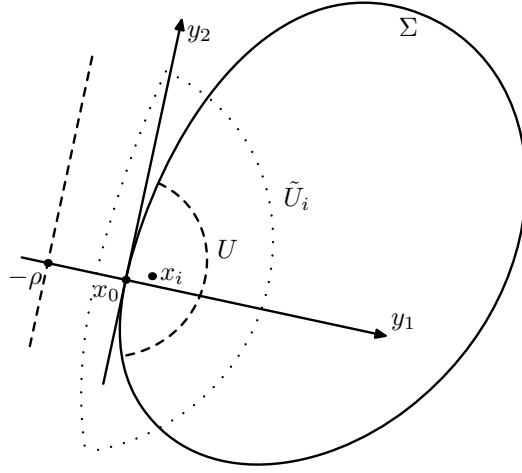


图 5.1 爆破过程

首先, 我们可以取一个恰当的坐标系 (参考图 5.1), 其原点位于 $x_0 = 0$, y_1 轴指向 Σ 的内部, y_2 轴和 $\partial\Sigma$ 在 x_0 处相切. 令

$$w_i(x, t) := u(x_i + \lambda_i x, t_i + \lambda_i^2 t), \quad (x, t) \in \tilde{U}_i \times I_i, \quad (5.2)$$

其中 $\tilde{U}_i := \{y \in \mathbb{R}^2 | x_i + \lambda_i y \in U\}$, $I_i := \{t \in \mathbb{R}^1 | t_i + \lambda_i^2 t \in [0, T_1]\}$. 为了导出 w_i 所满足的方程, 回忆规范变换流(1.3)的局部表达式是(4.5)(参考定理 4.2 的证明), 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \Pi(u)(\nabla u, \nabla u) + \alpha \nabla u + \beta, \quad (x, t) \in U \times [0, T_1].$$

因此, w_i 满足

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = \Delta w_i - \Pi(w_i)(\nabla w_i, \nabla w_i) + \lambda_i \alpha \nabla w_i + \lambda_i^2 \beta. \quad (5.3)$$

在伸缩变换(5.2)下, 斜边值条件(3.4)变为,

$$0 = \nu \lrcorner (w_i^{-1}(dw_i/\lambda_i + [A, w_i]) + a)|_{(x,t)}, \quad (x, t) \in \tilde{U}_{\partial,i} \times I_i, \quad (5.4)$$

其中 $\tilde{U}_{\partial,i} := \{y \in \mathbb{R}^2 | x_i + \lambda_i y \in \bar{U} \cap \partial\Sigma\}$ 是 $\tilde{U}_i$ 的边界中对应于 $\partial\Sigma \cap \bar{U}$ 的部分.

对任意固定的 $R > 0$,

$$\sup_{D_R} |\nabla w_i(\cdot, 0)| = \sup_{\tilde{D}_{\lambda_i R}(x_i)} \lambda_i |\nabla u_i| \leq 1.$$

这表明命题 5.1 中的小能量条件对 $w_i(x, 0)$, $x \in D_{R/2}$ 以及充分小的 r 成立. 因此 $w_i(\cdot, 0)$ 在 $\mathbb{R}_+^2 := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | y_1 > -\rho\}$ 上局部光滑地收敛到 $w_\infty^0(\cdot)$. 此外, 从命题 5.1 的证明还知道, 存在某 $\delta_0 > 0$, 使得 $\sup_{[-4\delta_0^2 r^2, 0)} \mathcal{E}(w_i; \tilde{D}_{2\delta_0 r}(x)) < \varepsilon_0$, 对任意的 $x \in D_{R/2}$ 以及如上的小 r 都成立. 因此定理 4.2 表明, 在 $P_{\delta_0 R}$ 中, w_i 光滑地收敛到 w_∞ 且

$$\int_{P_{\delta_0 R}} \left| \frac{\partial w_\infty}{\partial t} \right|^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{P_{\delta_0 R}} \left| \frac{\partial w_i}{\partial t} \right|^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{P_{\lambda_i \delta_0 R}(x_i, t_i)} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 = 0,$$

其中最后一个等式是由于积分的绝对连续性以及

$$\int_0^{T_1} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial S}{\partial t} \right|^2 < +\infty.$$

由此可见, $w_{\infty}^0(\cdot) = w_{\infty}(\cdot, 0)$ 是一个从 $\mathbb{R}_+^2$ 到 G 能量有限的调和映照. 事实上, $|\nabla w_i(\cdot, 0)|_{L^{\infty}(D_R)} \leq |\nabla w_i(0, 0)| = 1$ 以及 $\alpha \in L^{\infty}(D_R)$, $\beta \in L^{\infty}(D_R)$ 明显地表明(5.3)中 w_i 的低阶项在 $i \rightarrow \infty$ 时将趋于 0. 由(5.4), w_{∞}^0 的边界条件是如下的 Neumann 型

$$\frac{\partial w_{\infty}^0}{\partial \nu} := \nu \lrcorner dw_{\infty} = \lim_{i \rightarrow \infty} \nu \lrcorner dw_i = - \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i(\nu \lrcorner [w_i, A] + w_i a) = 0.$$

因此, 我们通过反射可将 w_{∞}^0 延拓到定义域为 $\mathbb{R}^2$. 由 C^1 调和映照的正则性知它仍然是一个调和映照. 而由调和映照的可去奇点定理 [43, Theorem 3.6] 知, w_{∞}^0 是一个 bubble, 即从 S^2 到 G 的非常值调和映照.

5.4 边界 bubble 的不存在性

我们可以进一步排除边界 bubble. 事实上, 假设 w_{∞}^0 是一个从到 G 的非常值调和球. 令 Φ 是其相应的全纯 2 形式 (holomorphic quadrati differential), 则 Φ 在 S^2 上恒为零 [18, Lemma 9.15, p. 500]. 特别地, 这表明 w_{∞}^0 是弱共形的, 即 $(w_{\infty}^0)^* h_N = \lambda(x) g_{S^2}$, $\lambda \geq 0$. 由于对边界 bubble, 在赤道上, 我们有 $\frac{\partial w_{\infty}^0}{\partial \nu} = 0$, 因此 $\lambda(x) g_{S^2}(\nu, \nu) = h_N((w_{\infty}^0)_*(\nu), (w_{\infty}^0)_*(\nu)) = 0$, 故在赤道上 $\lambda = 0$. 而这说明沿着赤道切向导数也为零. 最后, 调和映照中一个经典的定理表明, 在区域的边界为常值的调和映照是平凡的 (参考 [18, Theorem 9.1.3, p. 503]). 特别地, 这就证明了每个奇点至少产生一个 bubble, 故我们完成了定理 1.1 中 (iii) 的证明. 至此, 我们完成了定理 1.1 的证明.

第6章 奇异解的延拓

Struwe[49, Theorem 4.2] 在研究调和映照流时, 他考虑了从 $W^{1,2}$ 的初值出发, 并证明了整体弱解的存在性. 这里, 我们考虑从光滑初值出发, 解流方程(1.3)直至第一个奇异时刻, 然后通过光滑截面来逼近弱解进而得到流的广义解. 直观上, 当用逼近来磨光奇点时, bubble 的能量也被去掉了. 因而沿着流整体能量仍然是单调递减的. 然而, 在截断—粘接过程中也会消耗一部分能量. 从而为了保证广义解的能量沿着流是单调递减的, 我们需要精确控制能量的消耗. 此外, 对能量集中点位于边界的情形, 我们也需要处理广义解的边界条件.

如果短时间解 $S(t)$ 在 $T_1 < +\infty$ 时刻爆破, 由定理 1.1 的 (ii) 我们知道 $S(T_1) \in W^{1,2}(\text{Aut}_G E)$. 像 Struwe 一样, 我们应该可以用 [45, Lemma 3.2] 的推广形式来得到 $S(T_1)$ 的光滑逼近截面, 进而用它们来研究流的极限. 这里, 我们的做法稍有不同. 更确切地, 我们将用某种震荡估计来具体地构造逼近序列, 然后以该序列为初值继续解流方程.

接下来, 我们首先证明 $S(T_1)$ 在奇点附近的震荡估计, 然后证明重要的逼近引理 (参考引理 1.2). 一旦有了逼近引理, 我们比较容易证明广义解的存在性, 即定理 1.3.

6.1 奇点附近的震荡估计

尽管一般而言我们并不知道弱极限 $S(T_1)$ 在奇点附近是不是连续的, 但是我们却可以在奇点的一个环形邻域里控制它的振幅, 这对我们证明逼近引理是至关重要的.

命题 6.1 假设 x_0 是时刻 T_1 时的一个孤立奇点, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\text{OSC}_{D_\delta(x_0) \setminus D_{\delta/2}(x_0)} S(T_1) := \sup_{x_1, x_2 \in D_\delta(x_0) \setminus D_{\delta/2}(x_0)} |S(x_1, T_1) - S(x_2, T_1)| < \varepsilon. \quad (6.1)$$

证明 这里的证明基于 Qing 关于调和映照流的解在有限时刻奇点附近的梯度估计 (参考 [39, Theorem 3.4]). 因为弱极限 $S(T_1) := S(\cdot, T_1)$ 的能量有限, 我们可取 r_0 充分小, 使得对命题 5.1 中给定的 $\varepsilon^0 > 0$, 有

$$\mathcal{E}(S(T_1); D_{|x-x_0|}(x)) \leq \varepsilon^0, \quad \forall x \in D_{r_0}(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

因此存在常数 $C_2 > 0$ 以及 $\delta_0 > 0$ (它们都不依赖于圆心 x 和半径 $|x - x_0|$), 使得,

$$|\nabla_A^2 S|(y, T_1) \leq \frac{C_2}{\delta_0^2 |x - x_0|^2}, \quad \forall y \in \tilde{D}_{\delta_0 |x - x_0|}(x).$$

我们断言当 $x \rightarrow x_0$ 时, $|\nabla_A S|(x, T_1) \leq \frac{o(1)}{|x - x_0|}$. 事实上, 若非如此, 则存在 $\bar{\varepsilon} > 0$ 以及序列 $x_k \rightarrow x_0, k \rightarrow \infty$, 使得

$$|x_k - x_0| |\nabla_A S|(x_k, T_1) > \bar{\varepsilon}, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

对任意的 $y \in \tilde{D}_{\nu |x_k - x_0|}(x_k)$, 其中 $\nu < \min \left\{ \delta_0, \frac{\delta_0^2}{2C_2} \bar{\varepsilon} \right\}$ 是一个固定的小数, 由中值定理, 存在 $z_k \in \tilde{D}_{\nu |x_k - x_0|}(x_k)$,

$$\begin{aligned} |\nabla_A S|(y, T_1) &= |\nabla_A S|(x_k, T_1) + (y - x_k) \cdot \nabla |\nabla_A S|(z_k, T_1) \\ &\geq \frac{\bar{\varepsilon}}{|x_k - x_0|} - |y - x_k| |\nabla_A^2 S|(z_k, T_1) \quad (\text{Kato 不等式}) \\ &\geq \frac{1}{|x_k - x_0|} (\bar{\varepsilon} - C_2 \nu / \delta_0^2) \geq \frac{\bar{\varepsilon}}{2|x_k - x_0|}. \end{aligned}$$

在 $\tilde{D}_{\nu |x_k - x_0|}$ 上积分得到,

$$\int_{\tilde{D}_{\nu |x_k - x_0|}(x_k)} |\nabla_A S(\cdot, T_1)|^2 \geq C \bar{\varepsilon}^2 \nu^2, \quad (6.2)$$

这里常数 C 仅依赖于 Σ 的几何.

最后, 注意到

$$\int_{\Sigma} |\nabla_A S(\cdot, T_1)|^2 \leq 2 \int_{\Sigma} \{ |S(\cdot, T_1) a|^2 + 2e(S(\cdot, T_1)) \} < +\infty.$$

由积分的绝对连续性知,

$$\int_{\tilde{D}_{\nu |x_k - x_0|}(x_k)} |\nabla_A S(\cdot, T_1)|^2 \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

这与(6.2)矛盾.

现在考察两点 $x_1, x_2 \in D_\delta(x_0) \setminus D_{\delta/2}(x_0)$, 令 $\gamma(t)$ 是 $D_\delta(x_0) \setminus D_{\delta/2}(x_0)$ 中连接 x_1, x_2 的一条道路, 并假设其具有弧长参数. 明显地, 我们可以假设曲线 γ 的长度 $L(\gamma) \leq l_0 \delta$, 其中 l_0 是一个仅依赖于 Σ 度量的常数. 我们还可进一步假设 $D_\delta(x_0)$ 完全落在某个局部平凡化 U_α 中, 则

$$(\nabla_{\dot{\gamma}(t); A} S)|_{U_\alpha} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} S|_{U_\alpha}(\gamma(t)) + \dot{\gamma}(t) \lrcorner [A, S]|_{U_\alpha},$$

其中 A 是 U_α 上定义的 $\mathfrak{g}$ -值的 1-形式. 因此, 在 U_α 中,

$$\left| \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} S(\gamma(t)) \right| \leq |\nabla_{\dot{\gamma}(t); A} S| + C,$$

其中 C 是依赖于联络 A 以及结构群 G 的常数. 现在, 取 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使得 $2Cl_0\delta < \varepsilon$, 则(6.1) 可由如下计算得到:

$$\begin{aligned} |S(x_1, T_1) - S(x_2, T_1)| &\leq \int_0^{L(\gamma)} \left| \frac{\partial}{\partial t} S(\gamma(t), T_1) \right| dt \\ &= \int_0^{L(\gamma)} (|\nabla_{\dot{\gamma}(t); A} S(\cdot, T_1)| + C) dt \\ &\leq \int_0^{L(\gamma)} \left(\frac{o(1)}{|\gamma(t) - x_0|} + C \right) dt \\ &\leq \left(\frac{2o(1)}{\delta} + C \right) l_0 \delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

6.2 逼近引理的证明

在本节中, 我们将证明逼近引理 (参考引理 1.2).

根据奇点的位置, 我们将分两类情形来讨论. 因为在内部的情形, 相比于边界情形, 我们不需要担心边界条件.

首先, 让我们考虑比较简单的内部情形. 假设 x_0 是一个内部奇点, 不失一般性, 可以假设 $D_{2\delta}(x_0) = B_{2\delta}(x_0)$ 完全包含在平凡化邻域 U 中, 而且 $S(\cdot, T_1)|_U$ 的局部表达式是 $u: U \rightarrow G$. 对任何 $\bar{u} \in G$, 存在一致常数 $\eta_1 > 0$ 使得 $\bar{u}$ 处的指数映照是从 $\mathfrak{g}$ 中原点附近的邻域到 $B_{\eta_1}(\bar{u})$ 的微分同胚. 对该 η_1 , 由命题 6.1, 可进一步取小 $\delta = \delta_1 > 0$, 使得 $u|_{D_\delta(x_0) \setminus D_{\delta/2}(x_0)} \in B_{\eta_1}(u^0) \subset G$, 其中 x^0 是 $D_\delta(x_0) \setminus D_{\delta/2}(x_0)$ 中一固定点, $u^0 = u(x^0) \in G$. 令 ϕ 是满足如下条件的截断函数,

$$\phi = \begin{cases} 0, & D_{\delta/2}(x_0) \\ 1, & D_\delta^c(x_0), \end{cases} \quad \text{且} \quad |\nabla \phi| < \frac{4}{\delta}$$

并定义

$$\tilde{u}(x) = \exp_{u^0}(\phi(x) \exp_{u^0}^{-1} u(x)), \quad x \in D_{2\delta}(x_0),$$

则

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u^0, & x \in D_{\delta/2}(x_0) \\ u(x), & x \in D_{2\delta}(x_0) \setminus D_\delta(x_0). \end{cases}$$

我们断言, 在 $D_\delta(x_0)$ 中由局部表达式 $\tilde{u}$ 决定的规范变换 $\tilde{S}(\cdot, T_1)$ 在 $D_\delta(x_0)$ 之外和 $S(\cdot, T_1)$ 相等. 事实上, 它恰好可以作为逼近引理 (引理 1.2) 中的截面.

为了证明这一断言, 只需估计在这一截断过程中能量的消耗. 为此, 我们计算如下:

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{E}(\tilde{S}(\cdot, T_1); D_{2\delta}(x_0)) &= \int_{D_{2\delta}(x_0)} |\tilde{u}^{-1}(\mathrm{d}\tilde{u} + [A, \tilde{u}] + a)|^2 \mathrm{d}x \\
 &= \left[\int_{D_{2\delta}(x_0) \setminus D_{\delta}(x_0)} + \int_{D_{\delta}(x_0) \setminus D_{\delta/2}(x_0)} + \int_{D_{\delta/2}(x_0)} \right] |\mathrm{d}\tilde{u} + [A, \tilde{u}] + \tilde{u}a|^2 \mathrm{d}x \\
 &= 2\mathcal{E}(S(\cdot, T_1); D_{2\delta}(x_0) \setminus D_{\delta}(x_0)) + \int_{D_{\delta/2}(x_0)} |[A, u^0] + u^0 a|^2 \mathrm{d}x \\
 &\quad + \int_{D_{\delta}(x_0) \setminus D_{\delta/2}(x_0)} |\mathrm{d}\tilde{u} + [A, \tilde{u}] + \tilde{u}a|^2 \mathrm{d}x.
 \end{aligned}$$

由我们对 δ 的选取, 对任意的 $x \in D_{\delta}(x_0) \setminus D_{\delta/2}(x_0)$, 有 $\tilde{u}, u \in B_{\eta}(u^0)$. 因此, $|\tilde{u}|$ 可由一个只依赖于 G 的常数控制. 此外, 对充分小的 $\eta = \eta_2 < \eta_1$, 微分 $|d \exp_{u^0}|_{\mathfrak{g}_{\eta}}|$ 与 $|d \exp_{u^0}^{-1}|_{B_{\eta}(u^0)}|$ 都被一个一致常数控制. 因此,

$$\begin{aligned}
 |\mathrm{d}\tilde{u} + [A, \tilde{u}] + \tilde{u}a| &\leq C + |d\tilde{u}| \leq C(1 + |d\phi| |\exp_{u^0}^{-1} u| + |du|) \\
 &\leq C(1 + \eta/\delta + |du + [A, u] + ua|).
 \end{aligned}$$

对任意给定的 $\sigma > 0$, 存在某个 $0 < \delta^0 < \delta_1$ 以及 $0 < \eta^0 < \eta_2$, 使得对任意的 $\delta < \delta^0$ 与 $\eta < \eta^0$, 有 (回忆, N 是爆破点的个数),

$$\int_{D_{\delta}(x_0) \setminus D_{\delta/2}(x_0)} |d\tilde{u} + [A, \tilde{u}] + \tilde{u}a|^2 \mathrm{d}x \leq C(\delta^2 + \eta^2 + E(u; D_{\delta}(x_0))) < \frac{\sigma}{3N},$$

以及

$$\int_{B_{\delta/2}(x_0)} |[A, u^0] + u^0 a|^2 \mathrm{d}x \leq C\delta^2 \leq \frac{\sigma}{3N}, \quad \mathcal{E}(S(\cdot, T_1); D_{\delta}(x_0)) \leq \frac{\sigma}{3N}.$$

因此,

$$0 \leq \mathcal{E}(\tilde{S}; D_{2\delta_0}(x_0)) - \mathcal{E}(S(\cdot, T_1); D_{2\delta_0}(x_0) \setminus D_{\delta_0}(x_0)) \leq \frac{2\sigma}{3N}, \quad \forall \delta_0 < \delta^0.$$

特别地,

$$\left| \mathcal{E}(\tilde{S}; D_{2\delta_0}(x_0)) - \mathcal{E}(S(\cdot, T_1); D_{2\delta_0}(x_0)) \right| \leq \frac{\sigma}{N}. \quad (6.3)$$

这就在爆破点位于 Σ 内部时证明了引理 1.2.

当爆破点位于 Σ 的边界时, 我们已在第 5.4 节证明了没有边界 bubble. 然而此时却可能在该点处存在内部 (完整的) bubble. 为了处理边界条件, 我们需要分三步来完成逼近截面的构造. 首先, 然我们像内部情形一样修改, 并记得到的规范变换为 S_1 .

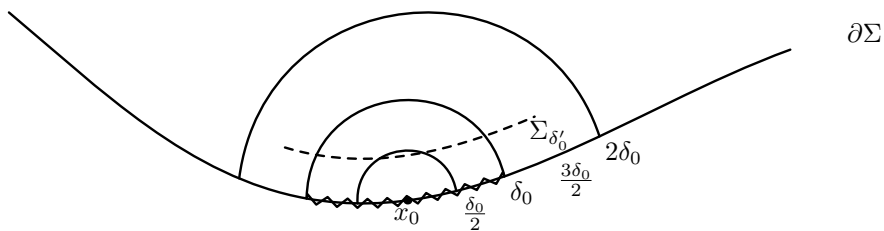


图 6.1 边界爆破点处的截断

我们主要关心的是 $D_{2\delta_0}(x_0)$ 以内的区域. 令 u, w 分别是 $S(\cdot, T_1)$ 和 S_1 在 $D_{2\delta_0}(x_0)$ 上的局部表示. 注意到, 在第一步改造中, 我们利用截断函数切掉了奇点, 但是边界条件却变坏了. 在接下来的一步中, 我们将匹配边界条件, 而且要求它和第一步构造的映照非常接近. 回忆, 我们的边界条件是

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + [A(\nu), u] + ua(\nu) = 0.$$

令 $V(u) := [A(\nu), u] + ua(\nu)$, 它是 G 在 u 处的一个切向量. 我们将通过加 ' 来记位于 $\partial\Sigma$ 上的那部分边界. 例如 $\partial' D_{2\delta_0} = \partial D_{2\delta_0} \cap \partial\Sigma$. 令 $x = (y, r)$ 是 $\partial' D_{2\delta_0}$ 附近的坐标, 其中 r 是 x 到 $\partial' D_{2\delta_0}$ 的距离, 而 y 是 $\partial' D_{2\delta_0}$ 上的坐标. 则我们的新映照定义如下:

$$q(y, r) = \exp_{w(y,0)}(rV(w(y,0))), \quad y \in \partial' D_{2\delta_0}(x_0).$$

容易验证如下基本性质:

- $q(y, 0) = w(y, 0)$;
- q 满足边界条件. 事实上, 在边界上,

$$\frac{\partial q}{\partial \nu} = -\frac{\partial q}{\partial r} = -V(w(y,0)) = -V(q(y,0)).$$

最后, 令

$$v(y, r) = \exp_{u^0}(\xi\varphi \exp_{u^0}^{-1} q + (1 - \xi\varphi) \exp_{u^0}^{-1} w),$$

其中 ξ 是一个截断函数, 满足

$$\xi = \begin{cases} 1, & x \in \Sigma_{\delta'_0} \\ 0, & x \in \Sigma \setminus \Sigma_{2\delta'_0}, \end{cases} \quad |\nabla \xi| \leq \frac{2}{\delta'_0}, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

这里 δ'_0 充分小 ($\delta'_0 < \min\{1, \delta_0\}$), 而 $\Sigma_{\delta'_0}$ 定义为 Σ 中到 $\partial\Sigma$ 的距离不超过 δ'_0 的点的全体. $\varphi = \varphi(y)$ 是 $\partial\Sigma$ 上的一个截断函数, 满足

$$\varphi = \begin{cases} 1, & y \in \partial' D_{3\delta_0/2}, \\ 0, & y \in \partial\Sigma \setminus \partial' D_{2\delta_0}, \end{cases} \quad |\nabla \varphi| \leq \frac{4}{\delta_0}, \quad 0 \leq \varphi \leq 1.$$

注意到, 对 $y \in \partial' D_{2\delta_0}(x_0)$, $w(y, 0)$ 以及 $d \exp|_{w(y,0)}$ 都被 $|u^0|$, $1 + \eta$ 与依赖于 G 的几何的常数三者的乘积界定. 在下面, 我们用 $a \lesssim b$ 来表示 a 小于等于 b 乘以 $1 + \eta$, δ_0 以及某个仅依赖于 A, a, u^0, G 而不依赖于 δ'_0 的常数. 为了简单起见, 我们省略 L^∞ 模的区域 $\Sigma_{2\delta'_0} \cap D_{2\delta_0}(x_0)$. 直接计算得到,

$$\begin{aligned} \|\nabla q\|_{L^\infty} &\lesssim \|V(w(y, 0))\|_{L^\infty} + \delta'_0 \|\nabla_y [V(w(y, 0))]\|_{L^\infty} \\ &\quad + \|\nabla_y w(y, 0)\|_{L^\infty} \exp(\delta'_0 \|V(w(y, 0))\|_{L^\infty}) \\ &\lesssim \|w(y, 0)\|_{L^\infty(\partial' D_{2\delta_0}(x_0))} \\ &\quad + (\delta'_0 + \exp(\delta'_0 \eta C(A, a, u^0))) \|\nabla_y w(y, 0)\|_{L^\infty(\partial' D_{2\delta_0}(x_0))}. \end{aligned}$$

因此 $\exp_{u^0}^{-1} q$ 在 $\eta, \delta'_0, \delta_0$ 充分小时是可定义的.

为了验证 v 满足边界条件, 我们只需关心在 $\partial' D_{2\delta_0} \setminus \partial' D_{3\delta_0/2}$ 上的情况. 在这部分边界上, 我们有 $\partial_r(\xi\varphi) = 0$, $q = w = v$, 因此 $V(q) = V(w) = V(v)$, 且

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= d \exp_{u^0}|_{\exp_{u^0}^{-1} q} \left\{ \partial_r(\xi\varphi) [\exp_{u^0}^{-1} q - \exp_{u^0}^{-1} w] \right. \\ &\quad \left. + \xi\varphi \partial_r \exp_{u^0}^{-1} q + (1 - \xi\varphi) \partial_r \exp_{u^0}^{-1} w \right\} \\ &= d \exp_{u^0}|_{\exp_{u^0}^{-1} q} \left\{ \xi\varphi d \exp_{u^0}^{-1}|_q \frac{\partial q}{\partial r} + (1 - \xi\varphi) d \exp_{u^0}^{-1}|_w \frac{\partial w}{\partial r} \right\} \\ &= d \exp_{u^0}|_{\exp_{u^0}^{-1} q} d \exp_{u^0}^{-1}|_q \{ \xi\varphi V(q) + (1 - \xi\varphi) V(w) \} \\ &= d[\exp_{u^0} \circ \exp_{u^0}^{-1}]|_q V(v) \\ &= V(v), \end{aligned}$$

这即是说

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = -\frac{\partial v}{\partial r} = -V(v),$$

这就验证了边界条件.

我们还需要证明 v 在 $D_{2\delta_0}(x_0)$ 中的能量充分小. 事实上,

$$\begin{aligned} |\nabla v| &\lesssim |\nabla(\xi\varphi) (\exp_{u^0}^{-1} q - \exp_{u^0}^{-1} w)| + |\xi\varphi \nabla q| + (1 - \xi\varphi) |\nabla w|, \\ |\exp_{u^0}^{-1} q(y, r) - \exp_{u^0}^{-1} q(y, 0)| &\lesssim |\nabla q| r, \\ |\exp_{u^0}^{-1} w(y, r) - \exp_{u^0}^{-1} w(y, 0)| &\lesssim |\nabla w| r. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_{D_{2\delta_0}(x_0)} |\nabla v|^2 &\lesssim 2 \int_{D_{2\delta_0}(x_0)} |\nabla(\xi\varphi)|^2 (|\nabla q|^2 + |\nabla w|^2) r^2 + |\xi \nabla q|^2 \\ &\quad + 2 \int_{D_{2\delta_0}(x_0)} |\nabla w|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lesssim 2 \int_{\Sigma_{2\delta'_0} \cap D_{2\delta_0}(x_0)} 2(|\nabla \xi|^2 + |\nabla \varphi|^2)(|\nabla q|^2 + |\nabla w|^2) \delta_0'^2 + |\nabla q|^2 \\
 &\quad + 2 \int_{D_{2\delta_0}(x_0)} |\nabla w|^2 \\
 &\lesssim \left[1 + \delta_0'^2 \left(\frac{1}{\delta_0'^2} + \frac{1}{\delta_0^2} \right) \right] \left\{ \int_{\Sigma_{2\delta'_0} \cap D_{2\delta_0}(x_0)} |\nabla q|^2 + \int_{D_{2\delta_0}(x_0)} |\nabla w|^2 \right\} \\
 &\lesssim \left(1 + \frac{\delta_0'^2}{\delta_0^2} \right) \left\{ \int_{\Sigma_{2\delta'_0} \cap D_{2\delta_0}(x_0)} |\nabla q|^2 + \int_{D_{2\delta_0}(x_0)} |\nabla w|^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

我们已经证明, 在 $\Sigma_{2\delta'_0} \cap D_{2\delta_0}(x_0)$ 上,

$$\begin{aligned}
 |\nabla q(y, r)| &\lesssim |w(y, 0)| + (\delta'_0 + \exp(\delta'_0 \eta C(A, a, u^0))) |\nabla_y w(y, 0)| \\
 &\leq C(A, a, u^0)(1 + \eta) \left[1 + (\delta'_0 + \exp(\delta'_0 \eta C(A, a, u^0))) \left(\frac{\eta}{\delta_0} + \frac{1}{\delta_0} \right) \right].
 \end{aligned}$$

由于我们可以假设 $\eta < 1$ 和 $\delta'_0 < 1$,

$$|\nabla q(x)|^2 \leq C(A, a, u^0) \left(1 + \frac{1}{\delta_0^2} \right), \quad \forall x \in \Sigma_{2\delta'_0} \cap D_{2\delta_0}(x_0).$$

我们首先取 δ_0 充分小, 使得

$$\int_{D_{2\delta_0}(x_0)} |\nabla w|^2 \leq \frac{\sigma}{9NC(A, a, u^0)}.$$

因此, 我们可取 δ'_0 充分小 (依赖于 δ_0), 使得

$$\begin{aligned}
 \int_{D_{2\delta_0}(x_0)} |\nabla v|^2 &\leq C(A, a, u^0) \left[\left(1 + \frac{1}{\delta_0^2} \right) \left(1 + \frac{\delta_0'^2}{\delta_0^2} \right) \delta_0 \delta'_0 \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 + \frac{\delta_0'^2}{\delta_0^2} \right) \int_{D_{2\delta_0}(x_0)} |\nabla w|^2 \right] \\
 &\leq \frac{\sigma}{9N} + \frac{\sigma}{9N} + C(A, a, u^0) \frac{\delta_0'^2}{\delta_0^2} \int_{D_{2\delta_0}(x_0)} |\nabla w|^2 \leq \frac{\sigma}{3N}.
 \end{aligned}$$

令 $\tilde{S}$ 是在 $D_{2\delta_0}(x_0)$ 中与局部表达式 v 对应的规范变换. 则明显(6.3)成立. 这样我们就完成了逼近引理的证明.

6.3 广义解的存在性

接下来, 我们首先证明对任何 $\sigma < \varepsilon_0$ (小能量正则性中的常数), 在逼近过程中的能量损失至少为 $\varepsilon_0 - \sigma$. 然后我们证明定理 1.3 中陈述的广义解存在且沿着流其能量是单调递减的.

为了计算能量的损耗, 注意 x_0 是一个奇点, 我们知道存在子序列 $\{t_i\} \nearrow T_1$, 使得对任何 $\delta' < \delta_0$ (δ_0 是逼近引理中在 x_0 处的常数),

$$\lim_{t_i \nearrow T_1} \mathcal{E}(S(\cdot, t_i); D_{\delta'}(x_0)) \geq \varepsilon_0.$$

另一方面, 由于 x_0 是 $D_{2\delta_0}(x_0)$ 中唯一的一个奇点, 小能量正则性表明 $S(\cdot, t)$ 在 $D_{2\delta_0}(x_0) \setminus D_{\delta'}(x_0)$ 上强收敛 (C^∞) 到 $S(\cdot, T_1)$

$$\begin{aligned} \lim_{t_i \nearrow T_1} \mathcal{E}(S(\cdot, t_i); D_{2\delta_0}(x_0)) &= \lim_{t_i \nearrow T_1} \mathcal{E}(S(\cdot, t_i); D_{2\delta_0}(x_0) \setminus D_{\delta'}(x_0)) \\ &\quad + \lim_{t_i \nearrow T_1} \mathcal{E}(S(\cdot, t_i); D_{\delta'}(x_0)) \\ &\geq \mathcal{E}(S(\cdot, T_1); D_{2\delta_0}(x_0) \setminus D_{\delta'}(x_0)) + \varepsilon_0. \end{aligned}$$

令 $\delta' \rightarrow 0$, 则由(6.3), 我们得到在逼近弱解的过程中能量损耗满足

$$\lim_{t_i \nearrow T_1} \mathcal{E}(S(\cdot, t_i); D_{2\delta_0}(x_0)) \geq \mathcal{E}(\tilde{S}(\cdot, T_1); D_{2\delta_0}(x_0)) + \varepsilon_0 - \sigma.$$

因此,

$$\lim_{t_i \nearrow T_1} \mathcal{E}(S(\cdot, t_i); \Sigma) \geq \mathcal{E}(\tilde{S}(\cdot, T_1); \Sigma) + N(T_1)(\varepsilon_0 - \sigma), \quad (6.4)$$

其中 $N(T_1)$ 是在时刻 T_1 时爆破点的个数.

接下来, 我们转入对广义解的存在性的证明. 我们解流方程(1.3)直到第一奇异时刻, 然后我们取逼近引理中的截面 $\tilde{S}$ 作为新的初值, 并再次求解流方程. 命题 3.1 表明

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(S(\cdot, t); \Sigma) = - \int_{\Sigma} |\partial_t S|^2 \leq 0.$$

令 $I_k := [T_k, T_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, K$, 其中 T_k 是奇异时刻 (除了 $T_0 = 0$ 与 $T_{K+1} = +\infty$). 为了简化记号, 我们记 S 为广义解, 因此对奇异时刻 T_k , $S(T_k)$ 应该理解为引理 1.2 中的 σ 逼近规范变换. 首先, 对形如(6.4)中的爆破时间序列 $t_i \nearrow T_1$, 将 S 在 $[T_0, t_i]$ 上积分,

$$\int_{T_0}^{t_i} \int_{\Sigma} |\partial_t S|^2 = \mathcal{E}(S(T_0); \Sigma) - \mathcal{E}(S(t_i); \Sigma),$$

两边同时取极限并应用(6.4),

$$\mathcal{E}(S(T_1); \Sigma) \leq \mathcal{E}(S(T_0); \Sigma) - N(T_1)(\varepsilon_0 - \sigma).$$

在 I_k , $k = 1, 2, \dots, K-1$, 上应用同样的论证得

$$\mathcal{E}(S(T_{k+1}); \Sigma) \leq \mathcal{E}(S(T_k); \Sigma) - N(T_{k+1})(\varepsilon_0 - \sigma).$$

求和得到

$$\mathcal{E}(S(T_K); \Sigma) \leq \mathcal{E}(S_0; \Sigma) - (\varepsilon_0 - \sigma) \sum_{k=1}^K N(T_k).$$

最后, 对 I_K , 由于能量在 I_K 上单调递减,

$$\int_{T_K}^{\infty} \int_{\Sigma} |\partial_t S|^2 \leq \mathcal{E}(S(T_K); \Sigma) \leq \mathcal{E}(S_0; \Sigma) - (\varepsilon_0 - \sigma) \sum_{k=1}^K N(T_k) < +\infty,$$

这就表明存在 $t_i \rightarrow \infty$, 使得

$$\|(\partial_t S)(\cdot, t_i)\|_{L^2(\Sigma)} \rightarrow 0.$$

完全类似于张力场属于 L^2 的调和映照列的爆破 (其过程完全类似于第 5.3 节中讨论的有限时间爆破), 我们知道当 $t_i \rightarrow \infty$ 时 $S^i := S(\cdot, t_i)$ 在有限个奇点之外光滑收敛到 S_{∞} . 由奇点可去定理 (参考引理 4.3 和推论 4.4), S_{∞} 是方程 (1.1) 在 Σ 上的解. 这就证明了定理 1.3.

第 7 章 Uhlenbeck-Rivière 分解的热流证明

在 [41] 中, 圆盘上关于“小”联络的库伦规范的存在性在证明守恒律的存在性中起着重要作用. 其基本思想是在好的规范下有好的估计. 而后守恒律可由椭圆偏微分方程组的不动点定理导出.

我们也可用热流方法给出前面提到的库伦规范的存在性. 事实上, 将前面证明的方程(1.3)的广义解的存在性应用于一个特例, 我们将要给出一个流版本的证明. 直接极小化的证明可以参考 [9, Proposition 2], 而 Rivière 的原始证明可以参考 [41, Theorem 2.1].

在下面, 我们将取 Σ 是 $\mathbb{R}^2$ 中一小圆盘, 不一定具有欧氏度量. E 是 Σ 上秩为 m 而结构群为 $\mathrm{SO}(m)$ 的向量丛. E 上一联络可以写为 $d + \Omega$, 其中 $\Omega \in \mathfrak{so}(m) \otimes T^*\Sigma$ 是一个取值在 $\mathfrak{so}(m)$ 中的 1-形式. 则对任一规范变换 S ,

$$S^*(d + \Omega) = d + S^{-1}dS + S^{-1}\Omega S =: d + \tilde{\Omega}.$$

因此, 如果我们令 $A_0 = d$ 是平凡联络以及 $A = d + \Omega$, 则方程(1.3)广义解的存在性表明存在 $S \in C^\infty(\Sigma, \mathrm{SO}(m))$, 使得

$$0 = \nabla_{d+\tilde{\Omega}}^* \tilde{\Omega} = \nabla_d^* \tilde{\Omega} + \{\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}\} = d^* \tilde{\Omega}.$$

由 Poincaré 引理, 存在某个 $\xi \in C^\infty(\Sigma, \mathfrak{so}(m))$, 使得

$$\begin{cases} \nabla^\perp \xi = S^{-1}dS + S^{-1}\Omega S, & x \in \Sigma \\ \xi = 0, & x \in \partial\Sigma. \end{cases} \quad (7.1)$$

边界条件是因为, 由流的边界条件, 在 $\partial\Sigma$ 上,

$$0 = \nu \lrcorner (S^*(A) - A_0) = \nu \lrcorner \tilde{\Omega} = \nu \lrcorner \nabla^\perp \xi = \nu^\perp \lrcorner (-\nabla \xi),$$

这表明 ξ 沿着 $\partial\Sigma$ 是常值. 由于 ξ 可以相差一个常数, 因而我们可令 ξ 在 $\partial\Sigma$ 上恒为零.

为了证明推论 1.4 中的估计成立, 我们需要构造恰当的 S_0 . 将

$$\Sigma_{2\delta} := \{x \in \bar{\Sigma} \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Sigma) \leq 2\delta\}$$

参数化为 $x = (y, r)$, 其中 r 是到 $\partial\Sigma$ 的距离而 y 是 $\partial\Sigma$ 上的参数. 首先, 让我们假设 $\Omega \in C^\infty(\Sigma, \mathfrak{so}(m) \otimes T^*\Sigma)$ 并令初值为

$$S_0(x) = \exp \{(1 - \eta)r\Omega_\nu(x)\}.$$

其中 $\Omega_\nu(x) = -\Omega(r, y)(\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} r)$, $\eta \in C_0^\infty(\Sigma)$, 满足

$$\eta = \begin{cases} 0, & x \in \Sigma_\delta \\ 1, & x \in \Sigma \setminus \Sigma_{2\delta} \end{cases}, \quad \text{且 } |\nabla \eta| \leq 2/\delta.$$

为了验证它在区域的角是相容的, 注意到在角 $\partial\Sigma \times \{0\}$, $S = S_0 = \text{Id}$, 其中 Id 是 $\partial\Sigma$ 上的常值截面, 且将每个点都映射到 G 中的单位元,

$$\begin{aligned} \nu \lrcorner (S^*(A) - A_0) &= \nu \lrcorner (S^{-1} dS + S^{-1} \Omega S) = \nu \lrcorner (dS + \Omega) \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} r \lrcorner (\partial_r S_0 dr) + \Omega_\nu = -\Omega_\nu + \Omega_\nu = 0. \end{aligned}$$

S_0 的能量可以控制如下

$$2\mathcal{E}(S_0) = \int_\Sigma |S_0^{-1} dS_0 + S_0^{-1} \Omega S_0|^2 \leq \int_\Sigma (|dS_0|^2 + |\Omega|^2) = \|dS_0\|_2^2 + \|\Omega\|_2^2.$$

我们断言 $\mathcal{E}(S_0)$ 可以取得任意小. 事实上, 注意到, 对 $x \in \Sigma_{2\delta}$, $\exp$ 的导数关于 δ 是一致有界的, 因此

$$|dS_0| \leq C((1-\eta)|\Omega_\nu| + r(|\nabla \eta||\Omega_\nu| + |d\Omega_\nu|)),$$

故

$$|dS_0|^2 \leq C|\Omega|_{1,2}^2 (1 + r^2|\nabla \eta|^2 + r^2).$$

最后,

$$\int_\Sigma |dS_0|^2 = \int_{\Sigma_{2\delta} \setminus \Sigma_\delta} |dS_0|^2 \leq C \int_{\Sigma_{2\delta} \setminus \Sigma_\delta} |\Omega|_{1,2}^2 (1 + \delta^2 \cdot 1/\delta^2 + \delta^2),$$

由积分的绝对连续性, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时它是趋于零的.

因此, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 我们可以构造 S_0 , 使得 $\|dS_0\|_2 \leq \varepsilon$. 由能量沿着流的单调递减性,

$$\|\tilde{\Omega}\|_2^2 = 2\mathcal{E}(S) \leq 2\mathcal{E}(S_0) \leq \|\Omega\|_2^2 + \varepsilon^2.$$

此外, 由于 $\nabla^\perp \xi = S^{-1} dS + S^{-1} \Omega S$,

$$\|dS\|_2 \leq \|\Omega\|_2 + \|\nabla^\perp \xi\|_2 = \|\Omega\|_2 + \|\tilde{\Omega}\|_2 \leq 2\|\Omega\|_2 + \varepsilon.$$

由 Poincaré 不等式, 我们就得到

$$\|dS\|_2 + \|\xi\|_{1,2} \leq C(m)\|\Omega\|_2.$$

为了证明对 $\Omega \in L^2(\Sigma, \mathfrak{so}(m) \otimes T^*\Sigma)$ 也成立估计, 我们在 L^2 中用光滑的联络 1 形式 $\Omega_k \in C^\infty(\Sigma, \mathfrak{so}(m) \otimes T^*\Sigma)$ 来逼近 Ω , 且要求 $\|\Omega_k\|_2 \leq \|\Omega\|_2$. 对 $A_0 = d$, $A_k := d + \Omega_k$, $a_k := \Omega_k$, 求解规范变换流

$$\begin{cases} S^{-1} \frac{\partial S}{\partial t} = -\nabla_{S^*(A_k)}^*(S^*(A_k) - A_0), & (x, t) \in D \times (0, +\infty) \\ S(x, 0) = \exp((1 - \eta)ra_{k,\nu}), & x \in D \\ \nu \lrcorner (S^*(A_k) - A_0) = 0, & (x, t) \in \partial D \times [0, +\infty) \end{cases}$$

可得 $S_k \in W^{1,2}(D, \mathrm{SO}(m)) \cap C^\infty$, $\xi_k \in W^{1,2}(D, \mathrm{SO}(m)) \cap C^\infty$, 它们是(7.1)的解, 且

$$\|dS_k\|_2 + \|\xi_k\|_{1,2} \leq C(m)\|\Omega_k\|_2.$$

因此, S_k, ξ_k 都是 $W^{1,2}$ 有界的, 由弱紧性知 S_k, ξ_k 分别弱收敛到 $W^{1,2}$ 中的 S_∞, ξ_∞ . 对(7.1)两边同时取极限, 就得到需要的规范变换. 而范数的弱下半连续性表明估计式仍然成立. 这就证明了推论 1.4.

第二部分

多调和映照的 Neck 分析

第 8 章 主要结果的陈述

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个光滑区域而 N 是 $\mathbb{R}^K$ 中一个光滑紧致子流形. 对 $W^{2m,2}$ 映照 $u: \Omega \rightarrow N$, 考察全能量

$$\mathcal{E}(u; \Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla^m u|^2,$$

其中 ∇ 是定义在 Ω 上函数的普通导数. $\mathcal{E}(u; \Omega)$ 称为**外 m -多调和能量**, 因为它依赖于 N 如何嵌入到 $\mathbb{R}^K$ 中. $\mathcal{E}(u; \Omega)$ 的临界点称为**外多调和映照**. 它是调和映照的直接推广, 而且在过去几十年中有着广泛而深入的研究. 我们期望调和映照的很多理论可以推广到多调和映照的情形. 对双调和 (它是多调和的一个特例, 即 $m = 2$ 的情形) 的研究表明确实如此. 当然, 对多调和映照的研究之主要挑战是其欧拉—拉格朗日方程是高阶椭圆方程组.

在临界维数之上 ($n > 2m$), 一般的多调和映照 ($m > 2$) 的正则性问题比双调和映照还要困难, 因为还不知道单调性公式是否成立. 从而只有少数结果, Angelsberg 和 Pumberger[2] 在比能量有界更强的条件下证明了部分正则性. 在本文中, 我们只考虑临界情形, 即 $n = 2m$.

在临界情形, 受 Hélein [13] 的有名工作的启发, 我们期望弱解是光滑的. 在双调和映照的情形, 这一结论在目标流形是球的情形被 Chang, Wang 和 Yang [5] 证明 (也参考 [50]). 而后对一般的目标流形, 证明是由 Wang [55] 给出的. 对一般的 (外) 多调和映照, Goldstein, Strzelecki 和 Zatorska-Goldstein [11] 证明了到球的弱多调和映照是光滑的. 对一般的目标流形, Moser [32] 用流的办法对能量极小的多调和映照证明了同样结论. 最终, Gastel 和 Scheven [10] 完全证明了临界维数下, 弱多调和映照是光滑的.

在本文中, 我们将研究一系列具有一致能量上界的光滑外多调和映照的紧性. 具体地, 假设 $u_i: B \rightarrow N$ 是那样的序列, 且

$$\mathcal{E}(u_i) := \mathcal{E}(u_i; B) \leq \Lambda < \infty,$$

其中 B 是 $\mathbb{R}^{2m}$ 中单位球. 由于 $n = 2m$ 是临界维数, 我们可以证明这时有小能量正则性定理成立 (参考定理 12.1), 由此出发, 我们可以像研究调和映照或者双调和映照在临界维数时的紧性和爆破一样研究多调和映照的紧性和爆破. 由于对多 bubble 的情形的讨论已经非常标准了 (参考 [7] 以及 [37]), 我们只讨论单 bubble 的情形. 即

- u_i 在 $\bar{B} \setminus \{0\}$ 上局部光滑收敛到多调和映照 u_∞ ;
- 存在爆破序列 $\lambda_i \rightarrow 0$ 使得

$$v_i(x) := u_i(\lambda_i x)$$

在 $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^{2m})$ 拓扑下收敛到某个多调和映照 ω ;

- ω 是唯一的 bubble.

对任何 $\delta > 0$ 以及任何 $R > 0$, 由以上讨论 u_i 只有在 neck 区域 $B_\delta \setminus B_{\lambda_i R}$ 上的行为是不清楚的. 在该区域上对 u_i 的研究一般称为 **neck 分析**, 它至少包含如下的典型问题:

(Q1) 是否有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_\delta \setminus B_{\lambda_i R}} |\nabla^m u_i|^2 + |\nabla u_i|^{2m} = 0?$$

若上式成立, 则称其为 **能量等式** 或者 **能量量子化**, 它表明在爆破过程中, neck 区域上没有能量损失. 即,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E(u_i; B) = E(u_\infty; B) + E(\omega; \mathbb{R}^{2m}), \quad (8.1)$$

其中

$$E(u; \Omega) = \int_{\Omega} |\nabla^m u|^2 + |\nabla u|^{2m}.$$

(Q2) 是否有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \text{osc}_{B_\delta \setminus B_{\lambda_i R}} u_i = 0? \quad (8.2)$$

若上式成立, 则 $\{u_i\}$ 对爆破序列 $\{\lambda_i\}$ 具有 **no neck 性质**, 它表示 u_∞ 的像和 ω 的像是相交的.

这些问题在调和映照和双调和映照的情形有大量研究. 关于调和映照可以参考 [7, 17, 37, 38, 54], 而关于双调和映照可以参考 [16, 22, 24, 56, 58, 59].

这部分的主要结果是证明能量等式和 no neck 对上述序列成立.

定理 8.1 假设 $\{u_i\}$ 是一列定义在 $B \subset \mathbb{R}^{2m}$ 上的光滑 (外) m -多调和映照, 且 $\mathcal{E}(u_i) \leq \Lambda$, 这里 $\Lambda > 0$ 是某个一致常数. 若 u_i 在 $\bar{B} \setminus \{0\}$ 上局部光滑收敛到 u_∞ 而且存在 $\lambda_i \rightarrow 0$ 使得 $v_i(x) := u_i(\lambda_i x)$ 在 $\mathbb{R}^{2m}$ 上局部光滑收敛到 ω . 如果 ω 是唯一的 bubble, 则(8.1)和(8.2)成立.

对定理 8.1 的证明思路类似于 [24], 这一方法首先由 [43] 提出, 而后由 [40] 推广并深化. 众所周知, neck 分析的要点在于 neck 的长度 (等价地 $\delta/(\lambda_i R)$) 是不可

控制的. 故其证明分为两部分. 首先是比较 neck 区域上映照与其自身在球面上平均的差并注意到它是一个逼近多调和函数, 而关于逼近多调和函数我们可以证明三圈引理 (参考定理 8.2) 成立. 进而得到 u_i 的能量中含有球面方向的导数部分具有指数衰减 (参考(12.26)), 从而在 neck 区域上积分, 其长度趋于无穷不再是问题. 第二部分是关于经典的 Pohozaev 恒等式的非平凡推广, 它首先是由 [28] 在研究调和映照的 neck 分析时引进的.

尽管 [24] 中很多证明都可以比较容易地改造成多调和映照的版本, 但是其中有两个要点需要完全重新证明. 即三圈引理与 Pohozaev 型不等式. 事实证明, 从 $m = 2$ 的双调和映照推广到 $m > 2$ 的多调和映照情形利用到了 Δ^m 的良好结构. 特别地, 我们对 m -多调和映照得到如下的三圈引理, 据我们所知, 它是全新的结果.

定理 8.2 令 $B \subset \mathbb{R}^{2m}$ 是单位球. 存在仅依赖于 m 的常数 $L > 0$, 使得对任何定义在 $B \setminus \{0\}$ 上的非零的光滑函数 u , 若满足

$$\Delta^m u = 0, \quad x \in B \setminus \{0\},$$

以及

$$\int_{\partial B_\rho} u = 0, \quad \forall \rho \in (0, 1).$$

则有如下的三圈性质成立:

$$2F_i(u) < e^{-L} (F_{i-1}(u) + F_{i+1}(u)), \quad i \in \mathbb{Z}^+,$$

其中

$$F_i(u) := \int_{A_i} \frac{u^2}{|x|^{2m}} dx, \quad A_i := B_{e^{-(i-1)L}} \setminus B_{e^{-iL}}.$$

上述定理在 $m = 2$ 的情形已经在 [24] 中证明, 但是那里的证明需要具体的计算一个矩阵的正定性, 不好推广到一般情形. 在这里, 我们强调上述三圈性质与环状区域上多调和函数的 L^2 基底的弱正交性有关 (参考引理 10.9).

这部分的组织如下: 在第 9 章我们首先对调和映照采用前文叙述的办法证明能量等式与 no neck. 此外, 我还回忆了两种经典的构造 bubble tree 的方法. 接下来, 我们分别在第 10 章, 第 11 章证明三圈引理与 Pohozaev 型不等式. 最后, 在第 12 章我们将完成多调和映照的能量衰减估计, 由此完全可以仿照调和映照的情形给出多调和映照的能量等式与 no neck 的证明.

第9章 调和映照的爆破分析

作为学习 Neck 分析的基本框架, 我们在本章将回忆如何对调和映照的情形证明能量等式与 No Neck 性质. 同时, 为了方便读者理解本部分关于一个 bubble 的假设, 我们还具体的重现了历史上构造 bubble tree 的两种方法. 一种是 Ding—Tian 利用 Neck 上没有 bubble 的条件所作的归纳构造 bubble 的办法, 现在一般称为 Ding—Tian 约化. 另一种是 Parker 在研究拟全纯曲线的过程中, 利用抓重心和重整化常数构造 bubble 的办法. 后者在假定能量等式成立时, 可以非常方便的构造 bubble tree. 两者都可以证明能量等式与 No Neck.

9.1 Bubble Tree 的构造

事实表明, 通过不断吹大的技巧得到的 bubble 具有树状结构. 即它们的出现是有先后顺序的. 在本节, 我们将具体的重现 Ding—Tian 和 Parker 构造 bubble tree 的过程. 在本部分后面的证明过程中, 我们将假设只有一个 bubble. 而且, 我们将利用 Neck 上不再有 bubble 这一条件来说明 Neck 上每圈的能量可以任意小 (这是 Ding—Tian 假设的直接推论).

9.1.1 Ding-Tian 的约化办法

Ding-Tian 在 [7, p. 549ff] 证明逼近调和映照的能量等式过程中, 采用了归纳法. 该方法其实可以在没有证明能量等式之前就具体构造出 Bubble Tree. 后来进一步被 [26, Appendix A] 以及 [6, Sec. 3.1] 具体化.

首先, 我们回忆如下几个基本引理.

引理 9.1 (ε -正则性; [43, Theorem 3.2] 以及 [7, Lemma 2.1]) 存在常数 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意的调和映照 $u \in W^{2,2}(B; N)$, 如果满足

$$\int_B |\nabla u|^2 \leq \varepsilon_0^2,$$

则

$$\|\nabla^k u\|_{\infty; B_{1/2}} \leq C(\varepsilon_0, k, N) \|\nabla u\|_{2; B}, \quad \forall k \geq 1.$$

引理 9.2 (Gap-定理; [43, Theorem 3.3]) 存在只依赖于 N 的常数 $\sigma_0 > 0$, 使得任何从 S^2 到 N 的非平凡 C^∞ -调和映照的能量都大于等于 σ_0 .

引理 9.3 (奇点可去; [43, Theorem 3.6]) 假设 $u \in C^\infty(B \setminus \{0\}, N)$ 的调和映照, 则存在 $\tilde{u} \in C^\infty(B, N)$ 使得 $\tilde{u}|_{B \setminus \{0\}} = u$.

9.1.1.1 基本假设

Bubble Tree 的构造中, 其基本假设如下. 假设 $u_k \in C^\infty(B, N)$ 是一列从 $B \subset \mathbb{R}^2$ 出发到紧致黎曼流形 N 的能量有界 ($E(u_k) \leq \Lambda$) 的调和映照. 由 $W^{1,2}$ 的弱紧性, 不妨设 $u_k \rightharpoonup u_0 \in W^{1,2}(B; N)$. 定义 $\{u_k\}$ 的能量集中点如下

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\{u_k\}) := \left\{ p \in B \mid \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{B_r(p)} |\nabla u_k|^2 dx \geq \varepsilon_0^2 \right\}.$$

其中 ε_0 是小能量正则性中的常数.

- 由能量有限知能量集中点必为有限点集.
- 若 $q \notin \mathcal{S}$, 则按照定义, 存在 $\delta > 0$, 以及 $\{u_k\}$ 的子列 (在本节的讨论中, 我们不区分子列和序列本身), 使得

$$\int_{B_\delta(p)} |\nabla u_k|^2 \leq \varepsilon_0^2.$$

因此, 由小能量正则性, $\|\nabla^l u_k\|_{\infty; B_{\delta/2}(p)} \delta^l \leq C(\varepsilon_0, l, N) \varepsilon_0, \forall l \geq 1$. 此外, 注意到 N 还是紧集, 通过选取对角线, 存在 $\{u_k\}$ 的子列, 使得 $u_k \rightarrow u_0 \in C^\infty(B_{\delta/2}(p))$. 进而, 对任意的 $\Omega \subset\subset B \setminus \mathcal{S}$, 利用有限覆盖, 可以取出 $\{u_k\}$ 的子列使得 $u_k \rightarrow u_0 \in C^\infty(\Omega)$.

- 在 $p \in \mathcal{S}$ 的一个邻域, 我们可取以 p 为心的等温坐标系 (B, x) 使得 p 是 B 中唯一的能量集中点, 且 $u_k \rightarrow u_0 \in C_{\text{loc}}^\infty(B \setminus \{0\}; N)$.

9.1.1.2 第一个 bubble

下面开始构造第一个 bubble. 令 $r_k^1 = \lambda_k^1 = 1 / \max_{B_{1/2}} |\nabla u_k| = 1 / |\nabla u_k|(x_k^1)$.

- $\lambda_k^1 \rightarrow 0$. 事实上, 若非如此, 则 $|\nabla u_k|_{\infty; B_{1/2}}$ 有界, 从而与 0 是 $\{u_k\}$ 的能量集中点矛盾.
- $x_k^1 \rightarrow 0$. 事实上, 假设 $x_k^1 \rightarrow p \in \overline{B_{1/2}}, p \neq 0$. 利用小能量正则性 (参考基本假设的第二点) 知, 由于 p 不是能量集中点, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\|\nabla u_k\|_{\infty; B_{\delta/2}(p)} \leq \frac{C(\varepsilon_0, N) \varepsilon_0}{\delta}.$$

因此当 k 充分大时,

$$\frac{1}{\lambda_k^1} = |\nabla u_k|(x_k^1) \leq \|u_k\|_{\infty; B_{\delta/2}(p)} \leq \frac{C(\varepsilon_0, N)\varepsilon_0}{\delta},$$

这与 $\lambda_k^1 \rightarrow 0$ 矛盾.

- 令 $v_k^1 := u_k(x_k^1 + \lambda_k^1 x)$, $x \in B_R \subset \mathbb{R}^2$, 这里 R 是某一固定的大常数. 则 v_k^1 是 B_R 到 N 的调和映照. 又注意到当 k 充分大时 ($\lambda_k^1 R < 1/2 - |x_k^1|$), $\|\nabla v_k^1\|_{\infty; B_R} = \lambda_k^1 \|\nabla u_k\|_{\infty; B_{\lambda_k^1 R}(x_k^1)} \leq 1$. 因此由小能量正则性知 $v_k^1 \rightarrow v^1 \in C^\infty(B_R)$. 取一列 $R_l \rightarrow 0$, 通过对角线法则知存在 v_k^1 的子列, 使得 $v_k^1 \rightarrow v^1 \in C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2; N)$. 最后注意到

$$|\nabla \omega^1|(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla v_k^1|(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^1 |\nabla u_k|(x_k^1) = 1,$$

知 v^1 是从 $\mathbb{R}^2 \rightarrow N$ 的非常值调和映照. 由奇点可去知存在 v^1 的延拓 ω^1 , $\omega^1: S^2 \rightarrow N$ 是调和映照. 我们称 ω^1 为第一个 *bubble*. 稍后会看到, 第一个 *bubble* 位于 *bubble tree* 的顶端. 在它“上面”不再有 *bubble*.

9.1.1.3 第二个 bubble: Ding-Tian 约化

Ding-Tian 首先给出了在第一个 *bubble* 的“下面”不再有其他 *bubble* 的刻画.

断言 (Ding-Tian 约化) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, $R > 0$ 以及 $K = K(\delta, R) > 0$, 使得当 $k \geq K$ 时, 有

$$\int_{B_{2r}(x_k^1) \setminus B_r(x_k^1)} |\nabla u_k|^2 dx < \varepsilon, \quad \forall r \in [r_k^1 R, \delta].$$

事实上, 若断言不成立, 则存在 $\varepsilon_1 > 0$, 使得对 $\delta_k \rightarrow 0$ 以及 $R_k \rightarrow +\infty$, 都存在 $r_k^2 > 0$, 满足

$$\lambda_k^1 R_k \leq r_k^2 \leq \delta_k, \quad E(u_k; B_{2r_k^2}(x_k^1) \setminus B_{r_k^2}(x_k^1)) \geq \varepsilon_1. \quad (9.1)$$

我们将在这种情形下构造第二个 *bubble*. 令 $v_k^2(x) := u_k(x_k^1 + r_k^2 x)$. 由于 $x_k^1 \rightarrow 0$ 以及 $r_k^2 \leq \delta_k \rightarrow 0$ 知 $\{v_k^2\}$ 是定义在穷竭于 $\mathbb{R}^2$ 的圆盘上的函数列. 且对任意的 R , 当 k 充分大时, $E(v_k^2; B_R) = E(u_k; B_{r_k^2 R}(x_k^1)) \leq \Lambda$. 从而由 $W^{1,2}$ -弱紧性可假设 $v_k^2 \rightharpoonup v^2 \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^2, N)$. 记 $\mathcal{S}^2 := \mathcal{S}(\{v_k^2\})$ 为 $\{v_k^2\}$ 的能量集中点集. 注意到 v_k^2 是调和映照, 由小能量正则性知 (子列) $v_k^2 \rightarrow v^2 \in C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}^2, N)$. 且 v^2 是 $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}^2$ 上的调和映照, 由于 $\mathcal{S}^2$ 是有限点集, 利用奇点可去定理知存在 v^2 的延拓 $\tilde{v}^2$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的调和映照.

下面分两种情形:

- (i) 如果 v^2 是非平凡的, 则 $\tilde{v}^2$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的非平凡调和映照. 从而由奇点可去定理可得到 $\{u_k\}$ 一个 bubble ω^2 , 对应的爆破序列是 $(x_k^2, \lambda_k^2) = (x_k^1, r_k^2)$.
- (ii) 如果 v^2 是常值映照. 则 $(B_3 \setminus B_{1/2}) \cap \mathcal{S}^2 \neq \emptyset$. 事实上由(9.1)知

$$E(v_k^2; B_{5/2} \setminus B_{2/3}) = E(u_k; B_{5r_k^2/2}(x_k^1) \setminus B_{2r_k^2/3}(x_k^1)) \geq \varepsilon_1.$$

如果 $\{v_k^2\}$ 在 $B_3 \setminus B_{1/2}$ 中没有能量集中点, 则由小能量正则性知 $v_k^2 \rightarrow v^2 \in C^\infty(B_{5/2} \setminus B_{2/3})$. 从而

$$E(v^2; B_{5/2} \setminus B_{2/3}) = \lim_{k \rightarrow \infty} E(v_k^2; B_{5/2} \setminus B_{2/3}) \geq \varepsilon_1.$$

可见与 v^2 是常值映照矛盾.

因此, 我们可假设 $p \in B_3 \setminus B_{1/2}$ 是 $\{v_k^2\}$ 的能量集中点. 完全仿照第一个 bubble 的构造, 我们知道存在 $x'_k \rightarrow p$ 以及 $\lambda'_k \rightarrow 0$ 使得 (子列)

$$v_k^2(x'_k + \lambda'_k x) \rightarrow v' \in C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2; N).$$

其中 v' 是从 $\mathbb{R}^2$ 到 N 的非常值调和映照, 由奇点可去得到一个 bubble ω^2 . 注意到

$$v_k^2(x'_k + \lambda'_k x) = u_k(x_k^1 + r_k^2(x'_k + \lambda'_k x)) = u_k(x_k^1 + r_k^2 x'_k + r_k^2 \lambda'_k x),$$

从而令 $x_k^2 := x_k^1 + r_k^2 x'_k$, $\lambda_k^2 := r_k^2 \lambda'_k$, 则

$$u_k(x_k^2 + \lambda_k^2 x) \rightarrow v'.$$

这表明 ω^2 也是序列 $\{u_k\}$ 的一个 bubble. 对应的爆破序列是 $(x_k^2, \lambda_k^2) = (x_k^1 + r_k^2 x'_k, r_k^2 \lambda'_k)$.

综上表明, 要么 Ding-Tian 约化的条件成立, 此时只有一个 bubble; 要么我们可以找到第二个 bubble. 关于这两个 bubble 是本质不同的将在后面定义并证明.

注记 对任意的 $r > 0$, 注意到由(9.1)知 $r_k^2 \geq R_k \lambda_k^1$, 从而

$$E(v_k^2; B_r) = E(u_k; B_{rr_k^2}(x_k^1)) \geq E(u_k; B_{rR_k \lambda_k^1}(x_k^1)) = E(v_k^1; B_{rR_k}) \geq \sigma_0.$$

这里我们用了 $v_k^1 \rightarrow v^1 \in C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2; N)$ 以及 $R_k \rightarrow \infty$. 容易证明 $\varepsilon_0 = \sigma_0$, 从而 $0 \in \mathcal{S}^2$.

最后, 注意到

$$v^1 \leftarrow v_k^1(x) = u_k(x_k^1 + \lambda_k^1 x) = v_k^2(\lambda_k^1 x / r_k^2),$$

可见 ω^1 也是序列 v_k^2 的 bubble, 对应的爆破序列为 $(0, \lambda_k^1 / r_k^2)$.

9.1.1.4 bubble 的树状结构

本节主要参考 [6, Section 3].

在进一步构造其他 bubble 之前, 我们有必要给出前面所构造的 bubble 的结构. 这将有利于对整个归纳构造的理解.

首先, 我们定义什么是一个 bubble 及其对应的爆破序列 (blowup sequence), 此外为了后面的需要, 我们还将定义 ghost bubble 及其爆破序列.

定义 9.4 (bubble 及其爆破序列) 假设 $u_k: B \rightarrow N$ 是一列能量有限的光滑调和映照. 我们称序列 $\{(x_k, r_k) | x_k \in D, r_k > 0\}$ 为 $\{u_k\}$ 在 $p \in B$ 的一个**爆破序列**, 如果

- $r_k \rightarrow 0, x_k \rightarrow p$;
- $v_k(x) := u_k(x_k + r_k x) \rightharpoonup v \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^2, N)$, 且存在有限点集 $\mathcal{S}(p) \subset \mathbb{R}^2$ (即为 v_k 的能量集中点), 使得 $v_k \rightarrow v \in C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}(p))$;
- $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow N$ 是非平凡的调和映照.

我们称从 S^2 到 N 的非平凡调和映照为一个 *bubble*. 称 p 为该 bubble 的根 (root).

注记 由 (孤立) 奇点可去定理知道, 对 u_k 在 p 处的爆破序列 $\{(x_k, r_k)\}$, $v_k = u_k(x_k + r_k x)$ 的 $W^{1,2}$ -弱极限 v 是一个 bubble ω . 故我们称 $\{(x_k, r_k)\}$ 为 ω 所对应的爆破序列.

注记 假设在上面的定义中最后一条不成立, 即 v 是平凡的调和映照. 则我们称这样的 v 为 *ghost bubble*, 对应的爆破序列 $\{(x_k, r_k)\}$ 称为 ghost bubble 的爆破序列.

下面我们来区分不同的 bubble.

定义 9.5 (本质不同的 bubble) 假设 $\{(x_k, r_k)\}, \{(x'_k, r'_k)\}$ 是 $\{u_k\}$ 在 p 处的两个爆破序列. 如果下列情形之一成立

$$\frac{r_k}{r'_k} + \frac{r'_k}{r_k} \rightarrow \infty, \quad \frac{|x_k - x'_k|}{r_k + r'_k} \rightarrow \infty, \quad (9.2)$$

那么我们称 $\{(x_k, r_k)\}, \{(x'_k, r'_k)\}$ 是**本质不同**的爆破序列.

自然地定义不是本质不同的两个爆破序列称为**本质相同**的爆破序列. 我们首先给出本质相同爆破序列的一个刻画.

命题 9.6 (本质相同的 bubble 相差一个位似变换; [6, Lemma 3.6]) 假设 v, v' 是分别由 $\{u_k\}$ 在 p 处的两本质相同的爆破序列 $\{(x_k, r_k)\}, \{(x'_k, r'_k)\}$ 给出的 bubble. 则存在位似变换 S , 使得 $v = v' \circ S$.

注记 有孤立奇点可去定理, 若在 $S^2 \setminus \{pt\}$ 上 $v = v' \circ S$, 则 v, v' 对应的 bubble ω, ω' 也满足 $\omega = \omega' \circ S, x \in S^2$. 我们称相差一个位似变换的两 bubble 为**本质相同**的 bubble.

注记 尽管 $\{(x_k, r_k)\}, \{(x'_k, r'_k)\}$ 是本质不同的爆破序列, 但是我们并没有排除它们对应的 bubble 是本质相同的.

证明 按照爆破序列 $\{(x_k, r_k)\}, \{(x'_k, r'_k)\}$ 是本质相同的定义, (9.2)不成立. 即可设 (我们仍然不区分子序列与序列本身)

$$\frac{r_k}{r'_k} \rightarrow \lambda \in (0, +\infty) \text{ 且 } \frac{x_k - x'_k}{r'_k} \rightarrow x_0.$$

按照爆破序列的定义, 我们有

$$\begin{aligned} v \leftarrow v_k(x) &= u_k(x_k + r_k x) = u_k \left(x'_k + r'_k \left(\frac{x_k - x'_k}{r'_k} + \frac{r_k}{r'_k} x \right) \right) \\ &= v'_k \left(\frac{x_k - x'_k}{r'_k} + \frac{r_k}{r'_k} x \right) \rightarrow v'(x_0 + \lambda x), \end{aligned}$$

最后由弱极限的唯一性即得结论. □

接下来, 我们来定义本质不同 bubble 的位置关系.

定义 9.7 (爆破序列的严格偏序关系) 假设 $\{(x_k, r_k)\}, \{(x'_k, r'_k)\}$ 是 $\{u_k\}$ 在 p 处的两个本质不同的爆破序列. 如果当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{r_k}{r'_k} \rightarrow 0 \text{ 且 } \frac{x_k - x'_k}{r'_k} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^2,$$

那么我们称 $\{(x_k, r_k)\}$ 在 $\{(x'_k, r'_k)\}$ 的上面, 记作 $(x_k, r_k) < (x'_k, r'_k)$.

注记 假设 P 是一个集合, P 的严格偏序定义为满足如下条件的二元关系 “ $<$ ”: 对任意的 $a, b, c \in P$,

- $a < a$ 不成立 (非自反);
- 若 $a < b$ 且 $b < c$, 则 $a < c$ (传递);

注意上述两条的直接推论是: 若 $a < b$ 则 $b < a$ 不成立.

容易验证, 上面定义关于爆破序列的严格偏序满足第一条. 为了验证传递性, 假设 $(x_k^1, r_k^1) < (x_k^2, r_k^2)$ 且 $(x_k^2, r_k^2) < (x_k^3, r_k^3)$. 则按照定义有

$$\frac{r_k^1}{r_k^3} = \frac{r_k^1}{r_k^2} \cdot \frac{r_k^2}{r_k^3} \rightarrow 0, \quad \frac{x_k^1 - x_k^3}{r_k^3} = \frac{x_k^1 - x_k^2}{r_k^2} \frac{r_k^2}{r_k^3} + \frac{x_k^2 - x_k^3}{r_k^3} \rightarrow x_{12} \cdot 0 + x_{23} = x_{23}.$$

可见 $(x_k^1, r_k^1) < (x_k^3, r_k^3)$.

命题 9.8 (第一个 bubble 对应的爆破序列位于顶部) 假设 $\{(x_k^1, \lambda_k^1)\}$ 是第一个 bubble 的爆破序列 (相应于原点). 则对任意 $\{u_k\}$ 在原点的本质不同的爆破序列 $\{(x_k, r_k)\}$, 必有 $(x_k^1, \lambda_k^1) < (x_k, r_k)$. 由于是严格偏序关系, 故这说明第一个爆破序列上面不再有爆破序列.

证明 反设存在 $\{u_k\}$ 在原点的本质不同的爆破序列 $\{(x_k, r_k)\}$ 使得 $(x_k, r_k) < (x_k^1, \lambda_k^1)$, 则按照定义有

$$\frac{r_k}{r_k^1} \rightarrow 0 \text{ 且 } \frac{x_k - x_k^1}{r_k^1} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^2.$$

这说明 $v_k(x) := u_k(x_k + r_k x)$ 满足

$$\|\nabla v_k\|_{\infty; B_R} = r_k \|\nabla u_k\|_{\infty; B_{r_k R}} = \frac{r_k}{r_k^1} r_k^1 \|\nabla u_k\|_{\infty; B_{r_k R}} \leq \frac{r_k}{r_k^1} \rightarrow 0, \quad \forall R > 0.$$

这表明 $v_k \rightarrow \text{Const.} \in C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2, N)$, 与 (x_k, r_k) 是爆破序列矛盾. $\square$

注记 容易知道, 由(9.2), 两本质不同的爆破序列可分为如下三类 (不区分子列与序列本身)

(i) 具有严格偏序关系:

$$\frac{r_k}{r'_k} \rightarrow 0 \text{ 且 } \frac{x_k - x'_k}{r'_k} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^2,$$

或者互换 (x_k, r_k) 与 (x'_k, r'_k) ;

(ii)

$$\frac{r_k}{r'_k} \rightarrow 0 \text{ 且 } \frac{|x_k - x'_k|}{r'_k} \rightarrow \infty;$$

(iii)

$$\frac{r_k}{r'_k} \rightarrow \lambda \in (0, +\infty) \text{ 且 } \frac{|x_k - x'_k|}{r'_k} \rightarrow \infty.$$

若两个爆破序列具有一定的序关系, 则我们可用“爆破区域”的关系来刻画爆破序列的序关系.

命题 9.9 ([6, Lemma 3.10]) 假设 $\{(x_k, r_k)\}, \{(x'_k, r'_k)\}$ 是本质不同的两个爆破序列. 则

$$(x_k, r_k) < (x'_k, r'_k) \iff \text{则存在 } R > 0, \text{ 使得当 } k \text{ 充分大时 } B_{Rr_k}(x_k) \subset B_{Rr'_k}(x'_k).$$

证明 事实上, 令 $R = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x'_k|/r'_k + 1 < +\infty$, 则对任意的 $x \in B_{Rr_k}(x_k)$, 有

$$\frac{|x - x'_k|}{r'_k} \leq \frac{r_k}{r'_k} \frac{|x - x_k|}{r_k} + \frac{|x_k - x'_k|}{r'_k} \leq \frac{r_k}{r'_k} R + R - \frac{1}{2}.$$

又由 $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k/r'_k \rightarrow 0$ 可见当 k 充分大时, 有 $x \in B_{Rr'_k}(x'_k)$.

反过来, 注意到 $|x_k - x'_k|/r'_k \leq R$, 从而根据上述分类关系得到 $r_k/r'_k \rightarrow 0$, 即 $(x_k, r_k) < (x'_k, r'_k)$. $\square$

再进一步讨论序与爆破区域的关系之前, 我们引入如下概念.

定义 9.10 假设 $(x_k^\alpha, r_k^\alpha), (x_k^\beta, r_k^\beta)$ 是 $\{u_k\}$ 在 p 处的本质不同的两爆破序列. 我们称爆破序列 (x_k^α, r_k^α) 在爆破序列 (x_k^β, r_k^β) 的**正上方**, 如果不存在与 $(x_k^\alpha, r_k^\alpha), (x_k^\beta, r_k^\beta)$ 本质不同的爆破序列 (x_k^γ, r_k^γ) , 使得 $(x_k^\alpha, r_k^\alpha) < (x_k^\gamma, r_k^\gamma) < (x_k^\beta, r_k^\beta)$.

此时, 我们称序列 (x_k^α, r_k^α) 对应的 bubble ω^α 长在 (x_k^β, r_k^β) 对应的 bubble ω^β 的某点上.

为了说明 bubble 具有树状结构, 我们需要说明不存在本质不同的三个爆破序列使得某个爆破序列同时位于其他两个爆破序列的正上方.

命题 9.11 (bubble 的树状结构) 假设 $\{(x_k^\alpha, r_k^\alpha)\}, \{(x_k^\beta, r_k^\beta)\}$ 和 $\{(x_k^\gamma, r_k^\gamma)\}$ 是 $\{u_k\}$ 在 0 点处的三个本质不同的爆破序列. 则不可能有 $\{(x_k^\gamma, r_k^\gamma)\}$ 同时位于 $\{(x_k^\alpha, r_k^\alpha)\}$ 以及 $\{(x_k^\beta, r_k^\beta)\}$ 的正上方.

证明 反设 $\{(x_k^\gamma, r_k^\gamma)\}$ 同时位于 $\{(x_k^\alpha, r_k^\alpha)\}$ 以及 $\{(x_k^\beta, r_k^\beta)\}$ 的正上方, 则按照定义

$$\frac{r_k^\gamma}{r_k^\alpha} \rightarrow 0, \quad \frac{r_k^\gamma}{r_k^\beta} \rightarrow 0; \quad \frac{x_k^\gamma - x_k^\alpha}{r_k^\alpha} \rightarrow x_{\gamma\alpha} \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{x_k^\gamma - x_k^\beta}{r_k^\beta} \rightarrow x_{\gamma\beta} \in \mathbb{R}^2.$$

现在, 由于 $\{(x_k^\alpha, r_k^\alpha)\}$ 与 $\{(x_k^\gamma, r_k^\gamma)\}$ 是本质不同的爆破序列. 故由(9.2)知可分为以下两类情形

- $r_k^\alpha/r_k^\beta \rightarrow \lambda \in (0, +\infty)$ 且 $|x_k^\alpha - x_k^\beta|/r_k^\beta \rightarrow \infty$. 此时注意到

$$\frac{|x_k^\alpha - x_k^\beta|}{r_k^\beta} \leq \frac{|x_k^\gamma - x_k^\alpha|}{r_k^\alpha} \frac{r_k^\alpha}{r_k^\beta} + \frac{|x_k^\gamma - x_k^\beta|}{r_k^\beta} \rightarrow x_{\gamma\alpha}\lambda + x_{\gamma\beta},$$

可见与 $|x_k^\alpha - x_k^\beta|/r_k^\beta \rightarrow \infty$ 矛盾.

- $r_k^\alpha/r_k^\beta \rightarrow 0$ ($r_k^\beta/r_k^\alpha \rightarrow 0$ 类似可证). 此时, 若

$$\frac{x_k^\alpha - x_k^\beta}{r_k^\beta} \rightarrow x_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^2,$$

则按照定义 $(x_k^\alpha, r_k^\alpha) < (x_k^\beta, r_k^\beta)$, 这与 (x_k^γ, r_k^γ) 位于 (x_k^β, r_k^β) 的正上方矛盾. 于是我们得到

$$\frac{|x_k^\alpha - x_k^\beta|}{r_k^\beta} \rightarrow \infty.$$

完全仿照第一种情形 (此时 $\lambda = 0$) 可推出矛盾.

□

命题 9.12 (分叉爆破序列的区域刻画; [6, Lemma 3.13]) 假设 $(x_k^\alpha, r_k^\alpha), (x_k^\beta, r_k^\beta)$ 是本质不同的爆破序列, 且它们都位于 (x_k^γ, r_k^γ) 的正上方. 则对任意固定的 $R > 0$, 存在 $K = K(R)$, 使得

$$B_{Rr_k^\alpha}(x_k^\alpha) \cap B_{Rr_k^\beta}(x_k^\beta) = \emptyset, \quad \forall k \geq K.$$

证明 反设结论不成立, 则对某 $R_0 > 0$, 存在 (子) 序列使得

$$B_{Rr_k^\alpha}(x_k^\alpha) \cap B_{Rr_k^\beta}(x_k^\beta) \neq \emptyset.$$

特别地, 两圆心的距离小于等于半径的和, 即

$$\frac{|x_k^\alpha - x_k^\beta|}{r_k^\alpha + r_k^\beta} \leq R_0.$$

于是有本质不同爆破序列的定义, 必有

$$\frac{r_k^\alpha}{r_k^\beta} + \frac{r_k^\beta}{r_k^\alpha} \rightarrow 0.$$

不失一般性, 不妨假设 $r_k^\alpha/r_k^\beta \rightarrow 0$. 进而

$$\frac{x_k^\alpha - x_k^\beta}{r_k^\beta} \rightarrow x_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^2,$$

这即是说 $(x_k^\alpha, r_k^\alpha) < (x_k^\beta, r_k^\beta)$. 与 (x_k^α, r_k^α) 位于 (x_k^γ, r_k^γ) 的正上方矛盾. $\square$

注记 我们可以类似地定义一个爆破序列位于 ghost bubble 对应的爆破序列的正上方的概念. 则从上述证明容易知道, 命题对 (x_k^γ, r_k^γ) 是 ghost bubble 对应的爆破序列的情形结论仍然成立.

9.1.1.5 归纳构造出所有 bubble

整个归纳过程参考 [26, Appendix A]. 接着上一节, 我们对 $\mathcal{S}^2$ 的每个能量集中点都采用前面的手续, 对序列 $\{v_k^2\}$ 先构造第一个 bubble, 若 Ding-Tian 假设不成立, 则采用 (b) 中的办法得到一个 bubble. 至此构造好了第二层 bubble.

为了看是否含有第三层 bubble, 我们将 Ding-Tian 的 r_k^1 换成 λ_k^2 , x_k^1 换成 x_k^2 , 并采用 (b) 的办法得到第三层 bubble (或者没有第三层), 如此继续下去. 我们得到爆破序列 $(x_k^l, \lambda_k^l) \rightarrow (0, 0)$, 使得

$$u_k(x_k^l + \lambda_k^l x) \rightarrow v^l, \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

其中 v^l 是从 $\mathbb{R}^2$ 到 N 的非平凡调和映照. 注意到每次构造都产生非平凡的调和映照, 而总能量是有限的, 故上述过程必在有限步后结束. 从而此时 Ding—Tian 假设成立. 即存在序列 $r_k^{l_0}$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 以及 $R > 0$, 使得

$$E(u_k; B_{2r} \setminus B_r) < \varepsilon, \quad \forall r \in [Rr_k^{l_0}, \delta].$$

9.1.2 Parker 的办法

假设 $u_n: B \rightarrow N$ 是从单位圆盘 $B \subset \mathbb{R}^2$ 到紧流形 $N \hookrightarrow \mathbb{R}^K$ 的调和映照. 若能量一致有界, 即

$$E(u_n) := \int_B e(u_n) \leq E_0 < +\infty, \quad e(u_n) = \frac{1}{2} |\nabla u_n|^2 dx.$$

在本节我们将给出上述序列在爆破过程中构造 bubble tree 的另一办法. 本节主要参考 [37] 来给出 bubble tree 的构造.

Parker 给出的办法具有一般性, 它可以用在其它共形不变的半线性问题, 例如伪全纯曲线 (pseudo-holomorphic curves) 和 Yang-Mills 场. 该构造的基本出发点是如下的关于调和映照的基本事实 (其实就是第 9.1.1 小节中的三个基本引理及其简单推论).

命题 9.13 ([43]) 存在正常数 C 和 ε_0 , 它们只依赖于 B 和 N 的几何, 使得

(i) 小能量正则性: 若 $u: B \rightarrow N$ 是调和映照, 且对 $r < 1/2$, 有

$$E(B_{2r}) := \frac{1}{2} \int_{B_{2r}} |\nabla u|^2 dx \leq \varepsilon_0,$$

则

$$\sup_{B_r} |\nabla u|^2 \leq Cr^{-2} E(B_{2r}). \quad (9.3)$$

(ii) 一致收敛性: 假设 $\{u_n\}$ 是一列从 B_{2r} 到 N 的调和映照, 且 $E(B_{2r}) < \varepsilon_0$ 对所有的 n 都成立. 则存在子列 u_{n_k} , 使得 $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ 在 $C^\infty(B_{2r}; N)$ 拓扑下.

(iii) 能量间隙: 从 $S^2 \rightarrow N$ 的任何非常值调和映照 u 的能量 $E(u) \geq \varepsilon_0$.

(iv) 奇点可去: 任何从 $B \setminus \{0\}$ 到 N 的能量有限的光滑调和映照 u 都可以延拓成 B 上的光滑调和映照.

上述命题再加上一个简单的覆盖引理可以给出如下 Sacks-Uhlenbeck 的基本收敛结果.

引理 9.14 ([37, Lemma 1.2]) 假设 $\{u_n\}$ 如前是一列从 $B \subset \mathbb{R}^2$ 到 $N \hookrightarrow \mathbb{R}^K$ 的光滑调和映照, 且具有一致的能量上界 $E(u_n) \leq E_0 < +\infty$. 则存在 $\{u_n\}$ 的子列, 有限个爆破点 $\{x_1, \dots, x_l\} \subset B$, 以及光滑调和映照 $u_\infty: B \rightarrow N$, 使得

(i) u_n 在 $\Sigma \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ 的任一紧子集上光滑收敛到 u_∞ ;

(ii) 作为测度, 有

$$e(u_n) \rightarrow e(u_\infty) + \sum_{i=1}^l m_i \delta(x_i). \quad (9.4)$$

其中 $m_i \delta(x_i)$ 是 x_i 处的 Dirac 测度. m_i 称为质量. 此外, 我们还有 $m_i \geq \varepsilon_0$, $i = 1, 2, \dots, l$.

证明 对固定的 (充分小) $\delta > 0$, 用 δ 为半径的圆盘覆盖 B , 可以要求 $\delta/2$ 为半径的同心圆盘仍然覆盖 B , 且 B 中任何一点至多属于 10 个圆盘. 对固定的 n , 我们称 u_n 在其上能量大于等于 ε_0 的 δ -圆盘 $B_\delta(x_n)$ 为坏圆盘 (覆盖只依赖于 δ , 但是一个给定的圆盘是否是坏圆盘却依赖于 n). 注意到能量的一致上界, 则这种坏圆盘的个数不超过 $10E_0/\varepsilon_0$. 通过选取 $\{u_n\}$ 的子列, 可以假设这些坏圆盘的中心收敛. 令 $\Omega = \Omega(\delta)$ 是所有这样的极限坏圆盘. 则由命题 9.13(ii), 再次选取子列后, 有 u_n 在 $B \setminus \Omega(\delta)$ 上光滑收敛. 事实上, 对任何 $x \in B \setminus \Omega(\delta)$, 按照定义, 至多有有限个 n , 使得 x 属于这些 u_n 对应的坏圆盘. 将这些对应的 $\{u_n\}$ 去掉, 则对剩下的 $\{u_n\}$, 对任何包含 x 的 δ -圆盘 B_δ^0 都有 $E(u_n; B_\delta^0) < \varepsilon_0$. 从而可以利用命题 9.13(ii) 得到在该圆盘同心的 $B_{\delta/2}^0$ 上一致收敛. 类似处理 $x \in B \setminus (\Omega(\delta) \cup B_{\delta/2}^0)$, 通过取对角线即可得到 $\{u_n\}$ 的子列在 $B \setminus \Omega(\delta)$ 上光滑收敛.

现在, 对 $\delta = \delta_i \rightarrow 0$, 逐次进行上述过程, 则通过取对角线, 存在 $\{u_n\}$ 的子列在 $B \setminus \bigcap_i \Omega(\delta_i)$ 上光滑收敛到某极限 u_∞ . 明显 $\bigcap_i \Omega(\delta_i)$ 是有限点集 (其实至多包含组成 $\Omega(\delta_i)$ 的圆心), 设为 $\{x_1, \dots, x_l\}$. 则注意到对每个 δ_i , 其坏圆盘的个数不超过 $10E_0/\varepsilon_0$, 我们知道 $l \leq 10E_0/\varepsilon_0$. 特别地, u_∞ 是定义在 $B \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ 上的光滑调和映照 (方程可以取极限). 故由命题 9.13(iv) 得到 u_∞ 可以延拓成 B 到 N 的光滑调和映照. 这就完成了 (i) 的证明.

对 (ii), 令 $\delta > 0$, 使得 $\{B_\delta(x_i)\}_{i=1}^l \subset B$ 是两两不交的. 定义

$$m_i := \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{B_\delta(x_i)} ||\nabla u_n|^2 - |\nabla u_\infty|^2|,$$

则容易验证对任何 Lebesgue 可测集 $A \subset B$,

$$\begin{aligned} \int_A ||\nabla u_n|^2 - |\nabla u_\infty|^2| &= \int_{A \setminus \bigcup_{i=1}^l B_\delta(x_i)} ||\nabla u_n|^2 - |\nabla u_\infty|^2| \\ &\quad + \int_{A \cap \bigcup_{i=1}^l B_\delta(x_i)} ||\nabla u_n|^2 - |\nabla u_\infty|^2|, \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由 u_n 在 $A \setminus \bigcup_{i=1}^l B_\delta(x_i)$ 上光滑收敛到 u_∞ 得

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A ||\nabla u_n|^2 - |\nabla u_\infty|^2| &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{A \cap \bigcup_{i=1}^l B_\delta(x_i)} ||\nabla u_n|^2 - |\nabla u_\infty|^2| \\ &= \sum_{i=1}^l \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{A \cap B_\delta(x_i)} ||\nabla u_n|^2 - |\nabla u_\infty|^2|. \end{aligned}$$

最后, 令 $\delta \rightarrow 0$, 则

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A ||\nabla u_n|^2 - |\nabla u_\infty|^2| = \sum_{i=1}^l 2m_i \chi(A \cap \{x_i\}).$$

这表明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |\nabla u_n|^2 = \int_A |\nabla u_\infty|^2 + \sum_{i=1}^l 2m_i \chi(A \cap \{x_i\}).$$

即作为测度有

$$e(u_n) \rightarrow e(u_\infty) + \sum_{i=1}^k m_i \delta(x_i).$$

最后, 我们还需证明 $m_i \geq \varepsilon_0$. 将(9.4)在 $B_\delta(x_i)$ (回忆 δ 小, 使得圆盘两两不交) 上积分, 得到

$$\int_{B_\delta(x_i)} |\nabla u_n|^2 \rightarrow \int_{B_\delta(x_i)} |\nabla u_\infty|^2 + m_i.$$

因此, 若 $m_i < \varepsilon_0$ 对某个 i 成立, 则将 δ 取充分小, 我们有对充分大的 n 都成立 $E(u_n, B_\delta(x_i)) < \varepsilon_0$. 从而小能量正则性 (参考命题 9.13(i)) 表明

$$\sup_{B_\delta(x_i)} |\nabla u_n|^2 \leq C\delta^{-2}E_0,$$

这表明对充分大的 n , $e(u_n)$ 有一致上界, 从而不可能趋于一个 Dirac 测度. $\square$

注记 注意, (9.4) 并不能称为能量等式. 因为我们并没有识别出 m_i 的意义.

关于 bubble tree 的构造, 我们分为以下六步. 在第一步, 我们的构造依赖于一个重整化常数 C_R , 它可以随着需要取得任意小. 目前我们只要求

$$C_R < \varepsilon_0/2. \quad (9.5)$$

我们将在每个爆破点 x_i 处构造 bubble tree. 为了简化记号, 将 x_i 记成 x 且不妨设为原点 (否则做个平移即可), m_i 记成 m . 此外, 我们常常需要取子列, 在不影响理解的情况下, 我们用同一个记号来记序列和其子列而不加区分. 下面所谓的常数 C 是指只与 B, N 的几何以及 E_0 有关的常数. 它可能在不同的地方表示不同的常数.

第一步. 选取重心与缩放因子. 选取某固定的 ρ_0 使得圆盘 $B_{4\rho_0}$ 不包含其它爆破点, 且取 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 是满足如下条件中的最大者

$$\varepsilon_n \leq \min \{\rho_0, 1/n\} \text{ 且 } \int_{B_{2\varepsilon_n}} e(u_\infty) \leq \frac{m}{16n^2}. \quad (9.6)$$

定义测度 $e(u_n)$ 在 $B_{2\varepsilon_n}$ 上的重心为 $c_n = (c_n^1, c_n^2)$,

$$c_n^\alpha = \frac{\int_{B_{2\varepsilon_n}} x^\alpha e(u_n)}{\int_{B_{2\varepsilon_n}} e(u_n)}. \quad (9.7)$$

选取缩放因子 λ_n 为

$$\lambda_n = \text{使得 } \int_{B_{\varepsilon_n}(c_n) \setminus B_{\lambda_n}(c_n)} e(u_n) \geq C_R \text{ 成立的 } \lambda \text{ 中最大者}, \quad (9.8)$$

其中 C_R 为(9.5)中的重整化常数.

引理 9.15 ([37, Lemma 1.3]) 存在 $\{u_n\}$ 的子列, 使得 $|c_n| \leq \varepsilon_n/2n^2$, $\lambda_n \leq \varepsilon_n/n^2$, 以及存在某个常数 C 使得 $u_n(\partial B_n) \subset B_{C/n}(u_\infty(0)) \subset B$.

证明 我们将递归的构造子列 $\{u_{n_k}\}$. 对给定的 $k \geq 1$, 令 $B_k := B_{\varepsilon_k/8k^2}$, $A_k = B_{2\varepsilon_k} \setminus B_k$. 由(9.4)知

$$\begin{aligned} \int_{B_k} e(u_n) &\rightarrow \int_{B_k} e(u_\infty) + m \in \left(m, \frac{m}{16k^2} + m\right), \\ \int_{A_k} e(u_n) &\rightarrow \int_{A_k} e(u_\infty) \leq \int_{B_{2\varepsilon_k}} e(u_n) \leq \frac{m}{16k^2}. \end{aligned}$$

因此, 存在 $N_k > 0$, 当 $n \geq N_k$ 时, 有

$$\frac{8k^2 - 1}{8k^2} m \leq \int_{B_k} e(u_n) \leq \frac{8k^2 + 1}{8k^2} m, \quad (9.9)$$

$$\int_{A_k} e(u_n) \leq \frac{m}{8k^2}. \quad (9.10)$$

此外, 注意到 $\partial B_{2\varepsilon_k} \subset B \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ 是一紧子集, 故引理 9.15(i) 表明当 $n \geq N_k$ 时,

$$\sup_{z \in \partial B_{2\varepsilon_k}} \text{dist}(u_n(z), u_\infty(z)) \leq \frac{1}{k}. \quad (9.11)$$

令 $n_k = \max\{N_k, 1 + n_{k-1}\}$, $n_0 = 1$. 我们可以直接验证子列 $\{u_{n_k}\}$ 满足条件. 事实上, 由(9.9)知

$$\int_{B_{2\varepsilon_{n_k}}} e(u_{n_k}) \geq \int_{B_{n_k}} e(u_{n_k}) \geq \frac{8n_k^2 - 1}{8n_k^2} m,$$

再结合(9.10)知,

$$\int_{B_{2\varepsilon_{n_k}}} |x| e(u_{n_k}) \leq \frac{\varepsilon_{n_k}}{8n_k^2} \int_{B_{n_k}} e(u_{n_k}) + 2\varepsilon_{n_k} \int_{A_{n_k}} e(u_{n_k}) \leq \varepsilon_{n_k} m \left[\frac{24n_k^2 + 1}{64n_k^4} \right].$$

代入 c_{n_k} 的定义(9.7)知

$$|c_{n_k}| \leq \varepsilon_{n_k}/2n_k^2. \quad (9.12)$$

由(9.12), 还可知 $B_{n_k} \subset B' := B_{\varepsilon_{n_k}/n_k^2}(c_{n_k})$, 从而由(9.10),

$$\int_{B_{\varepsilon_{n_k}}(c_{n_k}) \setminus B_{\varepsilon_{n_k}/n_k^2}(c_{n_k})} e(u_{n_k}) \leq \int_{B_{2\varepsilon_{n_k}} \setminus B'} e(u_n) \leq \int_{A_{n_k}} e(u_{n_k}) \leq \frac{m}{8n_k^2} < C_R,$$

这里 C_R 是重整化常数, 如前所述, 我们可以要求 $C_R > \frac{m}{8}$. 于是, 按照缩放因子 λ 的定义, 我们知道 $\lambda_{n_k} \leq \varepsilon_{n_k}/n_k^2$.

最后, 注意到对任意的 $z \in \partial B_{2\varepsilon_{n_k}}$,

$$\text{dist}(u_\infty(0), u_n(z)) \leq \text{dist}(u_\infty(0), u_\infty(z)) + \text{dist}(u_\infty(z), u_n(z)). \quad (9.13)$$

又注意到 u_∞ 是 B 上的光滑调和映照, 故可对 B 中充分小的圆盘上应用小能量正则性 (参考命题 9.13(i)) 得到

$$\sup_B |\nabla u_\infty|^2 \leq CE_0. \quad (9.14)$$

在(9.13)两边同时对 z 取上确界, 并利用(9.6), (9.14)和(9.11)有,

$$\text{dist}(u_\infty(0), u_{n_k}(\partial B_{2\varepsilon_{n_k}})) \leq 2\varepsilon_{n_k} \sup_B |\nabla u_\infty| + \sup_{z \in \partial B_{2\varepsilon_{n_k}}} \text{dist}(u_\infty(z), u_{n_k}(z)) \leq \frac{C}{n_k}.$$

□

我们将上述子列 $\{u_{n_k}\}$ 仍记为 $\{u_n\}$.

第二步. 重整化. 令

$$v_n(x) = u_n(c_n + \lambda_n x),$$

其中 $x \in S_n := \{x \in \mathbb{R}^2: c_n + \lambda_n x \in B_{2\varepsilon_n}\}$. 注意到当 $n \rightarrow \infty$ 时, S_n 穷竭 $\mathbb{R}^2$. 由能量的共形不变性, $E(v_n) \leq E_0$ 对所有的 n 都成立.

引理 9.16 ([37, Lemma 1.4]) 如上定义的 v_n 关于 $\mathbb{R}^2$ 上的标准度量是调和映照. 其测度 $e(v_n) := \frac{1}{2}|\nabla v_n|^2 dx$ 的重心在原点, 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_n} e(v_n) = m, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_n^-} e(v_n) = C_R. \quad (9.15)$$

其中 S_n^- 是 S_n 出去单位圆盘部分.

证明 关于 v_n 的调和性是显然的, 因为 v_n 是 u_n 经过共形变换 (缩放, 平移都是共形变换) 而得到的. 而由于调和映照的能量泛函在共形下是不变的, 故一个调和映照经过共形变换后得到的仍是调和映照.

利用能量的共形不变性以及(9.4)知

$$\int_{S_n} e(v_n) = \int_{B_{2\varepsilon_n}} e(u_n) \rightarrow m.$$

类似地, 按照 λ_n 的定义(9.8),

$$\begin{aligned} \int_{S_n^-} e(v_n) &= \int_{B_{2\varepsilon_n} \setminus B_{\lambda_n}(c_n)} e(u_n) = \left(\int_{B_{2\varepsilon_n} \setminus B_{\varepsilon_n}(c_n)} + \int_{B_{\varepsilon_n}(c_n) \setminus B_{\lambda_n}(c_n)} \right) e(u_n) \\ &= \int_{B_{2\varepsilon_n} \setminus B_{\varepsilon_n}(c_n)} e(u_n) + C_R \rightarrow C_R, \end{aligned}$$

最后一步我们用到了引理 9.14(i), 它表明 u_n 在奇点之外强收敛到 u_∞ . $B_{2\varepsilon_n} \setminus B_{\varepsilon_n}(c_n)$ 不含爆破点可由引理 9.15得到.

最后, 按照重心的定义知道 $v_n(x) := u_n(c_n + \lambda_n x)$ (在 S_n 上) 的重心为原点. 事实上,

$$\frac{\int_{S_n} x^\alpha e(v_n)}{\int_{S_n} e(v_n)} = \frac{\int_{B_{2\varepsilon_n}} (y^\alpha - c_n^\alpha) / \lambda_n \cdot e(u_n)}{\int_{B_{2\varepsilon_n}} e(u_n)} = \frac{1}{\lambda_n} (c_n^\alpha - c_n^\alpha) = 0.$$

□

接下来, 我们将取 $\{v_n\}$ 的子列, 并将在下一步用迭代的办法构造该子列的 bubble. 为此, 选取一穷竭 $\mathbb{R}^2$ 的紧子集 $\{K_k\}_{k=1}^\infty$. 在每个 K_k 上对 v_n 用引理 9.14, 然后利用对角线法则选取 $\{v_n\}$ 的子列. 这样得到的子列在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{y_1, \dots, y_k\}$ 的任何紧子集上光滑收敛到 v_∞ . 由奇点可去命题 9.13(iv) 知, v_∞ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑调和映照. 再次利用调和映照的共形不变和奇点可去知 v_∞ 是 S^2 上的光滑调和映照. 注意到由 (9.15) 以及 $0 < C_R < \varepsilon_0/2$, 并利用命题 9.13(ii) 知, v_n 在 S_n^- 上光滑收敛到 v_∞ , 特别地, v_∞ 不是常值映照. 我们称这样的 v_∞ 为 $\{v_n\}$ 在 $x = 0$ 处的一个 bubble.

此外, 由引理 9.14 知, 作为测度, 在 $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} = S^2$ 上有

$$e(v_n) \rightarrow e(v_\infty) + \sum_{j=1}^k m_j \delta(y_j) + \tau_0 \delta(\infty). \quad (9.16)$$

这里 τ_0 是与 $x = 0$ 有关的常数, 而 $\delta(\infty)$ 是将 v_n 紧化 (通过求其投影) 后无穷远点对应的极点处的 Dirac 测度.

第三步. 迭代. 在第二步, 我们在每个爆破点 x 通过选取 $\{u_n\}$ 经过适当平移与缩放后的子列, 得到一列定义在穷竭 $\mathbb{R}^2$ 的紧集上的调和映照 $\{v_n\}$, v_n 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{y_1, \dots, y_k\}$ 的任何紧子集上光滑收敛到 v_∞ . 而且我们证明了, v_∞ 可延拓成 S^2 上的非常值调和映照, 称为一个 bubble.

引理 9.17 ([37, Lemma 1.5]) (i) 每个第二层爆破点 y_j 都位于 S_n^- ;

(ii) 若 $E(v_\infty) < \varepsilon_0$, 则 v_∞ 是一个常值映照. 而且要么

(a) 存在 $k \geq 2$ 个第二层爆破点;

(b) $k = 1$, 此时 $\tau_0 = C_R$.

证明 将 (9.16) 在 S_n^- 上积分得到

$$\int_{S_n^-} e(v_n) \rightarrow \int_{S_n^-} e(v_\infty) + \sum_{j=1}^k m_j \chi(\{y_j\} \cap S_n^-) + \tau_0 \delta(\{\infty\} \cap S_n^-),$$

两边取对 $n \rightarrow \infty$ 极限并利用 (9.15) 得到

$$C_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_n^-} e(v_\infty) + \sum_{j=1}^k m_j \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(\{y_j\} \cap S_n^-) + \tau_0. \quad (9.17)$$

注意到 $m_j \geq \varepsilon_0 > C_R$, 知 $y_j \notin S_N^-, j = 1, 2, \dots, k$.

如果, $E(v_\infty) < \varepsilon_0$, 则由命题 9.13(iii) 知, v_∞ 是一个常值映射进而 $e(v_\infty) = 0$. 而由(9.15)知它在 S_n^- 的积分为 C_R , 从而在 $S_n^+ := S_n \setminus S_n^-$ 的积分为 $m - C_R \geq \varepsilon_0 - C_R > 0$. 如果 $k = 0$, 则与(9.16)在 S_n^+ 上积分矛盾. 如果 $k = 1$, 则 $e(v_n) \rightarrow m_1\delta(y_1) + \tau_0\delta(\infty)$, 这里 $m_1 \geq \varepsilon_0$. 而由引理 9.16 知 $m_1\delta(y_1) + \tau_0\delta(\infty)$ 的重心在原点. 从而 y_1 恰好是原点且 $\tau_0 = C_R$. $\square$

现在, 我们可以在每个爆破点 y_j 处重复上述构造过程, 并对新产生的爆破点再次重复上述构造过程, 这样我们就得到 bubble 之上的 bubble. 由引理 9.16(ii) 知 $m_j \geq \varepsilon_0 > C_R = \tau_0$, 从而每次迭代至少带走 C_R 的能量. 从而上述迭代过程至多进行 E_0/C_R 次. 作为迭代的结果, 我们得到了 bubble tree. 接下来, 我们将具体的描述它的树状结构.

第四步. 区域分解与映照分解. 在 $\{u_n\}$ 的每个爆破点的 $B_{2\varepsilon_n}$ 邻域中, 我们考察

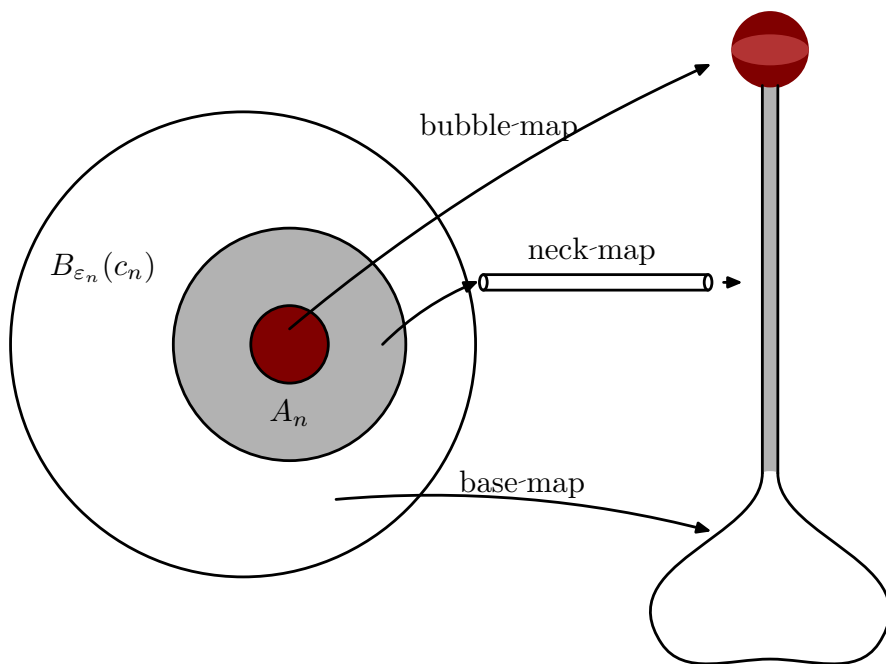


图 9.1 区域分解与映射分解

三个嵌套区域: 圆盘 $D_n := B_{\varepsilon_n}(c_n)$, 更小的圆盘 $D'_n := B_{\lambda_n}(c_n)$ 以及环形区域 $A_n := D_n \setminus D'_n$ (参见图 9.1). 通过限制与锥延拓, 我们将得到如下三种映射 (参见图 9.1):

基映照. 将 u_n 限制到 $B \setminus \bigcup_{i=1}^l B_{\varepsilon_{n,i}}(c_{n,i})$

$$u_n: B \setminus \bigcup_{i=1}^l B_{\varepsilon_{n,i}}(c_{n,i}) \rightarrow N,$$

它在每个爆破点 x_i 附近, 在邻域 $D_{n,i}$ 之外有定义. 由引理 9.15, $u_n(\partial D_{n,i}) \subset$

$B_{C/n}(u_\infty(x_i))$ (这在 B 非平坦时, 可以说明下面的锥延拓在测地球上可定义). 因此, 我们可将上述 u_n 的限制通过如下的**锥延拓**使其定义在整个 B 上:

$$\bar{u}_n(r, \theta) := \frac{r}{\varepsilon_{n,i}} u_n(\varepsilon_{n,i}, \theta),$$

这里 (r, θ) 是 $D_{n,i}$ 中以 x_i 为原点的极坐标. 在每个爆破点 $\{x_i\}$ 都如此作锥延拓, 最终得到映射

$$\bar{u}_n: B \rightarrow N,$$

称为**基映照**.

Bubble 映照. 将 u_n 限制到 $B_{n\lambda_{n,i}}(c_{n,i})$, 并定义

$$B_n(0) \rightarrow N, \quad w_n(x) := u_n(c_{n,i} + \lambda_{n,i}x).$$

明显, 在 $B_n(0)$ 上, 它和第二步定义的 v_n 是一样的.

Neck 映照. 最后, 将 u_n 限制到环形区域 $A_{n,i}$ 得到**Neck 映照**:

$$u_n|_{A_{n,i}}: A_{n,i} := B_{\varepsilon_{n,i}}(c_{n,i}) \setminus B_{n\lambda_{n,i}}(c_{n,i}) \rightarrow N.$$

易见, 基映照 $\bar{u}_n$ 光滑收敛到 u_∞ . 而在第二步中定义的 v_n 限制分解为 **bubble 映照** w_n 和 **neck 映照** $u_n|_{A_{n,i}}$. 前者在 $\mathbb{R}^2$ 上局部光滑收敛到 v_∞ . 后者当 $n \rightarrow \infty$ 时, 其定义域收敛到爆破点 $\{x_i\}$ 且最终产生(9.16)中的 Dirac 测度 $\tau(x_i)\delta(\infty)$. 特别地, 在子列意义下, 容易证明如下结论:

引理 9.18 ([37, Lemma 1.6]) 在上述假设和定义下. 我们有

- (i) $\bar{u}_n$ 在 B 上光滑收敛到 u_∞ ;
- (ii) w_n 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{y_1, \dots, y_k\}$ 上局部光滑收敛到 v_∞ ;
- (iii)

$$\tau_{x_i} = \limsup_n E(u_n|_{A_{n,i}})$$

且

$$E(u_n) \rightarrow E(u_\infty) + \sum_{i=1}^l \left(\tau(x_i) + \lim_{n \rightarrow \infty} E(v_{n,i}) \right)$$

证明几乎是显然的, 唯一需要证明的是锥延拓的能量可控制.

第五步. Neck 映照的重整化. Neck 映照的定义域 $B_{\varepsilon_{n,i}}(c_{n,i}) \setminus B_{n\lambda_{n,i}}(c_{n,i})$ 是一个特殊的“地带”, 它既不是基映照的一部分, 也不是 bubble 映照的一部分. 我们知道, 在 Neck 区域的内部, u_n 的重整化 v_n 局部光滑的收敛到 bubble. 在 neck 区域的外部, u_n 光滑收敛到 u_∞ . 因此 Neck 映照是属于 u_n 的一部分并且需要单独的处理.

一般而言, 大家习惯将 neck 区域利用柱坐标参数化到一个柱面上. 为此, 考虑以 c_n 为心的极坐标下 $u_n(r, \theta)$ 的柱坐标变换

$$\phi_n : [0, T_n] \times S^1 \rightarrow N, \quad \phi_n(t, \theta) = u_n(\varepsilon_n e^{-t}, \theta).$$

明显地, ϕ_n 的像集是形如 $\gamma_{n,t} := \phi_n(t, S^1) \subset N, t \in [1, T_n]$ 的环 (loop) 之并. 每个环的能量为

$$P_n(t) = \int_0^{2\pi} |\partial_\theta \gamma_{n,t}|^2 d\theta.$$

注意, 这里柱面的度量是由环形区域上的欧氏度量诱导的.

引理 9.19 ([37, Lemma 1.7]) Neck 映照关于柱面上的标准度量 $ds^2 = dt^2 + d\theta^2$ 是调和映照. 且

$$\sup e(\phi_n) \leq CC_r.$$

此外, 对 $0 \leq t \leq T_n$,

$$l^2(\gamma_{n,t}) \leq 2\pi P_n(t) \leq 2\pi CC_R,$$

而在两端

$$\begin{aligned} l^2(\gamma_{n,0}) &\leq 2\pi P_n(0) \leq \frac{C}{n^2} \\ l^2(\gamma_{n,1}) &\leq 2\pi P_n(1) \leq \frac{C}{n^2}. \end{aligned}$$

其中 $l(\gamma)$ 表示 γ 的长度.

现在, 重新定义 C_R 使得 $2\pi CC_R < 1/100$. 而上述引理表明, neck 映照的每个像集是 N 中非常细的长管子, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, 长管子的两边界曲线趋于零.

第六步. Bubble 树. 通过第一到第五步的构造, 我们得到了以调和映照顶点, 以爆破点集为边的 bubble 树. 其构造如下: u_n 在 $B \setminus \{x_i\}_{i=1}^l$ 上局部光滑收敛到 u_∞ . bubble 树的基顶点为调和映照 u_∞ , 我们重新将其编号为 u_0 . 在每个爆破点 x_i , 通过第二步和第五步的重整化, 我们得到 Neck 映照 $\phi_{n,i}$ 和 bubble 映照 $w_{n,i}$, 其中 $w_{n,i}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上局部光滑收敛到调和映照 w_∞ . 二元对 $(x_i, \phi_{n,i})$ 就标记了从基顶点到下一个顶点 (bubble w_∞) 的边. 如此继续下去, 我们就得到了 bubble 树.

9.2 能量等式与 No Neck

本节也可以参考 [23, Chapter 1]. 我们主要证明如下定理

定理 9.20 假设 $B \subset \mathbb{R}^2$ 是单位圆盘. 如果 $\{u_n\}$ 是一列从 B 到光滑流形 N 的调和映照满足以下假设

- (i) $E(u_n) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla u_n|^2 dx \leq C < +\infty$;
- (ii) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u_\infty$ 在 $C^\infty(B \setminus \{0\}, N)$ 拓扑下.

则存在 $\{u_n\}$ 的子列 (以后都不加区分), 点列 $\{x_n^i\}$, 伸缩因子 r_n^i 和调和球 $\{\omega^i\}_{i=1}^K$, 满足

- (i) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $x_n^i \rightarrow 0, r_n^i \rightarrow 0$;
- (ii) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n^i(x) := u_n(x_n^i + r_n^i x) \rightharpoonup \omega^i$ in $W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^2, N)$;
- (iii) 关于 bubble 的位置关系, 我们有: 对任意的 $i \neq j$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_n^i}{r_n^j} + \frac{r_n^j}{r_n^i} + \frac{|x_n^i - x_n^j|}{r_n^i + r_n^j} \right) = +\infty.$$

- (iv) 能量等式成立

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n; B_\delta \setminus B_{r_n^i R}(x_n^i)) = 0,$$

也即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n; B) = E(u_\infty; B) + \sum_{i=1}^K E(\omega^i).$$

- (v) 这些 bubble 具有 no neck 性质, 即

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{osc}_{B_\delta \setminus B_{r_n^i R}(x_n^i)} u_n = 0.$$

这即是说 u_∞ 与 $\bigcup_{i=1}^K \omega^i(\mathbb{R}^2)$ 是连通的.

定理 9.20 结论中 (i)—(iii) 都是 bubble tree 构造过程中的结论. 我们主要关心能量等式与 no neck 性质.

做单位圆盘上极坐标到柱坐标的变换 $(r, \theta) = (e^{-t}, \theta)$, 由于调和映照 u_n 是共形不变的, 故以后都不妨假设 u_n 是定义在

$$\Sigma := [T_0, T_1] \times S^1 := [-\log \delta, -\log(r_n^i R)] \times S^1$$

的管子上的调和映照. 且由 Ding—Tian [7, p. 549, (2.10)](也可参考第 9.1.1 小节) 关于 bubble tree 的构造, 可以假设只有一个 bubble(故我们记 $x_n = x_n^i, r_n = r_n^i$). 此时, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, 成立 $E(u_n; P_i) \leq \varepsilon$. 其中 $P_i = [T_0 + (i-1)L, T_0 + iL]$, L 是与 $\{u_n\}$ 以及 i 无关的常数. 不失一般性, 可设 $[T_0, T_1] = \bigcup_{i=1}^{Q_n} P_i$.

要点是要证明 $E(u_n; P_i)$ 关于 i 的指数衰减

$$E(u_n; P_i) \leq C\varepsilon \left(e^{-\frac{i}{2}L} + e^{-\frac{Q_n-i}{2}L} \right). \quad (9.18)$$

若有(9.18)成立, 则

$$E(u_n; B_\delta \setminus B_{r_n} R) \leq \sum_{i=1}^{Q_n} E(u_n; P_i) \leq C\varepsilon \sum_{i=1}^{Q_n} \left(e^{-\frac{i}{2}L} + e^{-\frac{Q_n-i}{2}L} \right) \leq C\varepsilon.$$

可见能量等式成立.

下面来看 no neck 性质. 注意到

$$\begin{aligned} \text{OSC}_{B_\delta \setminus B_{r_n} R} u_n &\leq \sum_{i=1}^{Q_n} \text{OSC}_{P_i} u_n \leq L \sum_{i=1}^{Q_n} \|\nabla u_n\|_{\infty; P_i} \\ &\leq CL \sum_{i=1}^{Q_n} \|\nabla u_n\|_{2; P_i} \quad (\text{by } \varepsilon\text{-regularity theorem}) \\ &= CL \sum_{i=1}^{Q_n} E(u_n; P_i) \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

综上所述, 我们只需要证明每段管子上能量的衰减估计(9.18)即可.

9.3 Pohozaev 恒等式

我们将利用 Pohozaev 恒等式说明径向能量和切向能量相等, 从而只需证明切向能量的衰减估计.

引理 9.21 (Pohozaev 恒等式) 假设 u 是定义在 B 上的调和映照, 则

$$\int_{S^1} |\partial_t u|^2 d\theta = \int_{S^1} |\partial_\theta u|^2 d\theta, \quad \forall t \leq 0.$$

特别地,

$$\begin{aligned} \int_{P_i} |\partial_t u|^2 d\theta dr &= \int_{T_0+(i-1)L}^{T_0+iL} \int_{S^1} |\partial_t u|^2 d\theta dr \\ &= \int_{T_0+(i-1)L}^{T_0+iL} \int_{S^1} |\partial_\theta u|^2 d\theta dr = \int_{P_i} |\partial_\theta u|^2 d\theta dr, \end{aligned}$$

即径向能量与切向能量相等.

证明 对调和映照方程 $\Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 0$ 和 $\partial_t u$ 做内积并分部积分即得. $\square$

9.4 切向能量的衰减估计

在 Qing J. 和 Tian G. 的文章 [40, Proposition 2.1] 中, 他们首先对调和函数利用分离变量法证明了三圈引理, 然后用反证法证明了三圈引理对逼近调和函数仍

然成立. 我们下面首先对调和函数复现 Qing—Tian 的证明, 然后对逼近调和映照 $\tilde{u} = u - u^*$, $u^*(t) = \int_{S^1} u(t, \theta) d\theta$ 证明三圈引理仍然成立.

为了对 $\tilde{u}$ 能够仿照调和映照使用反证法证明三圈定理. 我们需要证明一系列 $\|\tilde{u}_k\|_{2; \tilde{P}_i}$ 有界序列具有 $W^{2,2}$ -弱紧性. 为此, 先来看 $\tilde{u}_k$ 应满足的方程.

命题 9.22 假设 $u: P_{i-1} \cup P_i \cup P_{i+1} := \tilde{P}_i \rightarrow N \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 上的调和映照, 则对任意的 $\eta > 0$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 u 满足

$$\|\nabla u\|_{\infty; \tilde{P}_i} \leq \varepsilon, \quad (9.19)$$

时, 有

$$\tilde{u} = u - \int_{S^1} u d\theta$$

满足

$$\Delta \tilde{u} = A_1 \tilde{u} + A_2 \nabla \tilde{u} + \int_{S^1} (A_3 \tilde{u} + A_4 \nabla \tilde{u}) d\theta, \quad (9.20)$$

其中 $A_i, i = 1, 2, 3, 4$ 是光滑函数, 且满足 $\|A_i\|_{\infty; \tilde{P}_i} \leq \eta$. 我们称满足(9.20)的 $\tilde{u}$ 为 η -逼近调和映照.

注记 由 Bubble tree 的构造, 当 n 充分大时, 我们可假设 $E(u_n; P_i) < \varepsilon/C \leq \varepsilon_0/3$, 这里 $\tilde{P}_i = \bigcup_{i=1}^{Q_n} P_i$. 从而由小能量正则性定理知 $\|\nabla u_n\|_{\infty; \tilde{P}_i} \leq \varepsilon$. 故上述命题中的条件(9.19)对充分大的 u_n 都成立.

证明 事实上, 我们可将 N 在 u 处的第二基本型 $A(u)$ 常值延拓到 $N \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 的一个小邻域. 这样 $|A|, |\nabla A|$ (A 看成拉回丛上的张量, ∇A 是共变微分) 有只依赖于 N 的上界. 由条件(9.19)知 $A(u^*)$ 也有定义. 这样, 我们通过加项减项的技巧得到

$$\begin{aligned} A(u)(\nabla u, \nabla u) - A(u^*)(\nabla u^*, \nabla u^*) &= A(u)(\nabla u, \nabla u) - A(u^*)(\nabla u, \nabla u) \\ &\quad + A(u^*)(\nabla u, \nabla u) - A(u^*)(\nabla u^*, \nabla u) \\ &\quad + A(u^*)(\nabla u^*, \nabla u) - A(u^*)(\nabla u^*, \nabla u^*) \\ &= A_1(u - u^*) + A_2 \nabla(u - u^*), \end{aligned}$$

这里, $\|A_1\|_{\infty; \Sigma} \leq |\nabla A| \|\nabla u\|_{\infty; \Sigma}^2 \leq C\varepsilon^2$; $\|A_2\|_{\infty; \Sigma} \leq |A| \|\nabla u\|_{\infty; \tilde{P}_i} \leq C\varepsilon$.

最后由

$$\begin{aligned} \Delta(u - u^*) &= A(u)(\nabla u, \nabla u) - \int_{S^1} A(u)(\nabla u, \nabla u) d\theta \\ &= A(u)(\nabla u, \nabla u) - A(u^*)(\nabla u^*, \nabla u^*) - \int_{S^1} (A_1 \tilde{u} + A_2 \tilde{u}) d\theta \\ &= A_1 \tilde{u} + A_2 \tilde{u} - \int_{S^1} (A_1 \tilde{u} + A_2 \tilde{u}) d\theta, \end{aligned}$$

知对任意的 $\eta > 0$, 可取 ε 充分小, 使得 $C\varepsilon^2 < \eta$, $C\varepsilon < \eta$. 这样 $\tilde{u} = u - u^*$ 是 η 逼近调和映照. $\square$

接下来, 我们将要证明对 L^2 有限的 η -逼近调和映照序列有 $W^{2,2}$ -弱紧性.

命题 9.23 假设 $u: [T_0, T_1] \times S^1 := \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^N$ 是 η -逼近调和映照, 则

$$\|u\|_{W^{2,2}[-1,1] \times S^1} \leq C(\eta) \|u\|_{2;\Sigma}.$$

证明 对任意的 $\sigma \in [1, 2)$, 记 $P_\sigma := [-\sigma, \sigma] \times S^1$, $2\sigma' = \sigma + 2$. 选取截断函数 ϕ , 使得

$$0 \leq \phi \leq 1, \quad \phi|_{P_\sigma} \equiv 1, \quad \text{supp } \phi \subset P_{\sigma'}, \quad |\nabla^k \phi| \leq \frac{4}{(2-\sigma)^k}, \quad \forall k \geq 1.$$

计算 ϕu 的方程得到

$$\begin{aligned} \Delta(\phi u) &= \Delta\phi u + 2\nabla\phi \nabla u + \phi \Delta u \\ &= (\Delta\phi + \phi A_1)u + (2\nabla\phi + \phi A_2)\nabla u + \phi \int_{S^1} (A_3 u + A_4 \nabla u) d\theta. \end{aligned}$$

故由椭圆方程的 L^p 估计得到

$$\begin{aligned} \|\phi u\|_{W^{2,2}(\Sigma)} &\leq C\|\phi u\|_{2;\Sigma} + \|LHS\|_{2;\Sigma} \\ &\leq C \left[\left(1 + \frac{1}{(2-\sigma)^2} + \eta\right) \|u\|_{2;\Sigma} + \left(\frac{1}{2-\sigma} + \eta\right) \|\nabla u\|_{2;P_{\sigma'}} \right] \\ &\leq C(1+\eta) \left(\frac{\|u\|_{2;\Sigma}}{(2-\sigma)^2} + \frac{\|\nabla u\|_{2;P_{\sigma'}}}{2-\sigma} \right) \quad (\text{by } \sigma \in [1, 2)) \\ &\leq C(1+\eta) \left((2-\sigma)^{-2} \|u\|_{2;\Sigma} + (2-\sigma')^{-1} \|\nabla u\|_{2;P_{\sigma'}} \right). \end{aligned}$$

最后一个不等式我们用了 $2-\sigma = 2(2-\sigma')$.

注意, 上式我们将区域和系数配成整齐的形式, 这便于应用插值不等式来用最高阶模和最低阶模控制中间的模. 事实上, 令 $\Phi_j = \sup_{1 \leq \sigma \leq 2} (2-\sigma)^j \|\nabla^j u\|_{2;P_\sigma}$, $j = 0, 1, 2$. 则由以上计算容易得到

$$\begin{aligned} (2-\sigma)^2 \|\nabla^2 u\|_{2;P_\sigma} &\leq (2-\sigma)^2 \|\phi u\|_{W^{2,2}(\Sigma)} \leq C(\eta) (\|u\|_{2;\Sigma} + 2(2-\sigma) \|\nabla u\|_{2;P_{\sigma'}}) \\ &\leq C(\eta) (\|u\|_{2;\Sigma} + 4(2-\sigma') \|\nabla u\|_{2;P_{\sigma'}}) \\ &\leq C(\eta) \left(\|u\|_{2;\Sigma} + \sup_{1 \leq \sigma \leq 2} (2-\sigma') \|\nabla u\|_{2;P_{\sigma'}} \right) \\ &\leq C(\eta) \left(\|u\|_{2;\Sigma} + \sup_{3/2 \leq \sigma' \leq 2} (2-\sigma') \|\nabla u\|_{2;P_{\sigma'}} \right) \\ &\leq C(\eta) (\|u\|_{2;\Sigma} + \Phi_1), \end{aligned}$$

故

$$\Phi_2 \leq C(\eta) (\|u\|_{2;\Sigma} + \Phi_1). \quad (9.21)$$

现在, 我们需要如下的插值不等式 [1, Lem. 5.2(1)]: 对任意的 $\varepsilon_0 > 0$, 存在常数 C_0 仅依赖于 ε_0 , 使得对所有的 $u \in W^{2,2}(\Omega)$ (这里我们只应用到光滑边界的区域),

$$\|Du\|_{2;\Omega} \leq C_0\varepsilon \|D^2u\|_{2;\Omega} + \frac{C_0}{\varepsilon} \|u\|_{2;\Omega}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

按照 Φ_1 的定义, 对任意的 $s > 0$, 存在 $\sigma_s \in [1, 2)$, 使得

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\leq (2 - \sigma_s) \|Du\|_{2;P_{\sigma_s}} + s \\ &\leq \varepsilon' (2 - \sigma_s)^2 \|D^2u\|_{2;P_{\sigma_s}} + \frac{C'}{\varepsilon'} \|u\|_{2;P_{\sigma_s}} + s, \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon' = C_0\varepsilon/(2 - \sigma_s)$, $C' = C_0^2$.

对任意固定的 $s \in (0, 1]$, 取 ε 充分小, 使得 $\varepsilon' = \min \{1/2, C_0\varepsilon_0/(2 - \sigma_s)\} \geq \max \{1/2, C_0\varepsilon_0\} := c_0$. 则

$$\Phi_1 \leq \frac{1}{2} \Phi_2 + \frac{C'}{c_0} \Phi_0 + s. \quad (9.22)$$

在(9.22)中令 $s \rightarrow 0$, 并代入(9.21), 得到

$$\Phi_2 \leq C(\eta, C_0, \varepsilon_0) \|u\|_{2;\Sigma},$$

即

$$\|D^2u\|_{2;P_\sigma} \leq \frac{C(\eta)}{(2 - \sigma)^2} \|u\|_{2;\Sigma}, \quad \forall \sigma \in [1, 2).$$

特别地, 令 $\sigma = 1$ 并结合(9.22)即得欲证之结论. $\square$

Qing—Tian 注意到对调和函数 u , $\|u\|_{2;P_i}^2$ 具有如下对数凸性质.

引理 9.24 存在常数 $L > 0$, 使得对任意的光滑调和映照

$$u: \tilde{P}_i := P_{i-1} \bigcup P_i \bigcup P_{i+1} \rightarrow N \hookrightarrow \mathbb{R}^N,$$

若满足

$$\int_{S^1} u d\theta = 0, \quad \text{on } \tilde{P}_i,$$

则 $\|u\|_{2;P_i}^2$ 具有对数凸性质, 即

$$\|u\|_{2;P_i}^2 < \frac{e^{-L}}{2} \left(\|u\|_{2;P_{i-1}}^2 + \|u\|_{2;P_{i+1}}^2 \right). \quad (9.23)$$

至此, 我们已经准备好对逼近调和映照证明三圈引理.

引理 9.25 假设 $u: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^N$ 是一光滑 η -逼近调和映照. 如果

$$\int_{S_1} u d\theta = 0, \quad \forall t \in [T_0, T_1],$$

那么存在 $\eta_0 > 0$, 使得当 $\eta < \eta_0$ 时, 对任意的 $i: 2 \leq i \leq Q_n - 1$, 有下列结论成立:

(i) 如果

$$\|u\|_{2;P_{i+1}} \leq e^{-L/2} \|u\|_{2;P_i}$$

即 P_i 位于左边—单调减, 则

$$\|u\|_{2;P_i} \leq e^{-L/2} \|u\|_{2;P_{i-1}};$$

(ii) 如果

$$\|u\|_{2;P_{i-1}} \leq e^{-L/2} \|u\|_{2;P_i}$$

即 P_i 位于右边—单调增, 则

$$\|u\|_{2;P_i} \leq e^{-L/2} \|u\|_{2;P_{i+1}};$$

(iii) $\|u\|_{2;P_i} \leq e^{-L/2} \|u\|_{2;P_{i-1}}, \|u\|_{2;P_i} \leq e^{-L/2} \|u\|_{2;P_{i+1}}$ 中至少有一个成立.

这里, L 是引理 9.24 中的常数.

证明 首先对调和函数来证明. 此时若有

$$\|u\|_{2;P_{i+1}} \leq e^{-L/2} \|u\|_{2;P_i} \stackrel{(9.23)}{\implies} \|u\|_{2;P_i} \leq e^{-L/2} \|u\|_{2;P_{i-1}};$$

此即 (i). 注意到(9.23)中关于区域 P_{i-1} 与 P_{i+1} 是可以互换的, 故互换 (i) 中的 P_{i-1} 与 P_{i+1} , (i) 仍然成立. 这就证明了 (ii). 对 (iii), 反设都不成立, 则易见与(9.23)矛盾.

下面用反证法证明结论对逼近调和映照仍然成立. 事实上, 如若不然, 则存在 $\eta_k \rightarrow 0$, 以及 η_k 逼近调和映照 u_k (特别地, $\|A_{j,k}\|_\infty \leq \eta_k, j = 1, 2, 3, 4$), 使得对该序列 $\{u_k\}$ (i)—(iii) 中的结论之一不成立. 不妨假设 (iii) 不成立. 则存在 $i \in [2, Q_n - 1]$, 使得

$$\|u_k\|_{2;P_i} > e^{-L/2} \|u_k\|_{2;P_{i-1}}, \quad \|u_k\|_{2;P_i} > e^{-L/2} \|u_k\|_{2;P_{i+1}}. \quad (9.24)$$

通过正则化, 我们可以假设 $\|u_k\|_{2;P_i} = 1$. 这表明

$$\|u_k\|_{2;\tilde{P}_i} \leq 2e^{L/2} + 1 < +\infty.$$

因此由命题 9.23 知

$$\|u_k\|_{W^{2,2}(P_i)} \leq C.$$

由 $W^{2,2}(P_i)$ 的弱紧性知存在子列 $u_k \rightharpoonup u \in W^{2,2}(P_i)$, $u_k \rightarrow u \in W^{1,2}(P_i)$, $u_k \rightharpoonup u \in L^2(P_{i-1} \cup P_i \cup P_{i+1})$. 从而对逼近调和映照的方程(9.20)取极限 $k \rightarrow \infty$ 并结合条件 $\|A_{j,k}\|_{\infty;P_i} \leq \|A_{j,k}\|_{\infty;\Sigma} \leq \eta_k \rightarrow 0$ 知

$$\Delta u = 0$$

由弱调和函数的正则性知 u 是光滑调和函数. 进而 u 满足(9.23), 但由于 $u_k \rightarrow u \in L^2(P_i)$ 以及 $u_k \rightharpoonup u \in L^2(\tilde{P}_i)$ 并利用范数的弱下半连续性知(9.24)与(9.23)矛盾. $\square$

在本节最后, 我们来完成调和映照切向能量的衰减估计. 它蕴含在如下推论中.

推论 9.26 假设 $u: \Sigma \rightarrow N \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ 是调和映照. 若满足 $E(u; \Sigma) < \varepsilon$, 则(9.18)对 u 成立, 即

$$\|\partial_\theta u\|_{2;P_i} \leq C\varepsilon \left(e^{-\frac{i}{2}L} + e^{-\frac{Q-i}{2}L} \right).$$

证明 由命题 9.22 知 $\tilde{u} = u - u^*$ 是 η -逼近调和映照. 从而由引理 9.25 的 (iii) 至少有

$$\|\tilde{u}\|_{2;P_i} \leq e^{-L/2} \|\tilde{u}\|_{2;P_{i+1}}, \quad \|\tilde{u}\|_{2;P_i} \leq e^{-L/2} \|\tilde{u}\|_{2;P_{i-1}}$$

之一成立. 再由引理 9.25 的 (i)–(ii) 迭代得

$$\|\tilde{u}\|_{2;P_i} \leq e^{-(Q-i)L/2} \|\tilde{u}\|_{2;P_Q}, \quad \|\tilde{u}\|_{2;P_i} \leq e^{-(i-1)L/2} \|\tilde{u}\|_{2;P_1}$$

对应成立. 从而

$$\|\tilde{u}\|_{2;P_i} \leq \left(e^{-(Q-i)L/2} + e^{-(i-1)L/2} \right) \|\tilde{u}\|_{2;P_1 \cup P_Q}.$$

注意到 u^* 与 θ 无关, 我们得到

$$\|\partial_\theta u\|_{2;P_i} = \|\partial_\theta \tilde{u}\|_{2;P_i} \leq \|\nabla \tilde{u}\|_{2;P_i},$$

由逼近调和映照的内估计 (命题 9.23) 知

$$\|\nabla \tilde{u}\|_{2;P_i} \leq C(\eta) \|\tilde{u}\|_{2;\tilde{P}_i}.$$

而由上面得到的衰减估计

$$\|\tilde{u}\|_{2;\tilde{P}_i} \leq C \left(e^{-(Q-i)L/2} + e^{-iL/2} \right) \|\tilde{u}\|_{2;P_1 \cup P_Q}.$$

现在, 利用 Poincaré 不等式得到

$$\|\tilde{u}\|_{2;P_1 \cup P_Q} = \|u - u^*\|_{2;P_1 \cup P_Q} \leq \|\nabla \tilde{u}\|_{2;P_1 \cup P_Q}$$

综合以上几式得到

$$\|\partial_\theta u\|_{2;P_i} \leq C\varepsilon \left(e^{-(Q-i)L/2} + e^{-iL/2} \right).$$

$\square$

第 10 章 多调和映照的三圈定理

从调和映照的 Neck 分析知三圈引理在证明能量的切向衰减时起着关键作用. 在本章, 我们将证明多调和映照的三圈引理. 事实表明, 多调和映照的三圈引理依赖于多调和函数在球调和坐标下展开的系数作为 Hilbert 空间的基, 它们之间的夹角有下界估计. 为了便于读者理解, 我们首先考察了 Hilbert 空间中两个特殊 2 维子空间的夹角, 并说明由此可以证明双调和映照的三圈引理. 最后, 我们通过估计夹角的下界得到多调和映照的三圈引理.

10.1 实 Hilbert 空间中两个 2 维子空间的夹角

假设 $H = L^2[-l/2, l/2]$ 是区间 $[-l/2, l/2]$ 上的平方可积函数, 我们知道 H 是一个实 Hilbert 空间, 其内积由 $\langle f, g \rangle := \int_{-l/2}^{l/2} f(t)g(t)dt$ 定义. 现在假设 $a_1 = e^{nt}$, $a_2 = e^{-nt}$ 张成平面 R_n , $b_1 = e^{mt}$, $b_2 = e^{-mt}$ 张成平面 R_m , 其中 $m, n \geq 1$ 是正整数.

问题 定义并求解平面 R_m 与 R_n 的夹角, 其中 $m > n \geq 1$.

首先, 一种合理的定义两个二维子空间的夹角的方式如下

$$\cos \angle(R_m, R_n) := \sup_{\substack{\alpha \in R_m, \beta \in R_n \\ \alpha \neq 0, \beta \neq 0}} \frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|}{\|\alpha\| \|\beta\|}.$$

命题 10.1 假设 P 是 H 到 R_m 的正交投影算子在 R_n 上的限制. 则

$$\cos \angle(R_m, R_n) = \|P\|.$$

证明 事实上, 只需注意到

$$\frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|}{\|\alpha\| \|\beta\|} = \frac{|\langle \alpha, P\beta + (\beta - P\beta) \rangle|}{\|\alpha\| \|\beta\|} = \frac{|\langle \alpha, P\beta \rangle|}{\|\alpha\| \|\beta\|},$$

故

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\alpha \in R_m, \beta \in R_n \\ \alpha \neq 0, \beta \neq 0}} \frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|}{\|\alpha\| \|\beta\|} &= \sup_{\beta \in R_n, \beta \neq 0} \sup_{\alpha \in R_m, \alpha \neq 0} \frac{|\langle \alpha, P\beta \rangle|}{\|\alpha\| \|\beta\|} \\ &= \sup_{\beta \in R_n, \beta \neq 0} \frac{\|P\beta\|}{\|\beta\|} = \|P\|. \end{aligned}$$

□

下面, 我们来推导具体的计算公式.

假设 $(Pb_1, Pb_2) = (a_1, a_2)C$, 即 $Pb_j = a_i c_{ij}$. 则由于 $b_1 - Pb_1$ 以及 $b_2 - Pb_2$ 都垂直于 R_m , 故

$$\langle a_i, b_j - Pb_j \rangle = 0, \quad \forall i, j = 1, 2.$$

即

$$\langle a_i, b_j \rangle = \langle a_i, Pb_j \rangle = \langle a_i, a_k c_{kj} \rangle \implies (c_{kj}) = (\langle a_i, a_k \rangle)^{-1} (\langle a_i, b_j \rangle).$$

为方便起见, 记以 $\langle a_i, a_j \rangle$ 为 ij 元素的矩阵为 A , 类似地有矩阵 B . 易见他们是对称的且由于 a_1, a_2 线性无关知 A 正定 (利用 Cauchy-Schwarz 等号成立当且仅当线性相关), 同理 B 也正定. 记以 $\langle a_i, b_j \rangle$ 为 ij 元素的矩阵为 D . 则 $D = AC$.

现在, 假设 $\beta = (b_1, b_2)X$, 其中 $X = (x_1, x_2)^T$. 则

$$\begin{aligned} P\beta &= (Pb_1, Pb_2)X = (a_1, a_2)CX \\ \|P\beta\|^2 &= (CX)^T ACX = X^T (C^T AC)X \\ \|\beta\|^2 &= X^T BX. \end{aligned}$$

现在, 注意到对正定矩阵 B 以及对称矩阵 $C^T AC$, 存在可逆矩阵 R 使得 $R^T BR = E$ (单位阵), $R^T C^T AC R = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ (对角阵). 这样, 我们得到

$$\begin{aligned} \cos^2 \angle(\alpha, \beta) &= \sup_{\beta \in R_n, \beta \neq 0} \frac{\|P\beta\|^2}{\|\beta\|^2} \\ &= \sup_{X \neq 0} \frac{X^T (R^{-1})^T \Lambda R^{-1} X}{X^T (R^{-1})^T R^{-1} X} \\ &= \sup_{\tilde{X} = R^{-1} X} \frac{\tilde{X}^T \Lambda \tilde{X}}{\tilde{X}^T \tilde{X}} = \max \{\lambda_1, \lambda_2\}. \end{aligned}$$

应该注意到 λ_1, λ_2 是矩阵 $\Lambda = R^T C^T AC R = R^{-1} B^{-1} C^T AC R$ 的特征值, 由于相似变换不改变特征值, 故它们也是矩阵 $B^{-1} C^T AC = B^{-1} D^T A^{-1} D$ 的特征值.

定理 10.2 假设 a_1, a_2 张成平面 R_n , b_1, b_2 张成平面 R_m (它们都是 Hilbert 子空间), 若记 $A = G(a_1, a_2) = (\langle a_i, a_j \rangle)$, $B = G(b_1, b_2)$, $D = G(a_1, a_1; b_1, b_2) = (\langle a_i, b_j \rangle)$ 分别为各自的 Gram 矩阵. 则两平面的夹角计算公式为

$$\cos^2 \angle(R_m, R_n) = \max \{ \lambda_i | \lambda_i \text{ 为矩阵 } M = B^{-1} D^T A^{-1} D \text{ 的特征值} \}.$$

注记 注意到若考虑 a 与 b 对调, 则 A 与 B 对调, D 与 D^T 对调, 故上述计算公式表明 $\angle(R_n, R_m) = \angle(R_m, R_n)$. 这是因为

$$\cos^2 \angle(R_n, R_m) = \max \{ \mu_i | \mu_i \text{ 为矩阵 } A^{-1} D B^{-1} D^T \text{ 的特征值} \},$$

而任何两矩阵 A_1, A_2 都有 $A_1 A_2$ 与 $A_2 A_1$ 具有相同的特征多项式.

注记 完全类似的推理得出, 定理 10.2 中的计算公式对一般的两个子空间也是成立的.

直接计算得到

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sinh(ln)}{n} & l \\ l & \frac{\sinh(lm)}{m} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\sinh(lm)}{m} & l \\ l & \frac{\sinh(ln)}{n} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{2 \sinh(l(m+n)/2)}{m+n} & \frac{2 \sinh(l(m-n)/2)}{m-n} \\ \frac{2 \sinh(l(m-n)/2)}{m-n} & \frac{2 \sinh(l(m+n)/2)}{m+n} \end{pmatrix}.$$

利用对 $x \geq 8$ 成立 $\sinh(x) - x - e^x/(2 + 1/x^2) > 0$, 则对 $l \geq 8$ 有

$$\|A^{-1}\| = \frac{m}{\sinh(lm) - lm} \leq \frac{(2 + (lm)^{-2})m}{e^{lm}},$$

$$\|B^{-1}\| = \frac{n}{\sinh(ln) - ln} \leq \frac{(2 + (ln)^{-2})n}{e^{ln}}.$$

而

$$\begin{aligned} \|DD^T\| &= \frac{16 (m \cosh(ln/2) \sinh(lm/2) - n \cosh(lm/2) \sinh(ln/2))^2}{(m^2 - n^2)^2} \\ &= \frac{e^{-l(m+n)} (m(e^{lm} - 1)(e^{ln} + 1) - n(e^{ln} - 1)(e^{lm} + 1))^2}{(m^2 - n^2)^2} \\ &= \frac{e^{l(m+n)} (m(1 - e^{-lm})(1 + e^{-ln}) - n(1 - e^{-ln})(1 + e^{-lm}))^2}{(m^2 - n^2)^2}, \end{aligned}$$

容易得出对任意的 $l > 0$ 有,

$$0 < m(1 - e^{-lm})(1 + e^{-ln}) - n(1 - e^{-ln})(1 + e^{-lm}) \leq (m - n) \left(1 + \frac{m + n}{m - n} e^{-ln}\right).$$

从而, 对 $l \geq 8$, 有

$$\begin{aligned} \|B^{-1}D^T A^{-1}D\| &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|B^{-1}\| \cdot \|DD^T\| \\ &\leq \frac{mn}{(m + n)^2} (2 + (ln)^{-2}) (2 + (lm)^{-2}) \left(1 + \frac{m + n}{2} e^{-ln}\right)^2 \\ &\leq \frac{mn}{(m + n)^2} (2 + (ln)^{-2})^2 (1 + m(ln)^{-2})^2 \\ &\leq \frac{4mn}{(m + n)^2} (1 + 2m(ln)^{-2})^2 \end{aligned}$$

因此, 对 R_m, R_n 这两个二维子空间, 有

$$\cos \angle(R_m, R_n) = \|B^{-1}D^T A^{-1}D\| \leq \left(1 + \frac{2m}{l^2 n^2}\right) \frac{2\sqrt{mn}}{m + n}, \quad l \geq 8.$$

10.2 双调和映射的三圈引理

在本节, 我们将证明双调和映照的三圈引理, 它的证明也可以参考 [24, Section 3, Theorem 3.1].

引理 10.3 假设 u 是定义在 $B \setminus \{0\}$ 上的双调和映照, 且在极坐标系下满足

$$\int_{S^3} u(r, \theta) d\theta = 0, \quad \forall r \in (0, 1),$$

则存在某个常数 $L > 0$, 使得

$$2F_i \leq e^{-L} (F_{i-1} + F_{i+1}), \quad \forall i = 1, 2, \dots, \quad (10.1)$$

其中,

$$F_i = F_i(u) := \int_{A_i} \frac{u^2}{|x|^4}, \quad A_i := B_{e^{-(i-1)L}} \setminus B_{e^{-iL}}.$$

首先, 由分离变量法, 我们可以写出所有环形区域上的双调函数.

引理 10.4 假设 u 是一个定义在 $B_{r_2} \setminus B_{r_1} \subset \mathbb{R}^4$ 上的双调和函数. 则在柱坐标 (t, θ) 下, 存在常数 A_0, B_0, C_0, D_0 以及 $A_n^l, B_n^l, C_n^l, D_n^l$ 使得

$$u = A_0 + B_0 t + C_0 e^{2t} + D_0 e^{-2t} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_n} (A_n^l e^{nt} + B_n^l e^{-nt} + C_n^l e^{(n+2)t} + D_n^l e^{-(n+2)t}) \phi_n^l(\theta),$$

其中 $\{\phi_n^l | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, l = 1, 2, \dots, h_n\}$ 是 S^3 上标准化的球调和函数, 且满足

$$\Delta_0 \phi_n^l = -n(n+2) \phi_n^l.$$

这里 Δ_0 是 S^3 上的 Laplace 算子, h_n 是 $-n(n+2)$ 作为特征值对应的特征子空间的维数, 特别地 $h_0 = 1$.

此外, 如果对每个 $r \in (r_1, r_2)$, 有

$$\int_{\partial B_r} u d\sigma = 0,$$

则上述展开式中 $A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = 0$.

证明 事实上, 由极坐标和柱坐标的关系 $(r, \theta) = (e^t, \theta)$, 容易知道

$$\partial_t u = r \partial_r u, \quad \partial_{tt} u = r \partial_r u + r^2 \partial_{rr} u,$$

以及

$$\begin{aligned}\Delta u &= \partial_{rr}u + \frac{2m-1}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\Delta_0 u = e^{-2t}(\partial_{tt}u + 2u_t + \Delta_0 u), \\ \Delta^2 u &= e^{-4t}\left((\partial_t^2 + \Delta_0)^2 - 4\partial_t^2\right)u.\end{aligned}$$

由于 $\{\phi_n^l\}$, $n \in \mathbb{N}, l = 1, \dots, h_n$ 构成了 $L^2(S^3)$ 的一个么正基. 我们知道存在实函数 $R_n^l(t)$, 使得

$$u(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_n} R_n^l(t) \phi_n^l(\theta),$$

在 L^2 意义下成立.

若我们可以逐项求导, 则

$$\begin{aligned}0 &= e^{4t} \Delta^2 u \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_n} \left(\partial_t^4 R_n^l(t) - 2(n^2 + 2n + 2) \partial_t^2 R_n^l(t) + n^2(n+2)^2 R_n^l(t) \right) \phi_n^l(\theta),\end{aligned}$$

注意到 ϕ_n^l 是基, 这当且仅当

$$\partial_t^4 R_n^l(t) - 2(n^2 + 2n + 2) \partial_t^2 R_n^l(t) + n^2(n+2)^2 R_n^l(t) = 0.$$

解上述线性常微分方程得到

$$R_n^l(t) = \begin{cases} A_0 + B_0 t + C_0 e^{2t} + D_0 e^{-2t}, & n = 0 \\ A_n^l e^{nt} + B_n^l e^{-nt} + C_n^l e^{(n+2)t} + D_n^l e^{-(n+2)t}, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

可以证明由上述 R_n^l 定义的 $u(t, \theta)$ 在任何 (t, θ) 的邻域 $[t - \varepsilon, t + \varepsilon] \times S^3$ 上是一致收敛的 (参考 [3, Theorem 2.36]), 从而根据数学分析中的逐项微分定理知上述推导是严格的. 从而完成了引理第一部分的证明.

同样地, 由级数的一致收敛性, 可以应用数学分析中的逐项积分定理得到

$$0 = \int_{\partial B_r} (A_0 + B_0 t + C_0 e^{2t} + D_0 e^{-2t}), \quad \forall r \in (r_1, r_2)$$

这里我们用到了

$$\int_{\partial B_r} \phi_n^l = \frac{1}{-n(n+2)} \int_{\partial B_r} \Delta_0 \phi_n^l = 0.$$

故, 我们得到

$$0 = |\partial B_r| (A_0 + B_0 \log r + C_0 r^2 + D_0 r^{-2}), \quad \forall r \in (r_1, r_2)$$

由 r 的任意性知, 在 $\int_{\partial B_r} u d\sigma = 0$ 对所有 $r \in (r_1, r_2)$ 成立的条件下, 必有 $A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = 0$. $\square$

下面, 我们将证明引理 10.3. 由引理 10.3 的假设以及引理 10.4, 我们知道

$$u(t, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_n} (A_n^l e^{nt} + B_n^l e^{-nt} + C_n^l e^{(n+2)t} + D_n^l e^{-(n+2)t}) \phi_n^l(\theta), \quad t < 1.$$

直接计算 $F_i(u)$ 如下

$$\begin{aligned} F_i(u) &= \int_{e^{-iL}}^{e^{-(i-1)L}} \int_{S^{2m-1}} \frac{u^2(r, \theta)}{r^4} r^3 dr d\theta = \int_{-iL}^{-iL+L} \int_{S^3} u^2(e^t, \theta) dt d\theta \\ &= \int_{-iL}^{-iL+L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_n} (A_n^l e^{nt} + B_n^l e^{-nt} + C_n^l e^{(n+2)t} + D_n^l e^{-(n+2)t})^2 dt \\ &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_n} (A_n^l e^{n(t-iL)} + B_n^l e^{-n(t-iL)} \\ &\quad + C_n^l e^{(n+2)(t-iL)} + D_n^l e^{-(n+2)(t-iL)})^2 dt. \end{aligned}$$

令

$$G_i(t) := (A_n^l e^{n(t-iL)} + B_n^l e^{-n(t-iL)} + C_n^l e^{(n+2)(t-iL)} + D_n^l e^{-(n+2)(t-iL)})^2,$$

则明显有 $G_{i-1}(t) = G_i(t+L)$, $G_{i+1}(t) = G_i(t-L)$, 而且(10.1)等价于

$$2 \int_0^L G_i(t) dt \leq e^{-L} \int_0^L (G_i(t+L) + G_i(t-L)) dt. \quad (10.2)$$

如果我们令 $\tilde{u}(r, \theta) = u(e^{-iL+L/2}r, \theta)$, 则 $\tilde{u}$ 仍然是一个双调和映照, 且容易验证 $F_s(u) = F_{s-i+1/2}(\tilde{u})$. 因此, 如果我们利用 $\tilde{u}$ 的球调和展开, 则(10.2)约化为 $i=0$ 的情形, 即

$$2 \int_{-L/2}^{L/2} G_0(t) dt \leq e^{-L} (G_0(t+L) + G_0(t-L)) dt. \quad (10.3)$$

现在, 令 $R_k = A_k e^{(n+2(k-1))t} + B_k e^{-(n+2(k-1))t}$, 且记 $L^2([-L/2, L/2])$ 为 $\|\cdot\|$. 则我们已将双调和映照的三圈引理约化为, 存在 $L > 0$, 使得对任意的 $n \geq 1$, 有

$$\|R_1(t) + R_2(t)\|^2 \leq \frac{e^{-L}}{2} (\|R_1(t+L) + R_2(t+L)\|^2 + \|R_1(t-L) + R_2(t-L)\|^2). \quad (10.4)$$

对(10.4)的证明, 我们首先给出如下

引理 10.5 任意的 $x_0 \in R^1$ 以及任意的 $m, n, m \geq n+2$ 且 $n \geq 1$, 都存在 $\delta_n > 0$ 以及 $L = 3$ 使得

$$\int_{x_0}^{x_0+L} (A^2 e^{2mt} + B^2 e^{2nt}) dt \geq (1 + \delta_n) 2|AB| \int_{x_0}^{x_0+L} e^{(m+n)t} dt.$$

事实上, 可取 $\delta_n = \frac{1}{100n^2}$.

证明 直接计算知

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+L_0} (A^2 e^{2mt} + B^2 e^{2nt}) dt &= \frac{A^2}{2m} e^{2mx_0} (e^{2mL} - 1) + \frac{B^2}{2n} e^{2nx_0} (e^{2nL} - 1) \\ &\geq \frac{|AB|}{\sqrt{mn}} e^{(m+n)x_0} \sqrt{(e^{2mL} - 1)(e^{2nL} - 1)} \\ (1 + \delta_n) 2|AB| \int_{x_0}^{x_0+L} e^{(m+n)t} dt &= (1 + \delta_n) \frac{2|AB|}{m+n} e^{(m+n)x_0} (e^{(m+n)L} - 1), \end{aligned}$$

故只要求

$$\delta_n \leq \frac{m+n}{2\sqrt{mn}} \frac{\sqrt{(e^{2mL} - 1)(e^{2nL} - 1)}}{e^{(m+n)L} - 1} - 1 = \frac{m+n}{2\sqrt{mn}} \frac{\sqrt{1 - e^{-2mL}} \sqrt{1 - e^{-2nL}}}{1 - e^{-(m+n)L}} - 1.$$

现在, 注意到对任意的 $m \geq n+2$, 并利用 $1/\sqrt{1-x} > 1+x/2, 0 < x < 1$, 我们有

$$\frac{m+n}{2\sqrt{mn}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(n+1)^2}}} \geq 1 + \frac{1}{10n^2},$$

由 $m \geq n+2$ 以及 $L > 0$ 知,

$$\frac{\sqrt{1 - e^{-2mL}} \sqrt{1 - e^{-2nL}}}{1 - e^{-(m+n)L}} \geq 1 - e^{-2nL}.$$

断言 存在 $L > 0$, 使得对任意的 $n \geq 1$, 令 $\delta_n = \frac{1}{100n^2}$, 则

$$\left(1 + \frac{1}{10n^2}\right) (1 - e^{-2nL}) - 1 \geq \delta_n.$$

事实上, 直接展开欲证不等式得到

$$e^{-2nL} \left(1 + \frac{1}{10n^2}\right) \leq \frac{1}{10n^2} - \delta_n = \frac{9}{100n^2}.$$

故只要求

$$\left(1 + \frac{1}{10n^2}\right) \leq 2 \leq \frac{e^{2nL}}{100n^2} \leq \frac{9e^{2nL}}{100n^2}.$$

而容易计算 $e^{2nL}/(100n^2)$ 关于 n 是单调递增的 ($L \geq 1$). 容易验证

$$L = 3 \implies 2 \leq \frac{e^{2L}}{100} \leq \frac{e^{2nL}}{100n^2}.$$

这就完成了证明. □

注记 由证明知, [引理 10.5](#) 对任意的 $L \geq 3$ 都成立.

一个直接推论是

推论 10.6 假设 [引理 10.5](#) 中不等式成立, 则

$$\int_{x_0}^{x_0+L} (Ae^{mt} + Be^{nt})^2 \geq \frac{\delta_n}{2} \int_{x_0}^{x_0+L} A^2 e^{2mt} + B^2 e^{2nt}.$$

证明 直接展开不等式左边并利用引理 10.5 以及 $1 - \frac{1}{1+\delta_n} \geq \delta_n/2$ 即得. $\square$

下面开始证明(10.4). 首先注意到它等价于

$$\begin{aligned}
 & \int_{-L/2}^{L/2} (A_1 e^{nt} + B_1 e^{-nt} + A_2 e^{(n+2)t} + B_2 e^{-(n+2)t})^2 dt \\
 & \leq \frac{e^{-L}}{2} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} (A_1 e^{n(t+L)} + B_1 e^{-n(t+L)} + A_2 e^{(n+2)(t+L)} + B_2 e^{-(n+2)(t+L)})^2 dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_{-L/2}^{L/2} (A_1 e^{n(t-L)} + B_1 e^{-n(t-L)} + A_2 e^{(n+2)(t-L)} + B_2 e^{-(n+2)(t-L)})^2 dt \right\} \\
 & = \frac{e^{-L}}{2} \left\{ \int_{L/2}^{3L/2} (A_1 e^{nt} + B_1 e^{-nt} + A_2 e^{(n+2)t} + B_2 e^{-(n+2)t})^2 dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_{L/2}^{3L/2} (A_1 e^{-nt} + B_1 e^{nt} + A_2 e^{-(n+2)t} + B_2 e^{(n+2)t})^2 dt \right\} \\
 & := \frac{e^{-L}}{2} (\text{I} + \text{II}).
 \end{aligned}$$

利用不等式 $(a+b)^2 \geq \frac{1}{2}a^2 - b^2$, 我们得到如下

断言 对任意的 $n \geq 1$, 存在 $L = 4 > 0$, 使得

$$\text{I} + \text{II} \geq \frac{1}{4} \int_{L/2}^{3L/2} (A_1 e^{nt} + A_2 e^{(n+2)t})^2 + (B_1 e^{nt} + B_2 e^{(n+2)t})^2 dt.$$

证明 容易得出,

$$\begin{aligned}
 \text{I} & = \int_{L/2}^{3L/2} (A_1 e^{nt} + B_1 e^{-nt} + A_2 e^{(n+2)t} + B_2 e^{-(n+2)t})^2 dt \\
 & \geq \frac{1}{2} \int_{L/2}^{3L/2} (A_1 e^{nt} + A_2 e^{(n+2)t})^2 dt - \int_{L/2}^{3L/2} (B_1 e^{-nt} + B_2 e^{-(n+2)t})^2 dt \\
 & := \frac{1}{2} \text{I}_1 - \text{I}_2 \\
 \text{II} & = \int_{L/2}^{3L/2} (A_1 e^{-nt} + B_1 e^{nt} + A_2 e^{-(n+2)t} + B_2 e^{(n+2)t})^2 dt \\
 & \geq \frac{1}{2} \int_{L/2}^{3L/2} (B_1 e^{nt} + B_2 e^{(n+2)t})^2 dt - \int_{L/2}^{3L/2} (A_1 e^{-nt} + A_2 e^{-(n+2)t})^2 dt \\
 & := \frac{1}{2} \text{II}_1 - \text{II}_2
 \end{aligned}$$

由推论 10.6 知,

$$\text{I}_1 \geq \frac{\delta_n}{2} \int_{L/2}^{3L/2} A_1^2 e^{2nt} + A_2^2 e^{2(n+2)t} dt.$$

而

$$\text{II}_2 \leq 2 \int_{L/2}^{3L/2} A_1^2 e^{-2nt} + A_2^2 e^{-2(n+2)t} dt.$$

对引理 10.5 中的 δ_n , 可以取 $L \geq 3$ (例如 $L = 4$), 使得 $\frac{\delta_n}{2} e^{2nL} \geq 8$ (利用不等式左边关于 $n \geq 1$ 单调增). 故

$$\frac{\delta_n}{2} (A_1^2 e^{2nt} + A_2^2 e^{2(n+2)t}) \geq 8 (A_1^2 e^{-2nt} + A_2^2 e^{-2(n+2)t}), \quad \forall t \in [L/2, 3L/2].$$

从而 $\text{I}_1 \geq 4\text{II}_2$. 同理, $\text{II}_1 \geq 4\text{I}_2$. 于是

$$\text{I} + \text{II} \geq \frac{1}{2}(\text{I}_1 + \text{II}_1) - \text{I}_2 - \text{II}_2 \geq \frac{1}{4}(\text{I}_1 + \text{II}_1).$$

□

因此, 回到不等式(10.4)的证明, 利用引理 10.5 有

$$\text{RHS} \geq \frac{e^{-L}}{2}(\text{I} + \text{II}) \geq \frac{\delta_n e^{-L}}{16} \int_{L/2}^{3L/2} (A_1^2 e^{2nt} + B_1^2 e^{2nt} + A_2^2 e^{2(n+2)t} + B_2^2 e^{2(n+2)t}) dt,$$

而

$$\text{LHS} \leq 4 (A_1^2 e^{nL} + B_1^2 e^{nL} + A_2^2 e^{(n+2)L} + B_2^2 e^{(n+2)L}) L.$$

最后, 只需注意到 $\lambda_n := \frac{\delta_n e^{-L}}{16} < 2n$, 且当 $n \geq 2$ 时,

$$L = 4 \implies e^{2nL} \geq 10n/\lambda_n \implies \lambda_n \frac{A_1^2}{2n} (e^{3nL} - e^{nL}) \geq 4A_1^2 e^{nL}.$$

而对 $n = 1$, 可取 $L = 10$, 使得 $e^{2nL} \geq 10n/\lambda_n$. 综上所述我们得到 $L = 10$, 则(10.4)成立. 进而完成了引理 10.3 的证明.

10.3 多调和映照的三圈引理

证明多调和映照的三圈引理和双调和映照的想法是类似的, 但是我们其实并不是直接计算子空间的夹角, 而是得到了它们夹角的一个下界估计.

引理 10.7 对给定的 m , 存在常数 $L > 0$, 使得对任何定义在 $B \setminus \{0\}$ 上的 m -多调和函数 u , 若

$$\int_{S^{2m-1}} u(r, \theta) d\theta = 0,$$

则

$$2F_i \leq e^{-L} (F_{i-1} + F_{i+1}), \quad \forall i = 1, 2, \dots,$$

其中

$$F_i := F_i(u) = \int_{A_i} \frac{u^2(x)}{|x|^{2m}} dx, \quad A_i := B_{e^{-(i-1)L}} \setminus B_{e^{-iL}}.$$

注记 事实上, 我们需要更强版本的三圈引理, 即在 u 非常值时可与做到严格不等号. 这从证明中是容易看出的.

首先, 我们利用平行于双调和映照的引理, 将多调和映照的情形约化到类似(10.4).

先来看多调和函数的球调和展开.

引理 10.8 假设 u 是定义在 $B_{r_2} \setminus B_{r_1} \subset \mathbb{R}^{2m}$ 上的 m -多调和函数. 则在柱坐标 (t, θ) 下, 存在常数 $A_0, B_0, \{C_{0,k}\}_{k=2}^m, \{D_{0,k}\}_{k=2}^m, \{C_{n,k}^l\}, D_{n,k}^l, k = 1, \dots, m, l = 1, \dots, h_n, n = 1, \dots, \infty$, 使得

$$u = A_0 + B_0 t + \sum_{k=2}^m (C_{0,k} e^{2(k-1)t} + D_{0,k} e^{-2(k-1)t}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_n} \sum_{k=1}^m (C_{n,k}^l e^{(n+2(k-1))t} + D_{n,k}^l e^{-(n+2(k-1))t}) \phi_n^l(\theta).$$

其中 $\{\phi_n^l | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, l = 1, 2, \dots, h_n\}$ 是 S^{2m-1} 上的标准化球调和函数, 且满足

$$\Delta_0 \phi_n^l = -n(n+2(m-1)) \phi_n^l, \quad l = 1, 2, \dots, h_n,$$

这里 Δ_0 是 S^{2m-1} 上的 Laplace 算子, h_n 是以 $-n(n+2(m-1))$ 作为特征子值对应的特征子空间的维数.

此外, 如果对每个 $r \in (r_1, r_2)$, 有

$$\int_{\partial B_r} u = 0,$$

则上述展开式在 $A_0, B_0, \{C_{0,k}\}_{k=2}^m, \{D_{0,k}\}_{k=2}^m$ 均为零.

证明 证明完全仿照双调和映照的情形即可. □

利用多调和映照的平移不变性, 我们完全可以仿照双调和映照的情形, 将三圈引理约化为证明类似(10.4)的如下不等式成立即可,

$$\left\| \sum_{k=1}^m R_k(t) \right\|^2 \leq \frac{e^{-L}}{2} \left(\left\| \sum_{k=1}^m R_k(t+L) \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^m R_k(t-L) \right\|^2 \right). \quad (10.5)$$

它等价于

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^m R_k(t) \right\|^2 &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(\sum_{k=1}^m A_k e^{(n+2(k-1))t} + \sum_{k=1}^m B_k e^{-(n+2(k-1))t} \right)^2 dt \\ &\leq \frac{e^{-L}}{2} (\text{I} + \text{II}). \end{aligned}$$

这里, 我们将(10.5)右边按照指数函数的幂次符号拆成如下形式

$$\begin{aligned} I &= \int_{L/2}^{3L/2} \left(\sum_{k=1}^m A_k e^{(n+2(k-1))t} + B_k e^{-(n+2(k-1))t} \right)^2 dt \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{L/2}^{3L/2} \left(\sum_{k=1}^m A_k e^{(n+2(k-1))t} \right)^2 dt - \int_{L/2}^{3L/2} \left(\sum_{k=1}^m B_k e^{-(n+2(k-1))t} \right)^2 dt \\ &:= \frac{1}{2} I_1 - I_2, \end{aligned}$$

以及,

$$\begin{aligned} II &= \int_{L/2}^{3L/2} \left(\sum_{k=1}^m A_k e^{-(n+2(k-1))t} + B_k e^{(n+2(k-1))t} \right)^2 dt \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{L/2}^{3L/2} \left(\sum_{k=1}^m B_k e^{(n+2(k-1))t} \right)^2 dt - \int_{L/2}^{3L/2} \left(\sum_{k=1}^m A_k e^{-(n+2(k-1))t} \right)^2 dt \\ &:= \frac{1}{2} II_1 - II_2. \end{aligned}$$

我们需要推论 10.6 的平行推广

引理 10.9 存在 $L = L_m > 0$ 以及 $\delta_{m,n} = \bar{C}_m e^{-nL/2} > 0$ 使得,

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \left(\sum_{k=1}^m A_k e^{(n+2(k-1))t} \right)^2 dt \geq \delta_{m,n} \int_{x_0}^{x_0+L} \sum_{k=1}^m A_k^2 e^{2(n+2(k-1))t} dt.$$

证明 令 $n_k = n + 2(k-1)$, $k = 1, 2, \dots, m$, 则要证的不等式等价于

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \left(\sum_{k=1}^m A_k e^{n_k t} \right)^2 dt \geq \delta_{m,n} \int_{x_0}^{x_0+L} \sum_{k=1}^m A_k^2 e^{2n_k t} dt.$$

令 $f_k(t) = e^{n_k t} / \|e^{n_k t}\|$, 这里 $\|f(t)\|^2 = \int_{x_0}^{x_0+L} f^2(t) dt$. 由系数 A_k 的任意性, 上式又等价于

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \left(\sum_{k=1}^m A_k f_k(t) \right)^2 dt \geq \delta_{m,n} \int_{x_0}^{x_0+L} \sum_{k=1}^m A_k^2 f_k^2(t) dt = \delta_{m,n} \sum_{k=1}^m A_k^2. \quad (10.6)$$

若令 $m \times m$ 矩阵 M 的 k, l 元为

$$M_{kl} = \langle f_k, f_l \rangle = \int_{x_0}^{x_0+L} f_k(t) f_l(t) dt,$$

则由于 $\{f_k\}_{k=1}^m$ 是线性无关的知 M 是正定的. 假设 M 的特征值是 $\lambda_m \geq \lambda_{m-1} \geq \dots \geq \lambda_1$. 则不等式(10.6)等价于 M 的最小特征值 $\lambda_1 \geq \delta_{m,n} = \bar{C}_m e^{-nL/2}$.

下面来估计 M 的最小特征值. 直接计算知

$$\begin{aligned}
 M_{kl} &= \int_{x_0}^{x_0+L} f_k(t) f_l(t) dt \\
 &= \frac{\int_{x_0}^{x_0+L} e^{n_k t} e^{n_l t} dt}{\left(\int_{x_0}^{x_0+L} e^{2n_k t} dt \right)^{1/2} \left(\int_{x_0}^{x_0+L} e^{2n_l t} dt \right)^{1/2}} \\
 &= \frac{e^{(n_k+n_l)x_0} (e^{(n_k+n_l)L} - 1)}{n_k + n_l} \\
 &= \frac{\left(\frac{e^{2n_k x_0} (e^{2n_k L} - 1)}{2n_k} \right)^{1/2} \left(\frac{e^{2n_l x_0} (e^{2n_l L} - 1)}{2n_l} \right)^{1/2}}{n_k + n_l} \\
 &= \frac{2\sqrt{n_k n_l}}{n_k + n_l} \frac{e^{(n_k+n_l)L} - 1}{\sqrt{e^{2n_k L} - 1} \sqrt{e^{2n_l L} - 1}} \\
 &= \frac{2\sqrt{n_k n_l}}{n_k + n_l} \frac{1 - e^{-(n_k+n_l)L}}{\sqrt{1 - e^{-2n_k L}} \sqrt{1 - e^{-2n_l L}}}.
 \end{aligned}$$

我们将 M 拆成 $M = \bar{M} + E$, 其中

$$\bar{M}_{kl} = \frac{2\sqrt{n_k n_l}}{n_k + n_l} = \int_0^{+\infty} f_k(t) f_l(t) dt.$$

因此, 由 $\{f_k\}_{k=1}^m$ 的线性无关性知 $\bar{M}$ 是正定矩阵. 注意到如下事实,

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \inf_{|X|=1} X^T M X = \inf_{|X|=1} (X^T \bar{M} X + X^T E X) \\
 &\geq \bar{\lambda}_1 + \inf_{|X|=1} -|X^T E X| = \bar{\lambda}_1 - \sup_{|X|=1} |X^T E X| \\
 &\geq \bar{\lambda}_1 - |\lambda_E|,
 \end{aligned} \tag{10.7}$$

其中 $|\lambda_E|$ 是 E 的实特征值中绝对值最大者.

首先来估计 $|\lambda_E|$. 注意到 E 对称, 因此存在正交矩阵 P , 使得 $P^T E P = \Lambda$ 为对角矩阵, 从而

$$\begin{aligned}
 |\lambda_E|^2 &\leq |\Lambda|^2 = \text{tr}(\Lambda^2) = \text{tr}(P^T E P P^T E P) = \text{tr}(E^2) \leq m^2 \max_{k,l} |E_{kl}|^2 \\
 &= m^2 \max_{k,l} \left| \frac{2\sqrt{n_k n_l}}{n_k + n_l} \left(\frac{1 - e^{-(n_k+n_l)L}}{\sqrt{1 - e^{-2n_k L}} \sqrt{1 - e^{-2n_l L}}} - 1 \right) \right|^2 \\
 &\leq m^2 \max_{k \leq l} \left(\frac{1 - e^{-(n_k+n_l)L}}{\sqrt{1 - e^{-2n_k L}} \sqrt{1 - e^{-2n_l L}}} - 1 \right)^2 \\
 &< m^2 \left(\frac{1 - e^{-2n_m L}}{1 - e^{-2n_L}} - 1 \right)^2 \leq m^2 \left(\frac{1}{1 - e^{-2n_L}} - 1 \right)^2 \\
 &= m^2 \left(\frac{e^{-2n_L}}{1 - e^{-2n_L}} \right)^2 \leq 4m^2 e^{-4n_L}, \quad \forall L \geq 1.
 \end{aligned}$$

这里我们利用了对任意的 $x, y \in (0, 1)$ 有

$$\frac{1 - xy}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2}} - 1 \geq 0.$$

即有,

$$|\lambda_E| \leq 2me^{-2nL}, \quad \forall L \geq 1.$$

下面来估计 $\bar{M}$ 的最小特征值. 容易知道 $\text{tr}(\bar{M}) = m$, 因此容易估计出 $\bar{M}$ 的特征值 $\bar{\lambda}_m \geq \bar{\lambda}_{m-1} \geq \cdots \geq \bar{\lambda}_1 > 0$ 满足

$$0 < \bar{\lambda}_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m < m.$$

另一方面, 容易看出 $\det \bar{M}$ 是关于 n 的有理函数, 且分母上 n 的方幂不超过 $m(m-1)$. 又注意到对任意的正整数 n 有 $\det \bar{M} > 0$. 从而对任意的 $L \geq 1$, 存在常数 $C = C_m > 0$ 仅依赖于 m , 使得对所有的正整数 n 成立

$$e^{nL/2} \det \bar{M} \geq C_m > 0.$$

这样我们容易估计出 $\bar{M}$ 的最小特征值满足

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{\det \bar{M}}{\bar{\lambda}_2 \cdots \bar{\lambda}_m} \geq C_m e^{-nL/2} m^{-(m-1)} := 2\bar{C}_m e^{-nL/2}.$$

这样, 由(10.7)知

$$\lambda_1 \geq \bar{\lambda}_1 - |\lambda_E| \geq 2\bar{C}_m e^{-nL/2} \left(1 - \frac{m}{\bar{C}_m} e^{-3nL/2}\right) \geq 2\bar{C}_m e^{-nL/2} \left(1 - \frac{m}{\bar{C}_m} e^{-3L/2}\right),$$

故我们只需取 L 充分大 (依赖于 m) 使得

$$1 - \frac{m}{\bar{C}_m} e^{-3L/2} \geq \frac{1}{2},$$

则得到

$$\lambda_1 \geq \bar{C}_m e^{-nL/2}.$$

□

利用引理 10.9, 容易得到如下

断言 对任意的 $n \geq 1$, 存在 L_m , 使得对任意的 $L \geq L_m$, 有

$$\text{I} + \text{II} \geq \frac{1}{4} \int_{L/2}^{3L/2} \left[\left(\sum_{k=1}^m A_k e^{(n+2(k-1))t} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^m B_k e^{(n+2(k-1))t} \right)^2 \right] dt.$$

证明 事实上, 由引理 10.9 知, 存在 $L = L_m$ 以及 $\delta_{m,n} = \bar{C}_m e^{-nL}$, $\bar{C}_m > 0$ 使得

$$\text{I}_1 \geq \delta_{m,n} \int_{L/2}^{3L/2} \sum_{k=1}^m A_k^2 e^{2(n+2(k-1))t} dt.$$

易见

$$\text{II}_2 \leq 2 \int_{L/2}^{3L/2} \sum_{k=1}^m A_k^2 e^{-2(n+2(k-1))t} dt.$$

故只需取 L 充分大, 使得

$$\delta_{m,n}e^{2nL} = \bar{C}_m e^{3nL/2} \geq \bar{C}_m e^{3L/2} \geq 8, \quad \forall n \geq 1.$$

则

$$\frac{\delta_{m,n}}{2} \sum_{k=1}^m A_k^2 e^{2(n+2(k-1))t} \geq 4 \sum_{k=1}^m A_k^2 e^{-2(n+2(k-1))t}, \quad \forall t \in [L/2, 3L/2].$$

于是 $I_1 \geq 4II_2$, 同理 $II_2 \geq 4I_2$. 因此, 我们得到

$$I + II \geq \frac{1}{2} (I_1 + II_1) - I_2 - II_2 \geq \frac{1}{4} (I_1 + II_1).$$

□

现在, 回到(10.5)的证明. 我们知道

$$\text{RHS} \geq \frac{e^{-L}}{2} (I + II) \geq \frac{e^{-L}}{8} (I_1 + II_2) \geq \frac{\delta_{m,n}e^{-L}}{8} \int_{L/2}^{3L/2} \sum_{k=1}^m (A_k^2 + B_k^2) e^{2n_k t} dt.$$

而

$$\text{LHS} \leq 2m \int_{-L/2}^{L/2} \sum_{k=1}^m (A_k^2 e^{2n_k t} + B_k^2 e^{-2n_k t}) dt \leq 2m \sum_{k=1}^m (A_k^2 + B_k^2) e^{n_k L} L.$$

可见只需证明

$$2me^{n_k L} L \leq \frac{\delta_{m,n}e^{-L}}{8} \int_{L/2}^{3L/2} e^{2n_k t} dt = \bar{C}_m e^{-(n/2+1)L} \frac{e^{3n_k L} - e^{n_k L}}{16n_k},$$

即

$$2mL \leq \frac{\bar{C}_m}{16n_k} e^{-(n/2+1)L} (e^{2n_k L} - 1).$$

最后, 我们利用当 $n \geq 1$ 时, 对充分大的 L (依赖于 m) 有,

$$e^{2n_k L} - 1 \geq \frac{e^{2n_k L}}{2} \geq \frac{e^{2nL}}{2},$$

从而对充分大的 L (依赖于 m),

$$\frac{\bar{C}_m}{16n_k} e^{-(n/2+1)L} (e^{2n_k L} - 1) \geq \frac{\bar{C}_m}{32n_k} e^{(3n/2-1)L} \geq \frac{\bar{C}_m}{32(n+2(m-1))} e^{nL/2} \geq 2mL.$$

这就完成了(10.5)的证明. 进而根据前面的约化得到引理 10.7 的证明.

第 11 章 多调和映照的 Pohozaev 不等式

本章将为法向能量的衰减作准备. 调和映照的 Pohozaev 恒等式将法向能量的衰减约化为切向能量的衰减. 但是对一般的多调和映照, 这个约化不再是直接的. 事实上, 我们将会看到, 对调和映照的法向能量本身有衰减性, 而切向能量只是作为该衰减的一个小扰动. 这一内蕴衰减性来源于多 Laplace 的结构. 在下面, 我们首先讨论多调和映照方程的结构, 然后证明积分形式的相对 Pohozaev 恒等式并由此导出 Pohozaev 不等式.

11.1 多调和映照方程的结构

由于切向能量可以由三圈定理说明可以充分小. 故直接计算纯法向能量 (只含有 t 的导数). 注意到

$$\Delta u(r, \theta) = u_{rr} + \frac{(2m-1)u_r}{r} + \frac{\Delta_0 u}{r^2},$$

故在坐标变换 $(r, \theta) = (e^t, \theta)$ 下, $u_t = ru_r$, $u_{tt} = ru_r + r^2 u_{rr}$,

$$\Delta u(t, \theta) = e^{-2t} (u_{tt} + 2(m-1)u_t + \Delta_0 u).$$

注意到

$$[e^{-\alpha t}, \Delta_0] = 0, \quad [e^{-\alpha t}, \partial_t] = \alpha e^{-\alpha t}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

我们知道存在常系数的多项式 P , 使得

$$\Delta^m u = e^{-2mt} P(\partial_t, \Delta_0) u.$$

我们将要证明的 Pohozaev 恒等式的关键在于分析 P 的结构.

引理 11.1 假设

$$P(\partial_t, \Delta_0) = \sum_{\substack{1 \leq p+2q \leq 2m \\ p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}}} a_{p,q} \partial_t^p \Delta_0^q.$$

则常数 $a_{p,q}$ 满足

$$a_{p,q} = 0, \quad p = 1, 3, \dots, 2m-1,$$

以及

$$(-1)^{m-p/2} a_{p,0} > 0, \quad p = 2, 4, \dots, 2m. \quad (11.1)$$

证明 我们将使用归纳法. 定义

$$\Delta^l u = e^{-2lt} P_l(\partial_t, \Delta_0) u, \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

则 $P = P_m$, 并规定 $P_0 u = u$.

按定义

$$\begin{aligned} P_{l+1} u &= e^{2(l+1)t} \Delta^{l+1} u \\ &= e^{2(l+1)t} \Delta (e^{-2lt} P_l u) \\ &= e^{2lt} (\partial_t^2 + 2(m-1)\partial_t + \Delta_0) (e^{-2lt} P_l u). \end{aligned}$$

直接计算可知

$$P_{l+1} u = (\partial_t(\partial_t + 2(m-1) - 4l) + \Delta_0 - 4l(m-1-l)) P_l u. \quad (11.2)$$

如果令

$$\square_l = \partial_t^2 + \Delta_0 - 4l(m-1-l)$$

以及

$$b_l = 2(m-1-2l),$$

则(11.2) 变为

$$P_{l+1} = (\square_l + b_l \partial_t) P_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1. \quad (11.3)$$

利用(11.3), 我们得到

$$P(u) = P_m(u) = (\square_{m-1} + b_{m-1} \partial_t) \cdots (\square_0 + b_0 \partial_t) u. \quad (11.4)$$

容易验证如下基本性质

- (i) $\square_l, b_k \partial_t$ 可交换;
- (ii) $\square_l = \square_{m-1-l}$;
- (iii) $b_l = -b_{m-1-l}$. 特别地, 若 $m-1 = 2l$, 则 $b_l = b_{m-1-l} = 0$.

由此, 我们可将(11.4)根据 m 的奇偶性改写如下:

- 若 $m = 2l$ 是偶数, 则

$$P(u) = (\square_l^2 - b_l^2 \partial_t^2) \cdots (\square_0^2 - b_0^2 \partial_t^2);$$

- 若 $m = 2l + 1$ 是奇数, 则

$$P(u) = \square_l (\square_{l-1}^2 - b_{l-1}^2 \partial_t^2) \cdots (\square_0^2 - b_0^2 \partial_t^2).$$

可见, 无论在那种情况 P 中都没有奇数阶的 ∂_t . 这就证明了引理 11.1 中第一条.

为了看出系数 $a_{p,0}$ 的交错性, 注意到

$$\begin{aligned} P(\partial_t, 0) &= \prod_{l=0}^{m-1} (\partial_t^2 - 4l(m-1-l) + 2(m-1-2l)\partial_t) \\ &= \prod_{l=0}^{m-1} (\partial_t - 2l)(\partial_t + 2(m-1-l)) \\ &= (\partial_t - 2(m-1))\partial_t \cdots (\partial_t - 2)(\partial_t + 2(m-2)) \cdot \partial_t(\partial_t + 2(m-1)) \\ &= \partial_t^2(\partial_t^2 - 2^2) \cdots (\partial_t^2 - (2(m-1))^2), \end{aligned}$$

由此容易导出(11.1). $\square$

11.2 相对 Pohozaev 恒等式

在本节中, 我们将证明某种积分形式的 Pohozaev-型等式. 由此, 我们可以导出一个 Pohozaev-型差分不等式, 它在证明径向能量的衰减中所起的作用和 Pohozaev 恒等式是一样的.

首先, 回忆, 调和映照的 Pohozaev 恒等式 (参考引理 9.21) 可通过在调和映照方程两边同乘以 $\partial_t u$ 并分部积分得到. 事实上, 此时我们得到的是

$$\partial_t \int_{S^1} (|\partial_t u|^2 - |\partial_\theta u|^2) = 0. \quad (11.5)$$

由于在大多数情况下, 我们都有

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{S^1} |\partial_t u|^2 - |\partial_\theta u|^2 = 0.$$

因而, 积分(11.5)得到通常的 Pohozaev 恒等式, 它表明调和映照的切向能量和法向能量相等. 这也解释了为什么我们称(11.5)为相对 Pohozaev 恒等式.

引理 11.2 假设 u 是定义在 $B \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^{2m}$ 上的 m -多调和映照. 则

$$\int_{S^{2m-1}} P(\partial_t, \Delta_0) u \cdot \partial_t u = \partial_t \int_{S^{2m-1}} (Q + \Theta) = 0, \quad (11.6)$$

其中

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} (n-1/2) a_{2n,0} |\partial_t^n u|^2 \\ &\quad + \partial_t \left[\sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-k} (-1)^{k+l} a_{2n,0} \partial_t^{k+l-1} u \partial_t^{2n-k-l} u \right], \end{aligned} \quad (11.7)$$

而 Θ 是关于 $\partial_t^p \nabla_0^{q_2} \Delta_0^{q_1} u$ 的二次齐次多项式, 这里 q_2 等于 0 或者 1, 而且 $0 < 2q_1 + q_2 \leq 2m-1$.

证明 定义

$$Q_{p,q} := \int_{S^{2m-1}} a_{p,q} \partial_t^p \Delta_0^q u \cdot \partial_t u,$$

则由分部积分得到

$$Q_{p,q} = \int_{S^{2m-1}} (-1)^q a_{p,q} \partial_t^p w_q \cdot \partial_t w_q,$$

其中

$$w_q = \begin{cases} \Delta_{S^{2m-1}}^l u & q = 2l \\ \nabla_{S^{2m-1}} \Delta_{S^{2m-1}}^l u & q = 2l + 1. \end{cases}$$

再继续证明之前, 我们列出如下两条容易验证的基本性质. 对任意的 $1 \leq k < n$,

$$\partial_t^1 w \cdot \partial_t^{2n} w = \partial_t \left((-1)^{n+1} \frac{1}{2} |\partial_t^n w|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \partial_t^k w \cdot \partial_t^{2n-k} w \right) \quad (11.8)$$

$$\partial_t^k w \cdot \partial_t^{2n-k} w = \partial_t \left(\sum_{l=1}^{n-k} (-1)^{l-1} \partial_t^{k+l-1} w \cdot \partial_t^{2n-k-l} w \right) + (-1)^{n-k} |\partial_t^n w|^2. \quad (11.9)$$

由(11.8)以及 p 只能取偶数这一基本事实 (参考引理 11.1) 知

$$\begin{aligned} \int_{S^{2m-1}} P(u) \cdot \partial_t u d\theta &= \sum_{\substack{1 \leq p+2q \leq 2m \\ p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}}} \int_{S^{2m-1}} (-1)^q a_{p,q} \partial_t^p w_q \cdot \partial_t w_q d\theta \\ &= \partial_t \left[\sum_{\substack{1 \leq n+q \leq m \\ n, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}}} (-1)^q a_{2n,q} \int_{S^{2m-1}} (-1)^{n+1} \frac{1}{2} |\partial_t^n w_q|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \partial_t^k w_q \cdot \partial_t^{2n-k} w_q d\theta \right] \\ &= \partial_t \left[\sum_{n=1}^m a_{2n,0} \int_{S^{2m-1}} (-1)^{n+1} \frac{1}{2} |\partial_t^n u_q|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \partial_t^k u_q \cdot \partial_t^{2n-k} u_q d\theta + \Theta \right]. \end{aligned}$$

Q 所需要的形式(11.7)可将(11.9)用于 w_q 而得. 这就完成了证明. $\square$

现在, 对固定的 k , 由于 u_k 是定义 B 上的光滑函数, 注意到 $|Q + \Theta| \leq C \sum_{n=1}^{2m} e^{-nt} |\nabla^n u|$. 我们知道

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (Q + \Theta) = 0,$$

它表明

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{S^{2m-1}} (Q + \Theta) = 0.$$

利用上式并将(11.6)在 $(-\infty, 0)$ 积分, 我们得到, 对所有的 $t < 0$,

$$0 = \int_{S^{2m-1}} \left\{ \Theta + \sum_{n=1}^m (n-1/2) (-1)^{n+1} a_{2n,0} |\partial_t^n u_i|^2 + \partial_t \left[\sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-k} (-1)^{k+l} a_{2n,0} \partial_t^{k+l-1} u_i \partial_t^{2n-k-l} u_i \right] \right\}. \quad (11.10)$$

在上式中, Θ 涉及到切向导数, 它的衰减估计将由三圈引理导出. 而由于最后一项的存在, 这并不能导出径向能量 (第二项) 的衰减估计. 我们将看到, 由(11.10)可导出一个差分不等式, 由此也可以得到径向能量的衰减估计.

第 12 章 多调和映照的能量等式与 No Neck

在本章中, 我们将完成多调和映照的能量等式与 No Neck 的证明. 首先, 我们将证明多调和映照的小能量正则性. 然后我们做了两个准备, 其一是将能量分解为径向方向和切向方向, 尽管这一分解在调和映照时是平凡的, 但在多调和映照的情形却是非平凡的. 其二是从多调和映照的能量估计导出其任意阶高阶估计. 最后, 我们给出了 Neck 分析的基本框架及其具体步骤.

12.1 小能量正则性

在爆破分析中, 小能量正则性是基本的定理, 它表明在能量小时, 解的高阶导数可控制.

定理 12.1 (ε -正则性) 假设 $u: B \rightarrow N \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 是从单位球 $B \subset \mathbb{R}^{2m}$ 到 N 的 $W^{2m,p}(p > 1)$ 弱 m -调和映照. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得当

$$\int_B (|\nabla^m u|^2 + |\nabla u|^{2m}) dx \leq \varepsilon_0$$

时, 有内估计

$$\|u - \bar{u}\|_{W^{2m,p}(B_{1/2})} \leq C (\|\nabla^m u\|_{L^2(B)} + \|\nabla u\|_{L^{2m}(B)}), \quad (12.1)$$

以及对 $l = 1, 2, \dots$, 有

$$\|\nabla^l u\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C(l) (\|\nabla^m u\|_{L^2(B)} + \|\nabla u\|_{L^{2m}(B)}), \quad (12.2)$$

成立, 其中 $\bar{u}$ 是 u 在 B 中的积分平均值, 而 $C, \{C(l)\}$ 是常数.

注记 因为 $u \in W^{2m,p}(B) \hookrightarrow W^{m,2}(B)$ 而且 N 是紧致的, 我们知道 $u - \bar{u} \in W^{m,2}(B)$. 对 $u - \bar{u}$ 用插值不等式 [1, Lemma 5.2(1)],

$$\|\nabla^j u\|_{L^2(B)} \leq C (\|\nabla^m u\|_{L^2(B)} + \|u - \bar{u}\|_{L^2(B)}), \quad \forall 1 < j \leq m.$$

结合 Poincaré 不等式,

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2(B)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(B)},$$

我们得到

$$\begin{aligned} \|\nabla^j u\|_{L^2(B)} &\leq C (\|\nabla^m u\|_{L^2(B)} + \|\nabla u\|_{L^2(B)}) \\ &\leq C (\|\nabla^m u\|_{L^2(B)} + \|\nabla u\|_{L^{2m}(B)}), \quad \forall 1 < j \leq m. \end{aligned} \quad (12.3)$$

如果我们还假设 $\bar{u} = 0$, 则 Poincaré 不等式成为

$$\|u\|_{L^2(B)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(B)}.$$

故

$$\|u\|_{W^{m,2}(B)}^2 = \sum_{j=0}^m \|\nabla^j u\|_{L^2(B)}^2 \leq C \sum_{j=1}^m \|\nabla^j u\|_{L^2(B)}^2.$$

由于对 $j = 1$, (12.3) 显然成立. 我们得到

$$\|u\|_{W^{m,2}(B)} \leq C (\|\nabla^m u\|_{L^2(B)} + \|\nabla u\|_{L^{2m}(B)}) \quad (12.4)$$

注意这里要求 $\bar{u} = 0$.

证明 不失一般性, 我们假设 $\bar{u} = 0$. 由于 u 是 m -多调和映照, 它满足如下的欧拉-拉格朗日方程 (参考 [2, Lemma 2.2, (4)])

$$\Delta^m u = \sum_{\substack{i,j,q \geq 0 \\ i+j+q=m-1 \\ (i,j,q) \neq (0,m-1,0)}} c_{ijq}^{m-1} \Delta^i \nabla^q (P(u)) \Delta^{j+1} \nabla^q u - \Delta^{m-1} (A(u)(\nabla u, \nabla u)), \quad (12.5)$$

其中 c_{ijq} 是正整数, $P(u) = D\Pi(u)$ 是正交投影, 它是由最近点投射 $\Pi: N_\delta \rightarrow N$ 的微分定义的. 这里 N_δ 是到 N 的距离不大于 δ 的邻域而 $A(u)$ 是 $N \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 的第二基本型.

为了方便, 我们引入以下多重指标记号: 对多重指标 $\alpha = (k_1, \dots, k_a)$, 这里 $k_i \geq 1$ 是整数, $i = 1, 2, \dots, a$, 定义 α 的模长为 $|\alpha| = \sum_{i=1}^a k_i$, 定义 α 的长度为 k_i 的个数 a . 记 $|\alpha| = j$ 为所有模长为 j 的多重指标 α 全体, 但是不包含 $\alpha = (j)$. 利用这些记号, 我们可将(12.5)改写为

$$\Delta^m u = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(u) \nabla^{k_1} u \# \nabla^{k_2} u \# \dots \# \nabla^{k_a} u, \quad (12.6)$$

其中 a_α 是 $N \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 上的光滑函数, $A \# B$ 表示 A, B 以及一个光滑函数的乘积. 我们可以假设(12.6)中 $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_a \geq 1$, 从而 $k_2 \leq m$.

现在, 对固定的 $\sigma \in (1/2, 1)$, 令 $2\sigma' = 1 + \sigma$ 以及 $\phi \in C_0^\infty(B_{\sigma'})$ 是一个截断函数, 满足

$$\phi|_{B_\sigma} \equiv 1 \quad |\nabla^k \phi| \leq 4^k (1 - \sigma)^{-k}.$$

为了对 ϕu 利用 L^p -估计, 首先计算 ϕu 的方程:

$$\begin{aligned}
 \Delta^m(\phi u) - \sum_{i=1}^{2m} \nabla^i \phi \# \nabla^{2m-i} u &= \phi \Delta^m u = \sum_{|\alpha|=2m} \phi a_\alpha(u) \nabla^{k_1} u \# \nabla^{k_2} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u \\
 &= \sum_{|\alpha|=2m} \phi a_\alpha(u) \nabla^{k_1} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u \\
 &= \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(u) \left[\nabla^{k_1}(\phi u) - \sum_{j=1}^{k_1} \binom{k_1}{j} \nabla^j \phi \nabla^{k_1-j} u \right] \# \cdots \# \nabla^{k_a} u \\
 &= \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(u) \nabla^{k_1}(\phi u) \# \cdots \# \nabla^{k_a} u \\
 &\quad + \sum_{|\alpha|=2m} \sum_{j=1}^{k_1} a_\alpha(u) \nabla^j \phi \# \nabla^{k_1-j} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u.
 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 \Delta^m(\phi u) &= \sum_{i=1}^{2m} \nabla^i \phi \# \nabla^{2m-i} u + \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(u) \nabla^{k_1}(\phi u) \# \cdots \# \nabla^{k_a} u \\
 &\quad + \sum_{|\alpha|=2m} \sum_{j=1}^{k_1} a_\alpha(u) \nabla^j \phi \# \nabla^{k_1-j} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u.
 \end{aligned} \tag{12.7}$$

接下来, 对 $1 < p < \frac{2m}{2m-1}$, 我们逐项估计(12.7)的右边三项.

对第一项,

$$\|\nabla^i \phi \# \nabla^{2m-i} u\|_{L^p(B)} \leq C(1-\sigma)^{-i} \|\nabla^{2m-i} u\|_{L^p(B_{\sigma'})}, \quad 1 \leq i \leq 2m.$$

对第二项, 由广义的 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}
 \|\nabla^{k_1}(\phi u) \# \cdots \# \nabla^{k_a} u\|_{L^p(B)} &\leq C \|\nabla^{k_1}(\phi u)\|_{L^{\frac{2mp}{2m-(2m-k_1)p}}(B)} \prod_{i=2}^a \|\nabla^{k_i} u\|_{L^{\frac{2m}{k_i}}(B)} \\
 &\leq C \|\phi u\|_{W^{2m,p}(B)} \prod_{i=2}^a \|u\|_{W^{m,2}(B)},
 \end{aligned}$$

其中, 在最后一个不等式, 我们使用了如下的 Sobolev 嵌入,

$$W^{2m,p} \hookrightarrow W^{k_1, 2mp/(2m-(2m-k_1)p)}, \quad W^{m,2} \hookrightarrow W^{k, 2m/k}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

最后, 对第三项的估计根据 j 的范围分成如下几类

- 如果 $1 \leq j < k_1 < 2m$ 且 $k_1 - j \leq m$. 由 ϕ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}
 &\|\nabla^j \phi \# \nabla^{k_1-j} u \# \nabla^{k_2} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u\|_{L^p(B)} \\
 &\leq C(1-\sigma)^{-j} \|\nabla^{k_1-j} u\|_{L^{\frac{2m}{k_1-j}}(B_{\sigma'})} \prod_{i=2}^a \|\nabla^{k_i} u\|_{L^{\frac{2m}{k_i}}(B_{\sigma'})} \\
 &\leq C(1-\sigma)^{-j} \|u\|_{W^{m,2}(B)}^a.
 \end{aligned}$$

- 如果 $1 \leq j < k_1 < 2m$ 且 $2m - j > k_1 - j = l > m$, 则有 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入

$$\begin{aligned}
 & \|\nabla^j \phi \# \nabla^{k_1-j} u \# \nabla^{k_2} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u\|_{L^p(B)} \\
 & \leq C(1-\sigma)^{-j} \|\nabla^l u\|_{L^{\frac{2mp}{2m-(2m-k_1)p}}(B_{\sigma'})} \prod_{i=2}^a \|\nabla^{k_i} u\|_{L^{\frac{2m}{k_i}}(B_{\sigma'})} \\
 & \leq C(1-\sigma)^{-j} \|u\|_{W^{2m-j,p}(B_{\sigma'})} \prod_{i=2}^a \|\nabla^{k_i} u\|_{L^{\frac{2m}{k_i}}(B_{\sigma'})} \\
 & \leq C(1-\sigma)^{-j} \|u\|_{W^{2m-j,p}(B_{\sigma'})} \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1}.
 \end{aligned}$$

由插值不等式 [1, Theorem 5.2(1)],

$$\|u\|_{W^{2m-j,p}(B_{\sigma'})} \leq C \left(\|\nabla^{2m-j} u\|_{L^p(B_{\sigma'})} + \|u\|_{L^p(B_{\sigma'})} \right).$$

由于 N 是紧致的, $\|u\|_{L^p(B)}$ 的上界是只依赖于 N 的一个常数. 因此,

$$\begin{aligned}
 & \|\nabla^j \phi \# \nabla^{k_1-j} u \# \nabla^{k_2} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u\|_{L^p(B)} \\
 & \leq C(1-\sigma)^{-j} \|\nabla^{2m-j} u\|_{L^p(B_{\sigma'})} \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1} + C(1-\sigma)^{-j} \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1}.
 \end{aligned}$$

- 如果 $j = k_1$, 我们可以处理如下

$$\begin{aligned}
 & \|\nabla^j \phi \# \nabla^{k_1-j} u \# \nabla^{k_2} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u\|_{L^p(B)} \\
 & \leq C(1-\sigma)^{-k_1} \|u \# \nabla^{k_2} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u\|_{L^p(B)} \\
 & \leq C(1-\sigma)^{-k_1} \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1},
 \end{aligned}$$

因为 u 有界.

因此, 对(12.7)应用 L^p 估计,

$$\begin{aligned}
 & \|\phi u\|_{W^{2m,p}(B)} \\
 & \leq C \left\{ \sum_{i=1}^{2m} (1-\sigma)^{-i} \|\nabla^{2m-i} u\|_{L^p(B_{\sigma'})} + \sum_{|\alpha|=2m} \|\phi u\|_{W^{2m,p}(B)} \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1} \right. \\
 & \quad + \sum_{|\alpha|=2m} \left[\sum_{j=k_1-m \geq 1}^{k_1} (1-\sigma)^{-j} \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1} + \sum_{j=1}^{2m-1} (1-\sigma)^{-j} \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1} \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{k_1-m-1} (1-\sigma)^{-j} \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1} (1 + \|\nabla^{2m-j} u\|_{L^p(B_{\sigma'})}) \right] \right\} \\
 & \leq C \sum_{|\alpha|=2m} \left\{ \|\phi u\|_{W^{2m,p}(B)} \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1} + \sum_{j=1}^{2m} (1-\sigma)^{-j} \left[\|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(1 + \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1} \right) \|\nabla^{2m-j} u\|_{L^p(B_{\sigma'})} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

由(12.4), ε_0 充分小时, $\|u\|_{W^{m,2}(B)}$ 也可以充分小, 故

$$\begin{aligned} \|\nabla^{2m}u\|_{L^p(B_\sigma)} &\leq C \sum_{|\alpha|=2m} \sum_{j=1}^{2m} \left(\|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1} \right. \\ &\quad \left. + (1 + \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1}) \|\nabla^{2m-j}u\|_{L^p(B_{\sigma'})} \right) (1-\sigma)^{-j} \end{aligned}$$

为了处理上式右边的低阶项, 我们令

$$\Phi_j := \sup_{1/2 \leq \sigma \leq 1} (1-\sigma)^j \|\nabla^j u\|_{p; B_\sigma}, \quad j = 0, 1, \dots, 2m,$$

则

$$\Phi_{2m} \leq C \sum_{|\alpha|=2m} \sum_{j=0}^{2m-1} \left\{ \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1} + (1 + \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1}) \Phi_j \right\}. \quad (12.8)$$

现在, 我们需要如下的

断言 存在常数 C_0 , 使得对任意的 $\bar{\varepsilon} \leq C_0$,

$$\Phi_j \leq \left(\bar{\varepsilon} \Phi_{2m} + C \bar{\varepsilon}^{-\frac{j}{2m-j}} \Phi_0 \right), \quad \forall 0 \leq j \leq 2m-1,$$

对某个只依赖于 m 的常数 C 成立.

事实上, 由 Φ_j 的定义, 对任意的 $s > 0$, 存在 $\sigma_s \in [1/2, 1)$, 使得

$$\Phi_j \leq (1-\sigma_s)^j \|\nabla^j u\|_{L^p(B_{\sigma_s})} + s.$$

对任意的 $u \in W^{2m,p}(\Omega)$, 由插值不等式 (参考 [1, Theorem 5.2(1)], 存在常数 $C_0 > 0$ 使得对任意的 $\varepsilon \leq 1$ 以及任意的 $j = 0, 1, \dots, 2m-1$, 有

$$\|\nabla^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_0 \left(\varepsilon \|\nabla^{2m} u\|_{L^p(\Omega)} + \varepsilon^{-\frac{j}{2m-j}} \|u\|_{L^p(\Omega)} \right).$$

因此

$$\begin{aligned} \Phi_j &\leq C_0 \left(\varepsilon (1-\sigma_s)^j \|\nabla^{2m} u\|_{L^p(B_{\sigma_s})} + \varepsilon^{-\frac{j}{2m-j}} (1-\sigma_s)^j \|u\|_{L^p(B_{\sigma_s})} \right) + s \\ &\leq \varepsilon_s \Phi_{2m} + C_0^{1-\frac{j}{2m-j}} (\varepsilon_s)^{-\frac{j}{2m-j}} \Phi_0 + s, \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_s = C_0 \varepsilon (1-\sigma_s)^{j-2m}$.

最后, 对任意的 $\bar{\varepsilon} \leq C_0$ 以及任何固定的 $s > 0$, 可取 $\varepsilon = \bar{\varepsilon} (1-\sigma_s)^{2m-j} / C_0 \leq 1$, 则 $\varepsilon_s = \bar{\varepsilon}$, 令 $s \rightarrow 0$ 就得到断言的证明.

现在, 注意到(12.4)表明 $\|u\|_{W^{m,2}(B)}$ 可被 $E(u; B) \leq \varepsilon_0$ 控制, 从而按照假设是可以任意小的. 对(12.8)应用上述断言 ($\bar{\varepsilon}$ 充分小) 得到,

$$\Phi_{2m} \leq C \left(\Phi_0 + \|u\|_{W^{m,2}(B)}^{a-1} \right) \leq C \left(\|\nabla^m u\|_{L^2(B)} + \|\nabla u\|_{L^{2m}(B)} \right).$$

最后一个不等式是由于 $\bar{u} = 0$, ε_0 充分小以及(12.4). 再次应用上述断言, 对 $p = \frac{2m+1}{2m} \in (1, \frac{2m}{2m-1})$,

$$\|u\|_{W^{2m,p}(B_\sigma)} \leq C(1-\sigma)^{-2m} (\|\nabla^m u\|_{L^2(B)} + \|\nabla u\|_{L^{2m}(B)}). \quad (12.9)$$

我们将用 Bootstrap 来完成证明. 我们从 $p_0 = \frac{2m+1}{2m} < \frac{2m}{2m-1}$ 开始迭代. (12.9)表明(12.1)对 $p = p_0$ 成立.

由 Sobolev 嵌入 $W^{2m,p_0} \hookrightarrow W^{l, \frac{2mp_0}{2m-(2m-l)p_0}}$ 以及 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned} \|\nabla^{k_1} u \# \nabla^{k_2} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u\|_{L^{\frac{1}{1-a(1-1/p_0)}}} &\leq C \prod_{i=1}^a \|\nabla^{k_i} u\|_{L^{\frac{2mp_0}{2m-(2m-k_i)p_0}}} \\ &\leq C \|u\|_{W^{2m,p_0}}^a. \end{aligned}$$

由于 $a \geq 2$, 我们知道

$$\frac{1}{1-a\left(1-\frac{1}{p_0}\right)} \geq \frac{p_0}{2-p_0} = \frac{2m+1}{2m-1} > p_1 := \frac{2m}{2m-1}, \quad (12.10)$$

因此

$$\|\nabla^{k_1} u \# \nabla^{k_2} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u\|_{L^{p_1}} \leq C \|u\|_{W^{2m,p_0}}^a. \quad (12.11)$$

综上, (12.6)右端的 L^{p_1} 模可由 $\|u\|_{W^{2m,p_0}}$ 控制, 从而(12.1)对 p_1 成立.

接下来, 我们做迭代

$$p_{i+1} = \frac{1}{\frac{1}{p_i} - \frac{1}{2m}} = \frac{2m}{2m-i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 2m-2,$$

并证明(12.11)中 p_0 and p_1 分别换成 p_i 与 p_{i+1} 仍成立. 因此 L^p -估计表明(12.1)对 p_{i+1} 也成立.

注意到(12.11)对 $p_1 + \delta_1$ 成立, 这里 δ_1 是一个充分小的数 (参考 (12.10)). 为了保证 Sobolev 嵌入超临界, 我们将证明的是如下的结论: 假设对任何 α , $|\alpha| = 2m$ 且 $\alpha \neq (2m)$,

$$\|\nabla^{k_1} u \# \nabla^{k_2} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u\|_{L^{p_{i+1}+\delta_{i+1}}} \leq C \|u\|_{W^{2m,p_i+\delta_i}}^a, \quad (12.12)$$

对 $i = l \in \{1, 2, \dots, 2m-3\}$ 以及某个 $\delta_i > 0$ 成立, 则(12.12)对 $i = l+1$ 以及某个 $\delta_{i+1} > 0$ 也成立. 这里 $\{\delta_i\}$ 的确切数值我们并不是很关心, 只需要它们是大于零的即可, 这是为了保证 Sobolev 嵌入(12.13)成立. 取 δ_l 充分小使得

$$W^{2m,\bar{p}_l} \hookrightarrow W^{h,\infty}, \quad \forall h = 0, 1, \dots, l, \quad (12.13)$$

$$W^{2m,\bar{p}_l} \hookrightarrow W^{h, \frac{2m\bar{p}_l}{2m-(2m-l)\bar{p}_l}}, \quad \forall h = l+1, \dots, 2m, \quad (12.14)$$

其中 $\bar{p}_l = p_l + \delta_l$. 为了说明证明的思想, 假设(12.12)中的多重指标 α 满足

$$\begin{aligned} k_1 &\geq k_2 \geq \cdots \geq k_{a-j_1-j_2\cdots-j_l} > k_{a-j_1-j_2\cdots-j_{l+1}} = \cdots = k_{a-j_1-j_2\cdots-j_{l-1}} = l \\ &> \cdots \\ &> k_{a-j_1-j_2+1} = \cdots = k_{a-j_1} = 2 \\ &> k_{a-j_1+1} = \cdots = k_a = 1. \end{aligned}$$

令 $j = j_1 + j_2 \cdots + j_l$, 由 Hölder 和 Sobolev 不等式

$$\begin{aligned} &\|\nabla^{k_1} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u\|_{L^p} \\ &\leq C \|\nabla^{k_1} u \# \cdots \# \nabla^{k_{a-j}} u\|_{L^p} \prod_{h=1}^{j_l} \|\nabla^{k_{a-j+h}} u\|_{L^\infty} \cdots \prod_{h=1}^{j_1} \|\nabla^{k_{a-j_1+h}} u\|_{L^\infty} \\ &\leq C \|u\|_{W^{2m, \bar{p}_l}}^j \prod_{h=1}^{a-j} \|\nabla^{k_h} u\|_{L^{\frac{2m\bar{p}_l}{2m-(2m-k_h)\bar{p}_l}}}, \quad (\text{由 (12.13)}) \\ &\leq C \|u\|_{W^{2m, \bar{p}_l}}^a, \quad (\text{由 (12.14)}) \end{aligned}$$

其中

$$p \leq \frac{1}{1 - (a-j) \left(1 - \frac{1}{\bar{p}_l}\right) - \frac{j_1+2j_2+\cdots+j_l}{2m}}$$

容易看出, 上式右端在 $j_l = \cdots = j_2 = 0, j_1 = 1, a = 2$, 时取得最小值, 即

$$p \geq \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}_l} - \frac{1}{2m}} := \bar{p}_{l+1} > p_{l+1}.$$

因此(12.9) 对 $i = l+1$ 成立.

作为上述迭代的结论, 我们证明了(12.1)对 $\bar{p} > 2m = p_{2m-1}$ 成立. 现在, 对一般的 $p > 1$, 注意到

$$W^{2m, \bar{p}} \hookrightarrow W^{h, \infty}, \quad \forall h = 0, 1, \dots, 2m-1.$$

因此

$$\|\nabla^{k_1} u \# \nabla^{k_2} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u\|_{L^p} \leq C \|\nabla^{k_1} u \# \nabla^{k_2} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{W^{2m, \bar{p}}}^a,$$

这表明(12.1) 对 p 也成立, 这就完成了定理 12.1 的第一部分的证明.

最后, (12.2) 可由(12.1)和标准的 bootstrap 技巧证明. □

12.2 能量的径向—切向分解

和调和映照或者双调和映照一样, 我们希望将能量分解为径向部分和切向部分, 并分别证明它们的指数衰减. 在调和映照的情形, 我们有

$$|\nabla u|^2 = |\partial_r u|^2 + |r^{-1} \partial_\theta u|^2.$$

然而, 在多调和映照的情形, 类似上面的分解是不存在的. 这主要是因为: 首先, 对 $m > 1$, S^{2m-1} 或其万有覆盖上没有整体的坐标系; 其次, 多调和映照的能量涉及到映射的高阶导而非仅仅是梯度.

为了解决这一问题, 回忆 S^{1m-1} 可看作齐性空间 $O(2m)/O(2m-1)$. 令 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m(2m-1)}$ 是李代数 $\mathfrak{o}(2m)$ 的么正基. 由 [14, Lemma 2], 存在 S^{2m-1} 上 $m(2m-1)$ 个光滑向量场 $Y_1, \dots, Y_{m(2m-1)}$, 使得对任意的 $y \in S^{2m-1}$ 以及任意的切向量 $V \in T_y S^{2m-1}$, 我们有

$$V = \sum_{k=1}^{m(2m-1)} \langle V, X_k(y) \rangle_{S^{2m-1}} Y_k(y).$$

接下来, 我们将把上述构造延拓到 $\mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$. 为此, 我们将 S^{2m-1} 和 ∂B_1 等同, 且注意到存在 $\partial B_r (r \neq 0)$ 到 ∂B_1 的自然微分同胚 (缩放), 记为 Ψ_r . 利用 Ψ_r , 我们可将 X_k, Y_k 延拓到 $\mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$, 且它们都是 $\partial B_{|x|}$ 在 $x \in \mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$ 处的切向量. 由这些记号以及注意到 Ψ_r 将 ∂B_1 上的度量拉回到 ∂B_r 上成为 $r^{-2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial B_r}$, 我们得到

$$V = \sum_{k=1}^{m(2m-1)} \frac{1}{|x|^2} \langle V, X_k(x) \rangle Y_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}, V \in T_x(\partial B_{|x|}).$$

这里, 我们省略了内积的下标, 因为 ∂B_r 的内积是由 $\mathbb{R}^{2m}$ 诱导的, 而且我们将所有的向量都视为 $\mathbb{R}^{2m}$ 中的向量.

最后, 将法向部分添加进来, 我们就得到 V 的如下分解

$$V = (V, \partial_r) \partial_r + \sum_{k=1}^{m(2m-1)} \frac{1}{|x|^2} \langle V, X_k(x) \rangle Y_k(x), \quad (12.15)$$

这里 $V \in \mathbb{R}^{2m}$ 而 $x \in \mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$. 特别地, 如果令 $V = \nabla u$, 由 (12.15) 得到

$$\rho \nabla u = (\rho \partial_r u) \partial_\rho + \sum_{k=1}^{m(2m-1)} (X_k u) \frac{Y_k}{\rho}. \quad (12.16)$$

$\partial_r(x)$ 与 $\frac{Y_k}{\rho}(x)$ 作为 $\mathbb{R}^{2m}$ 中的向量不依赖于 $|x|$, 故对任意的 $l > 0$, 存在常数 C_l 使得

$$\max_{\partial B_\rho} |\rho^l \nabla^l(\partial_r)| \leq C_l, \quad \max_{\partial B_\rho} \left| \rho^l \nabla^l \left(\frac{Y_k}{\rho} \right) \right| \leq C_l. \quad (12.17)$$

现在, 对(12.16)两边同时作用 $\rho^{l-1}\nabla^{l-1}$, 则得到

$$\begin{aligned} \rho^{l-1}\nabla^{l-1}(\rho\nabla u_i) &= \sum_{p=0}^{l-1} \binom{l-1}{p} \rho^{l-1-p}\nabla^{l-1-p}(\partial_r)\rho^p\nabla^p(\rho\partial_r u_i) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m(2m-1)} \sum_{p=0}^{l-1} \binom{l-1}{p} \rho^{l-1-p}\nabla^{l-1-p}(Y_k/\rho)\rho^p\nabla^p(X_k u_i), \end{aligned}$$

可见, 对 $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$|\rho^{l-1}\nabla^{l-1}(\rho\nabla u_i)| \leq \sum_{p=0}^{l-1} C_{p,l} \left(|\rho^p\nabla^p(\rho\partial_r u_i)| + \sum_{k=1}^{m(2m-1)} |\rho^p\nabla^p(X_k u_i)| \right). \quad (12.18)$$

我们将会看到, $|\rho^{l-1}\nabla^{l-1}(\rho\nabla u_i)|$ 和 $|\rho^l\nabla^l u_i|$ 是相互控制的. 故我们将

$$\left\{ |\rho^p\nabla^p(\rho\partial_r u_i)| \right\}_{p=0}^{l-1}, \quad \left\{ |\rho^p\nabla^p(X_k u_i)| \right\}_{p=0}^{l-1},$$

分别称为 $|\rho^l\nabla^l u_i|$ 的 **切向分量**与**法向分量**. 在下节我们将证明, 对能量的衰减估计只需分别得到切向分量和法向分量的衰减估计.

12.3 线性化多调和映照方程及其高阶估计

随后, 我们将利用三圈引理或者 Pohozaev 型论证证明 $X_k u_i$ 和 $\partial_t u_i$ 的 L^2 -模的衰减估计. 但是 $E(u_i)$ 中含有 u_i 的高阶导数. 这节将证明一个引理, 它将从 L^2 -模的衰减导出任意高阶导数逐点模的衰减. 而证明的主要观察在于 $X_k u_i$ 以及 $\partial_t u_i = \rho\partial_\rho u_i$ 满足一个齐次线性椭圆方程组, 且其系数都是好的.

假设 u 是定义在 $B_4 \setminus B_1$ 上的光滑多调和映照. 回忆其欧拉-拉格朗日方程为

$$\Delta^m u = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(u) \nabla^{k_1} u \# \nabla^{k_2} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u.$$

此外, 由 Ding-Tian 假设 (见后(12.23)) 以及小能量正则性定理 12.1, 我们可以假设

$$\max_{B_4 \setminus B_1} |\nabla^l u| \leq 1, \quad l = 1, 2, \dots, 2m-1. \quad (12.19)$$

引理 12.2 假设 u 是定义在 $B_4 \setminus B_1$ 上的多调和映照, 且满足(12.19). 则有

$$\max_{B_3 \setminus B_2} |\nabla^l(\rho\partial_\rho)u|^2 \leq C \int_{B_4 \setminus B_1} |\rho\partial_\rho u|^2 \quad (12.20)$$

以及

$$\max_{B_3 \setminus B_2} |\nabla^l(X_k u)|^2 \leq C \int_{B_4 \setminus B_1} |X_k u|^2, \quad (12.21)$$

这里 k 可取为 $1, 2, \dots, m(2m-1)$.

证明 首先, 我们利用多调和映照的方程在由 $\rho\partial_\rho$ 以及 X_k 生成的单参数变换群的 (等距) 作用下是不变的. 即, 若 ψ_s 是那样的一个单参数变换群, 令 $u_s = u \circ \psi_s$. 则当 u 是一个多调和映照时, u_s 仍然是一个多调和映照. 从而 u_s 满足

$$\Delta^m u_s = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(u_s) \nabla^{k_1} u_s \# \cdots \# \nabla^{k_a} u_s.$$

两边同时在 $s = 0$ 处取导数, 并令 $h := \frac{du_s}{ds} \Big|_{s=0}$, 则

$$\begin{aligned} \Delta^m h &= \sum_{|\alpha|=2m} D a_\alpha(u) \nabla^{k_1} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u \cdot h \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(u) \sum_{i=1}^a \nabla^{k_1} u \# \cdots \# \nabla^{k_{i-1}} u \# \nabla^{k_i} h \# \nabla^{k_{i+1}} u \# \cdots \# \nabla^{k_a} u. \end{aligned} \quad (12.22)$$

这即表明 h 满足一个线性椭圆方程组, 且由(12.19), 其系数都是有界的. 故由经典的线性椭圆估计, 分别取 h 为 $X_k u$ 和 $\rho\partial_\rho u$ 即得结论. $\square$

12.4 Neck 分析的基本框架

设 $\{u_i\}$ 是一列从 $B \subset \mathbb{R}^{2m}$ 到紧流形 N 的多调和映照, 它具有一致的能量 $\mathcal{E}(u_i) \leq \Lambda < +\infty$. 由于 N 紧, $\{u_i\}$ 是一致有界的. 结合 Sobolev 嵌入 $W^{m,2} \hookrightarrow W^{1,2m}$, 我们知道

$$E(u_i) := \int_B |\nabla^m u_i|^2 + |\nabla u_i|^{2m}$$

也是一致有界的. 由 Ding-Tian 约化, 我们可以假设序列 $\{u_i\}$ 只有一个 bubble. 此时, 我们有

条件 (Ding-Tian 约化) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta \searrow 0$ 以及 $R \nearrow +\infty$, 使得对任意的 $\rho \in (2\lambda_i R, \delta/2)$, 成立

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \int_{B_{2\rho} \setminus B_\rho} |\nabla^m u_i|^2 + |\nabla u_i|^{2m} < \varepsilon, \quad \forall \rho \in (2\lambda_i R, \delta/2). \quad (12.23)$$

令 $v(x) = u_i(\rho x)$, 对 v 在 $B_2 \setminus B_{1/2}$ 上应用小能量正则性定理 (参考定理 12.1) 可得, 对任何的 $l = 1, 2, \dots$,

$$\max_{\partial B_\rho} \rho^l |\nabla^l u_i| \leq C \varepsilon^{1/2m}. \quad (12.24)$$

为了证明能量等式, 我们只需要稍微改进一下上面的估计, 即

断言 12.3 若存在 $\sigma > 0$, 使得对所有的 $\rho \in (\lambda_i R, \delta)$ 以及所有的 $l \in \mathbb{N}$ 成立

$$\max_{\partial B_\rho} \rho^l |\nabla^l u_i| \leq C(\sigma, l) \varepsilon^{1/2m} \left(\left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{-\sigma} + \left(\frac{\rho}{\lambda_i R} \right)^{-\sigma} \right). \quad (12.25)$$

则对 $\{u_i\}$ 成立能量等式.

事实上, 直接计算 neck 上的能量为

$$\begin{aligned} E(u_i; B_\delta \setminus B_{\lambda_i R}) &= \int_{\lambda_i R}^{\delta} \int_{\partial B_\rho} (|\nabla^m u_i|^2 + |\nabla u_i|^{2m}) d\rho dS \\ &\leq C(\sigma, m) \int_{\lambda_i R}^{\delta} \rho^{-2m} \int_{\partial B_\rho} \left(\varepsilon^{1/m} \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{-2\sigma} + \left(\frac{\rho}{\lambda_i R} \right)^{-2\sigma} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{-m\sigma} + \left(\frac{\rho}{\lambda_i R} \right)^{-m\sigma} \right) dS d\rho \\ &\leq C(\sigma, m) \int_{\lambda_i R}^{\delta} \rho^{-1} \left(\varepsilon^{1/m} \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{-2\sigma} + \left(\frac{\rho}{\lambda_i R} \right)^{-2\sigma} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{-m\sigma} + \left(\frac{\rho}{\lambda_i R} \right)^{-m\sigma} \right) d\rho \\ &\leq C(\sigma, m) \left(\varepsilon^{1/m} \left(\frac{1}{2\sigma} + \frac{1}{2\sigma} \right) + \varepsilon \left(\frac{1}{m\sigma} + \frac{1}{m\sigma} \right) \right) \\ &\leq C(\sigma, m) \varepsilon^{1/m}. \end{aligned}$$

其中, 我们依次用到了下列初等不等式

$$(a+b)^k \leq 2^k(a^k + b^k), \quad \forall k \geq 1, \forall a, b > 0,$$

$$\int_{\lambda_i R}^{\delta} \rho^\alpha d\rho = \frac{\rho^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_{\lambda_i R}^{\delta} \leq \begin{cases} \frac{\delta^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha > -1, \\ -\frac{(\lambda_i R)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha < -1. \end{cases}$$

这就证明了

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{i \rightarrow +\infty} E(u_i; B_\delta \setminus B_{\lambda_i R}) = 0.$$

和调和映照的情形一样, 结合小能量正则性, 我们可以从能量等式的证明得到 No Neck 的证明.

推论 12.4 对上述多调和映照 $\{u_i\}$ 成立 No Neck 性质, 即

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{i \rightarrow +\infty} \text{osc}(u_i; B_\delta \setminus B_{\lambda_i R}) = 0.$$

至此, 我们已经将能量等式与 No Neck 的证明转换为证明(12.25). 下面我们进一步将(12.25)转化为

$$\max_{\partial B_\rho} \rho^{l-1} |\nabla^{l-1}(\rho \nabla u_i)| \leq C(\sigma, l) \varepsilon^{1/2m} \left(\left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{-\sigma} + \left(\frac{\rho}{\lambda_i R} \right)^{-\sigma} \right).$$

为了说明它们是等价的, 首先注意到按照定义, 对向量值函数 u ,

$$|\nabla^l u| = \sqrt{\sum_{k=1}^K \sum_{|\alpha|=l} \left| \frac{\partial^\alpha u^k}{\partial x^\alpha} \right|^2} \sim \sum_{k=1}^K \sum_{|\alpha|=l} \left| \frac{\partial^\alpha u^k}{\partial x^\alpha} \right|,$$

其中 $\sim$ 表示可以相互控制. 特别地, 对 $v(x) = u(\rho x)$, 由于

$$\frac{\partial^\alpha v^k(x)}{\partial x^\alpha} = \rho^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha u}{\partial y^\alpha} \Big|_{y=\rho x},$$

有

$$\rho^l |\nabla^l u|(\rho x) \sim \sum_{k=1}^K \sum_{|\alpha|=l} \left| \frac{\partial^\alpha v^k}{\partial x^\alpha} \right|(x) \sim |\nabla^l v|(x).$$

因此

$$\begin{aligned} \max_{l=1, \dots, l_0} \max_{\partial B_\rho} \rho^l |\nabla^l u| &= \max_{l=1, \dots, l_0} \max_{\partial B_1} \rho^l |\nabla^l u|(\rho x) \sim \max_{l=1, \dots, l_0} \max_{\partial B_1} |\nabla^l v| \\ \max_{l=1, \dots, l_0} \max_{\partial B_\rho} \rho^{l-1} |\nabla^{l-1}(\rho \nabla u)| &= \max_{l=1, \dots, l_0} \max_{\partial B_1} \rho^{l-1} |\nabla^{l-1}(\rho \nabla u)|(\rho x) \\ &\sim \max_{l=1, \dots, l_0} \max_{\partial B_1} |\nabla^{l-1}(\nabla v)| \end{aligned}$$

这就证明了等价性.

由能量的径向—切向分解 (参考第 12.2 节), 我们最终将能量等式与 No Neck 的证明归结为证明如下

断言 12.5 存在常数 $\sigma > 0$, 使得对所有的 $l \in \mathbb{N}$ 以及所有的 $\rho \in (2\lambda_i R, \delta/2)$, 有

$$\max_{k=1, \dots, m(2m-1)} \max_{\partial B_\rho} \rho^l |\nabla^l(X_k u_i)| \leq C(\sigma, l) \varepsilon^{1/(2m)} \left[\left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{-\sigma} + \left(\frac{\rho}{\lambda_i R} \right)^{-\sigma} \right] \quad (12.26)$$

以及

$$\max_{\partial B_\rho} \rho^l |\nabla^l(\rho \partial_r u_i)| \leq C(\sigma, l) \varepsilon^{1/(2m)} \left[\left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{-\sigma} + \left(\frac{\rho}{\lambda_i R} \right)^{-\sigma} \right]. \quad (12.27)$$

12.5 切向能量的衰减估计

在本节, 我们将证明(12.26). 基本的想法和双调和映照一样 (参考 [24]), 主要的区别在于多调和映照的三圈引理, 这在第 10 章已经证明 (参考引理 10.7).

回忆调和映照的 Neck 分析中切向能量的衰减估计, 我们首先将调和函数的三圈引理推广到调和函数, 而后证明了对逼近调和函数也有 L^p 估计成立. 最后切向能量的衰减估计可以通过三圈引理和 L^p 估计得到. 下面我们首先来看逼近多调和映照的定义.

12.5.1 逼近多调和函数与 L^p 估计

我们称一个函数 $u \in C^\infty(B_{r_2} \setminus B_{r_1}, \mathbb{R})$, 是一个 η -逼近多调和函数, 如果

$$\Delta^m u = \sum_{|\alpha|=2m} \left\{ \left(A_0^\alpha u + \sum_{i=1}^a A_i^\alpha \nabla^{k_i} u \right) - \oint_{\partial B_r} \left(A_0^\alpha u + \sum_{i=1}^a A_i^\alpha \nabla^{k_i} u \right) \right\},$$

其中 A_i^α 是光滑函数, 而且对所有 $x \in B_{r_2} \setminus B_{r_1}$ 有

$$|A_0^\alpha| \leq \frac{\eta}{|x|^{2m}}, \quad |A_i^\alpha| \leq \frac{\eta}{|x|^{2m-k_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, a,$$

这里 $|\alpha| = 2m$ 表示所有模长为 $2m$ 的多重指标 $\alpha = (k_1, k_2, \dots, k_a)$, $k_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, a$, 但除去 $\alpha = (2m)$.

下面, 我们将证明 η -逼近调和函数的 L^p -估计.

引理 12.6 假设 $u: B_4 \setminus B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 η -逼近多调和函数, 而且

$$\sum_{\substack{|\alpha|=2m \\ \alpha=(k_1, \dots, k_a)}} \sum_{i=0}^a \|A_i^\alpha\|_{\infty; B_4 \setminus B_1} \leq C,$$

则

$$\|u\|_{W^{2m,p}(B_3 \setminus B_2)} \leq C \|u\|_{p; B_4 \setminus B_1}.$$

证明 令 $\sigma \in (1/2, 1)$ 是一个固定的数, 令 $\sigma' = (1 + \sigma)/2$. 记 $A_\sigma := B_{3+\sigma} \setminus B_{2-\sigma}$ 而且 $A_{\sigma'} := B_{3+\sigma'} \setminus B_{2-\sigma'}$. 取截断函数 $\phi \in C_0^\infty(A_{\sigma'})$, 满足

$$\phi|_{A_\sigma} \equiv 1, \quad |\nabla^j \phi| \leq C(1 - \sigma)^{-j}, \quad j = 1, 2, \dots, 2m, \quad \phi(x) = \phi(|x|).$$

由 u 的是逼近调和函数所满足的方程容易得到 ϕu 的方程

$$\begin{aligned} \Delta^m(\phi u) &= \phi \Delta^m u + \sum_{i=1}^{2m} \nabla^i \phi \# \nabla^{2m-i} u \\ &= \phi \sum_{|\alpha|=2m} \left[\left(A_0^\alpha u + \sum_{i=1}^a A_i^\alpha \nabla^{k_i} u \right) - \oint_{\partial B_r} \left(A_0^\alpha u + \sum_{i=1}^a A_i^\alpha \nabla^{k_i} u \right) \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2m} \nabla^i \phi \# \nabla^{2m-i} u. \end{aligned}$$

为了使用 L^p 估计, 我们注意到上式右边可以作如下估计:

$$\|\nabla^i \phi \# \nabla^{2m-i} u\|_{p; A_{\sigma'}} \leq C(1 - \sigma)^{-i} \|\nabla^{2m-i} u\|_{p; A_{\sigma'}}.$$

如果令 $k_0 = 0$, 则对 $i = 0, 1, \dots, a$,

$$\|\phi A_i^\alpha \nabla^{k_i} u\|_{p; A_{\sigma'}} \leq C \|\nabla^{k_i} u\|_{p; A_{\sigma'}} \leq C(1 - \sigma)^{-(2m-k_i)} \|\nabla^{k_i} u\|_{p; A_{\sigma'}}.$$

此外, 由 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned} \int_{A_{\sigma'}} \phi^p \left(\int_{\partial B_r} A_i^\alpha \nabla^{k_i} u \right)^p dx &\leq \int_{A_{\sigma'}} \phi^p \left(\int_{\partial B_r} |A_i^\alpha \nabla^{k_i} u|^p \right) dx \\ &= \int_{2-\sigma'}^{3+\sigma'} \phi^p \int_{\partial B_r} |A_i^\alpha \nabla^{k_i} u|^p dr \\ &\leq \|A_i^\alpha \nabla^{k_i} u\|_{p; A_{\sigma'}}^p \leq C(1-\sigma)^{-(2m-k_i)} \|\nabla^{k_i} u\|_{p; A_{\sigma'}}. \end{aligned}$$

因此, L^p 估计表明

$$\begin{aligned} \|\phi u\|_{W^{2m,p}(A_{\sigma'})} &\leq \sum_{i=1}^{2m} C(1-\sigma)^{-i} \|\nabla^{2m-i} u\|_{p; A_{\sigma'}} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{2m-1} \sum_{\substack{|\alpha|=2m \\ k_i=j}}^a C(1-\sigma)^{-(2m-k_i)} \|\nabla^{k_i} u\|_{p; A_{\sigma'}} \\ &\leq C \sum_{i=1}^{2m} (1-\sigma)^{-i} \|\nabla^{2m-i} u\|_{p; A_{\sigma'}}. \end{aligned}$$

现在, 令

$$\Psi_j = \sup_{\sigma \in [1/2, 1]} (1-\sigma)^j \|\nabla^j u\|_{p; A_\sigma}, \quad j = 0, 1, \dots, 2m$$

且注意到 $1-\sigma = 2(1-\sigma')$, 我们有

$$\Psi_{2m} \leq C \sum_{j=0}^{2m-1} \Psi_j.$$

定理 12.1 中断言的证明, 可以得到对充分小的 ε

$$\Psi_j \leq \varepsilon \Psi_{2m} + C\varepsilon^{-j/(2m-j)} \Psi_0, \quad j = 0, 1, \dots, 2m-1,$$

因此 $\Psi_{2m} \leq C\Psi_0$.

现在, 注意到

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2m,p}(B_3 \setminus B_2)}^p &= \sum_{j=0}^{2m} \|\nabla^j u\|_{p; B_3 \setminus B_2}^p \leq 2^{2mp} \sum_{j=0}^{2m} (1-1/2)^{pj} \|\nabla^j u\|_{p; A_{1/2}}^p \\ &\leq C(m, p) \sum_{j=0}^m \Psi_j^p \leq C(m, p, \varepsilon) \Psi_0 = C(m, p, \varepsilon) \|u\|_{p; B_4 \setminus B_1}. \end{aligned}$$

两边同时开 p 次方可得结论. □

12.5.2 逼近多调和映照的三圈引理

下面, 我们将利用上述 L^p 估计得到逼近多调和映照的三圈引理.

引理 12.7 存在常数 $\eta_0 > 0$ 使得下面的结论成立. 对引理 10.7 中给出的 L , 假设 u 是定义在 $P_i := A_{i-1} \cup A_i \cup A_{i+1}$ ($i \in \mathbb{N}$ 任意) 上的 η ($\eta < \eta_0$)-逼近 m -多调和函数, 若

$$\int_{\partial B_r} u = 0, \quad r \in [e^{-(i-2)L}, e^{-(i+1)L}],$$

则

- (i) 当 $F_{i+1}(u) \leq e^{-L}F_i(u)$ 时, $F_i(u) \leq e^{-L}F_{i-1}(u)$;
- (ii) 当 $F_{i-1}(u) \leq e^{-L}F_i(u)$ 时, $F_i(u) \leq e^{-L}F_{i+1}(u)$;
- (iii) $F_i(u) \leq e^{-L}F_{i-1}(u)$ 和 $F_i(u) \leq e^{-L}F_{i+1}(u)$ 至少有一个成立.

这里 $F_i(u)$ 的定义如引理 10.7 所示.

这里的证明和调和映照的情形 (参考引理 9.25) 没有本质不同.

证明 首先对多调和函数来证明. 若

$$F_{i+1}(u) \leq e^{-L}F_i(u),$$

则由引理 10.7 得到

$$F_i(u) \leq \frac{e^{-L}}{2} (F_{i+1}(u) + F_{i-1}(u)) \leq \frac{e^{-L}}{2 - e^{-2L}} F_{i-1}(u) \leq e^{-L}F_{i-1}(u).$$

完全类似证明第二种情形.

若

$$F_i(u) > e^{-L}F_{i-1}(u), \quad F_i(u) > e^{-L}F_{i+1}(u),$$

则

$$F_i(u) > \frac{e^{-L}}{2} (F_{i-1}(u) + F_{i+1}(u)),$$

这与引理 10.7 矛盾.

下面用反证法来证明对逼近多调和映照仍然成立. 事实上, 如若不然, 则存在 $\eta_k \rightarrow 0$ 以及 η_k 逼近多调和映照 u_k 使得 (i)-(iii) 之一不成立. 不失一般性, 不妨假设 (iii) 不成立, 则存在 $i_k \in \mathbb{N}$ 使得,

$$F_{i_k}(u_k) > e^{-L}F_{i_k-1}(u_k), \quad F_{i_k}(u_k) > e^{-L}F_{i_k+1}(u_k).$$

注意尽管作为多调和映照, 它本身是有界的, 但是它对应的逼近调和映照却不一定. 由逼近多调和函数的伸缩不变性 (按照定义即得), 不妨假设 $i_k = 2$, 并将 u_k 正则化, 使得 $F_2(u_k) = 1$. 这样, 我们知道 u_k 是定义在 $P_2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 上的 η_0 -逼近多调和映照函数, 即

$$\Delta^m u_k = \sum_{|\alpha|=2m} \left\{ \left(A_{k0}^\alpha u_k + \sum_{i=1}^a A_{ki}^\alpha \nabla^{k_i} u_k \right) - \oint_{\partial B_r} \left(A_{k0}^\alpha u_k + \sum_{i=1}^a A_{ki}^\alpha \nabla^{k_i} u_k \right) \right\},$$

且系数满足

$$|A_{k0}^\alpha| \leq e^{6mL}\eta_k, \quad |A_{ki}^\alpha| \leq e^{6mL}\eta_k.$$

此外, 由反设条件

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{2;P_2}^2 &\leq e^{6mL} (F_2(u_k) + F_3(u_k) + F_1(u_k)) \\ &\leq e^{6mL} (2e^L + 1) F_2(u_k) \\ &\leq e^{6mL} (2e^L + 1) < +\infty. \end{aligned}$$

因此由引理 12.6, 在子列意义下有

$$\begin{aligned} \Delta u_k \rightharpoonup \Delta u \in L^2(A_2), \quad \nabla^i u_k \rightarrow \nabla^i u \in L^2(A_2), \quad \forall i = 0, 1, \dots, 2m-1, \\ u_k \rightharpoonup u \in L^2(P_2). \end{aligned}$$

由此, 以及 u_k 作为 η_k 逼近多调和函数所满足的条件, 我们知道 $u \in W^{2m,2}(A_2)$ 是一个弱多调和函数. 由弱多调和函数的正则性 [10], 我们知道 u 是光滑的. 此外, 易见

$$\int_{S^{2m-1}} u(r, \theta) d\theta = 0, \quad \forall r \in (e^{-2L}, e^{-L}).$$

因此, 由引理 10.7(及其后的注记) 知

$$2F_2(u) < e^{-L} (F_1(u) + F_3(u)).$$

但是由 $u_k \rightarrow u \in L^2(A_2)$ 以及 $u_k \rightharpoonup u \in L^2(P_2)$ 知, 上式和反设条件矛盾. $\square$

12.5.3 逼近多调和函数的构造

由 Ding-Tian 假设, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 充分小, $R > 0$ 充分大, 使得当 i 充分大时

$$\int_{B_{2\rho} \setminus B_\rho} |\nabla^m u_i|^2 + |\nabla u_i|^{2m} < \varepsilon, \quad \forall \rho \in (2\lambda_i R, \delta/2).$$

不失一般性, 我们假设

$$\Sigma := B_\delta \setminus B_{\lambda_i R} = \bigcup_{i=l_0}^{l_i} A_i, \quad A_i = B_{e^{-iL}} \setminus B_{e^{-(i-1)L}}.$$

我们将证明当 Ding-Tian 假设中的 ε 充分小时, $w_i := u_i - f_{\partial B_{|x|}} u_i$ 是一个逼近多调和函数.

引理 12.8 假设 u_i 是定义在 Σ 上的外 m -多调和映照, 则存在 $\varepsilon_1 > 0$ 使得如果 (12.23) 中的 $\varepsilon < \varepsilon_1$, 则对引理 12.7 中的 $\eta_0 > 0$, 则如上定义的 w_i 是 η_0 -逼近多调和函数.

证明 由多调和映照的欧拉-拉格朗日方程

$$\Delta^m u_i = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(u_i) \nabla^{k_1} u_i \# \nabla^{k_2} u_i \# \cdots \# \nabla^{k_a} u_i,$$

其中 $\alpha = (k_1, k_2, \dots, k_a)$, $a \geq 2$, $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_a \geq 0$ 且 $2m = \sum_{i=1}^a k_i$. 从而

$$\begin{aligned} & a_\alpha(u_i) \nabla^{k_1} u_i \# \nabla^{k_2} u_i \# \cdots \# \nabla^{k_a} u_i - a_\alpha(u_i^*) \nabla^{k_1} u_i^* \# \nabla^{k_2} u_i^* \# \cdots \# \nabla^{k_a} u_i^* \\ &= (a_\alpha(u_i) - a_\alpha(u_i^*)) \nabla^{k_1} u_i \# \nabla^{k_2} u_i \# \cdots \# \nabla^{k_a} u_i \\ &+ \sum_{l=1}^a \nabla^{k_1} u_i^* \# \cdots \# \nabla^{k_{l-1}} u_i^* \# \nabla^{k_l} (u_i - u_i^*) \# \nabla^{k_{l+1}} u_i \# \cdots \# \nabla^{k_a} u_i \\ &= A_0^\alpha[u_i](u_i - u_i^*) + \sum_{l=1}^a A_l^\alpha[u_i] \nabla^{k_l} (u_i - u_i^*), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A_0^\alpha[u_i] &= a'_\alpha(v) \nabla^{k_1} u_i \# \nabla^{k_2} u_i \# \cdots \# \nabla^{k_a} u_i, \quad v_i \text{ 介于 } u_i \text{ 与 } u_i^* \text{ 之间} \\ A_l^\alpha[u_i] &= a_\alpha(u_i) \nabla^{k_1} u_i^* \# \cdots \# \nabla^{k_{l-1}} u_i^* \# \nabla^{k_l+1} u_i \# \cdots \# \nabla^{k_a} u_i. \end{aligned} \quad (12.28)$$

因此, $w_i := u_i - u_i^* = u_i - f_{\partial B_{|x|}} u$ 的方程是

$$\begin{aligned} \Delta^m w_i &= \Delta^m w_i - \oint_{\partial B_{|x|}} \Delta^m w_i \\ &= \sum_{|\alpha|=2m} \left(A_0^\alpha[u_i] w_i + \sum_{l=1}^a A_l^\alpha[u_i] \nabla^{k_l} w_i \right) \\ &\quad - \oint_{\partial B_{|x|}} \left(A_0^\alpha[u_i] w_i + \sum_{l=1}^a A_l^\alpha[u_i] \nabla^{k_l} w_i \right). \end{aligned}$$

对任何固定的 $\rho \in (2\lambda_i R, \delta/2)$, 令 $v(x) = u_i(\rho x)$, 则对 v 在 $B_2 \setminus B_{1/2}$ 上应用小能量正则性定理 12.1,

$$\max_{\partial B_\rho} \rho^l |\nabla^l u_i| \leq C \varepsilon^{1/(2m)}, \quad \forall l = 1, 2, \dots$$

故

$$\begin{aligned} |A_0^\alpha[u_i]| &\leq C |x|^{-2m} \varepsilon^{a/(2m)} \leq C \frac{\varepsilon^{1/(2m)}}{|x|^{2m}}, \\ |A_l^\alpha[u_i]| &\leq C |x|^{2m-k_l} \varepsilon^{(a-1)/(2m)} \leq C \frac{\varepsilon^{1/(2m)}}{|x|^{2m-k_l}}, \end{aligned}$$

可见对任意的 $\eta_0 > 0$, 存在 $\varepsilon_1 > 0$, 使得当 $\varepsilon < \varepsilon_1$ 时, 有

$$|A_0^\alpha[u_i]| \leq \frac{\eta_0}{|x|^{2m}}, \quad |A_l^\alpha[u_i]| \leq \frac{\eta_0}{|x|^{2m-k_l}}.$$

这即表明 w_i 是 η_0 -逼近调和函数. □

结合逼近调和函数的三圈引理 (参考 引理 12.7), 我们容易得到如下

推论 12.9 对(12.23)中的 $\varepsilon < \varepsilon_1$, 其中 ε_1 为上述中的常数. w_i 作为 Σ 上的函数, 当 i 充分大时,

$$F_l(w_i) \leq C\varepsilon^{1/m} (e^{-L(l-l_0)} + e^{-L(l_i-l)}),$$

其中 C 是一个不依赖于 i 的常数.

证明 首先, 由 Poincaré 不等式以及(12.24), 我们知道

$$\begin{aligned} F_l(w_i) &= \int_{A_l} \frac{1}{|x|^{2m}} w_i^2 = \int_{e^{-lL}}^{e^{-(l-1)L}} \int_{\partial B_\rho} \rho^{-2m} |u_i - u_i^*|^2 \\ &\leq C \int_{e^{-lL}}^{e^{-(l+1)L}} \rho^{-2m} \int_{\partial B_\rho} \rho^2 |\nabla u_i|^2 \\ &\leq C \int_{e^{-lL}}^{e^{-(l+1)L}} \rho^{-2m} |\partial B_\rho| \varepsilon^{1/m} \\ &\leq C\varepsilon^{1/m}. \end{aligned}$$

特别地,

$$F_{l_0}(w_i) \leq C\varepsilon(1/m), \quad F_{l_i}(w_i) \leq C\varepsilon^{1/m}. \quad (12.29)$$

现在对固定的 $l \in \{l_0, l_0 + 1, \dots, l_i\}$. 注意到当 $\varepsilon < \varepsilon_1$ 时, 引理 12.8 知 W_i 是一个 η_0 逼近调和函数. 进而由引理 12.7(iii) 知

$$F_l(w_i) \leq e^{-L} F_{l+1}(w_i) \text{ 或者 } F_l(w_i) \leq e^{-L} F_{l-1}(w_i).$$

如果是第一种情形, 则我们由引理 12.7(ii) 不断迭代知

$$F_{l'}(w_i) \leq e^{-L} F_{l'+1}(w_i), \quad l' = l, l+1, \dots, l_i-1.$$

从而结合(12.29),

$$F_l(w_i) \leq e^{-(l_i-l)L} F_{l_i}(w_i) \leq C\varepsilon^{1/m} e^{-(l_i-l)L}.$$

可见结论成立. 完全类似的证明第二种情形. □

12.5.4 切向能量衰减的证明

至此, 我们已经准备好切向能量的衰减证明. 在如下引理中, 注意到我们可以估计任意阶导数, 从而结果是 [24, Lemma 4.3] 的一个改进.

引理 12.10 断言 12.5 中的(12.26)对 $\sigma = 1/2$ 成立.

证明 对任何 $\rho = e^t \in [2\lambda_i R, \delta/2]$, 推论 12.9 表明

$$\int_{B_{2\rho}}^{B_{\rho/2}} \frac{w_i^2}{|x|^{2m}} \leq C\varepsilon^{1/m} (e^{-(t-\log \lambda_i R)} + e^{-(\log \delta - t)}).$$

回忆由引理 12.8, w_i 是一个 η_0 -逼近调和函数. 而引理 12.6 表明 w_i 具有 L^p -估计. 因此

$$\max_{k=1, \dots, m(2m-1)} \max_{B_{3\rho/2} \setminus B_{2\rho/3}} |X_k u_i| \leq C\varepsilon^{1/(2m)} \left(e^{-\frac{1}{2}(t-\log(\lambda_i R))} + e^{-\frac{1}{2}(\log \delta - t)} \right).$$

其中 X_k 是第 12.2 节中的 Killing 向量场. 所有的高阶估计可利用引理 12.2 中 (12.21) 给出. $\square$

12.6 径向能量的衰减估计

对固定的 $t_0 \in [\log \lambda_i R, \delta]$ 以及 $t \in [1, \min \{t_0 - \log \lambda_i R, \log \delta - t_0\} - 1]$, 令

$$F(t) = \int_{t_0-t}^{t_0+t} \int_{S^{2m-1}} \sum_{n=1}^m (n-1/2) (-1)^{m-n} a_{2n,0} |\partial_t^n u_i|^2 d\theta dt.$$

将(11.10)在 $(t_0 - t, t_0 + t)$ 上积分得到

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{t_0-t}^{t_0+t} \int_{S^{2m-1}} (-1)^m \Theta - \partial_t \sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-k} (-1)^{m+k+l} a_{2n,0} \partial_t^{k+l-1} u_i \partial_t^{2n-k-l} u_i \\ &\leq \int_{t_0-t}^{t_0+t} \int_{S^{2m-1}} |\Theta| + \sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-k} \int_{S^{2m-1} \times \{t_0-t, t_0+t\}} |a_{2n,0} \partial_t^{k+l-1} u_i \partial_t^{2n-k-l} u_i|. \end{aligned}$$

由于 $\partial_t u_i = \rho \partial_\rho u_i$ 满足其次椭圆方程组(12.22), 而且其系数都是有控制的, 我们得到

$$|\partial_t^{k+l-1} u_i \partial_t^{2n-k-l} u_i|_{S^{2m-1} \times \{t\}} \leq C \|\partial_t u_i\|_{2; S^{2m-1} \times [t-1, t+1]}^2, \quad (12.30)$$

这里 $k+l-1 \geq 1, 2n-k-l \geq 1$. 因此由(12.30)知,

$$\begin{aligned} F(t) &\leq \int_{t_0-t}^{t_0+t} \int_{S^{2m-1}} |\Theta| + C \left(\int_{t_0-t-1}^{t_0-t+1} \int_{S^{2m-1}} + \int_{t_0+t-1}^{t_0+t+1} \int_{S^{2m-1}} \right) |\partial_t u_i|^2 \\ &\leq \int_{t_0-t}^{t_0+t} \int_{S^{2m-1}} |\Theta| + C \left(\int_{t_0-t-1}^{t_0+t+1} \int_{S^{2m-1}} - \int_{t_0-t+1}^{t_0+t-1} \int_{S^{2m-1}} \right) |\partial_t u_i|^2 \quad (12.31) \\ &\leq \int_{t_0-t}^{t_0+t} \int_{S^{2m-1}} |\Theta| + C (F(t+1) - F(t-1)). \end{aligned}$$

这就是我们说的关于径向能量的差分不等式. 我们将看到(12.31) 可导出 $F(t)$ 的指数衰减, 只要 $(t_0 - t, t_0 + t) \subset (\log(\lambda_i R), \log \delta)$.

引理 12.11 令 $t_0, F(t)$ 如上, 则我们有

$$F(1) \leq C\varepsilon^{1/m} \left(e^{-\tilde{\sigma}(\log \delta - t_0)} + e^{-\tilde{\sigma}(t_0 - \log \lambda_i R)} \right), \quad (12.32)$$

其中 $C, \tilde{\sigma}$ 是两个不依赖于 u_i 与 ε (参考 (12.23)) 的常数.

证明 为了简单起见, 我们不妨设 $\min \{ \log \delta - t_0, t_0 - \log \lambda_i R \}$ 是一个整数, 并将其记为 n_0 . 令 $F_n := F(n), n = 0, 1, \dots, n_0$ 以及

$$\Theta_n := \frac{1}{C} \int_{t_0-n}^{t_0+n} \int_{S^{2m-1}} |\Theta|,$$

则(12.31)变成

$$F_n \leq C(\Theta_n + F_{n+1} - F_{n-1}).$$

注意到, 由(12.16)知,

$$\nabla_{S^{2m-1}} u_i = \rho \nabla_{\partial B_\rho} u_i = \sum_{k=1}^{m(2m-1)} (X_k u_i) \frac{Y_k}{\rho}.$$

以及对任何函数 w , 有

$$|\partial_t^p \nabla_{S^{2m-1}}^q w| \leq C \max_{l=1, \dots, p+q} |\rho^l \nabla^l w|.$$

因此, 由(12.26)以及(12.17)知

$$|\Theta| \leq C(\sigma, m) \varepsilon^{1/m} \left(e^{-\sigma(\log \delta - t)} + e^{-\sigma(t - \log \lambda_i R)} \right), \quad (12.33)$$

这里 σ 为(12.26)中的常数, 而 $l \in \mathbb{N}$ 是任意的.

将(12.33)在 $(t_0 - n, t_0 + n)$ 上积分, 我们得到

$$\Theta_n \leq C\varepsilon^{1/m} e^{\sigma n} \left(e^{-\sigma(\log \delta - t_0)} + e^{-\sigma(t_0 - \log \lambda_i R)} \right). \quad (12.34)$$

为了导出 F_n 所满足的差分不等式, 我们首先注意到以下一般事实. 假设 $\{F_n\}, \{\Theta_n\}$ 满足

$$F_{n+1} - (\lambda_1 + \lambda_2)F_n + \lambda_1 \lambda_2 F_{n-1} + \Theta_n \geq 0, \quad F_0 = 0 = \Theta_0, \quad \forall n \geq 0,$$

则我们有

$$F_{n+1} \geq F_1 \sum_{l=0}^n \lambda_1^{n-l} \lambda_2^l - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l \Theta_k \lambda_1^{n-l} \lambda_2^{l-k}. \quad (12.35)$$

事实上, 如果我们令 $Q_n = F_n - \lambda_1 F_{n-1}, n \geq 1$, 则 $Q_{n+1} - \lambda_2 Q_n \geq -\Theta_n$ 且

$$\sum_{k=2}^{n+1} (Q_k - \lambda_2 Q_{k-1}) \lambda_2^{n-k+1} \geq \sum_{k=2}^{n+1} -\Theta_{k-1} \lambda_2^{n-k+1},$$

这表明

$$Q_{n+1} \geq \lambda_2^n Q_1 - \sum_{k=1}^n \Theta_k \lambda_2^{n-k}.$$

完全类似地, 令 $-\tilde{\Theta}_n = \lambda_2^n Q_1 - \sum_{k=1}^n \Theta_k \lambda_2^{n-k}$, 则 $F_{n+1} - \lambda_1 F_n = Q_{n+1} \geq -\tilde{\Theta}_n$, 而且

$$\begin{aligned} F_{n+1} &\geq \lambda_1^n F_1 - \sum_{l=1}^n \Theta_l \lambda_1^{n-l} = \lambda_1^n F_1 + \sum_{l=1}^n \left(\lambda_2^l Q_1 - \sum_{k=1}^l \Theta_k \lambda_2^{l-k} \right) \lambda_1^{n-l} \\ &= F_1 \sum_{l=0}^n \lambda_1^{n-l} \lambda_2^l - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l \Theta_k \lambda_1^{n-l} \lambda_2^{l-k}, \end{aligned}$$

其中, 我们利用了 $F_0 = 0$, 从而 $Q_1 = F_1$.

回到我们的情形, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1/C$, $\lambda_1 \lambda_2 = -1$. 且不失一般性, 假设 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. 由归纳法, 容易证明如下的不等式,

$$\sum_{l=0}^n \lambda_1^{n-l} \lambda_2^l = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \geq e^{\frac{n+1}{3C} - C} \quad (12.36)$$

以及

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l \Theta_k \lambda_1^{n-l} \lambda_2^{l-k} &= \sum_{k=1}^n \Theta_k \lambda_1^n \lambda_2^{-k} \sum_{l=k}^n (\lambda_2/\lambda_1)^l \\ &= \sum_{k=1}^n \Theta_k \frac{\lambda_1^{n+1-k} - \lambda_2^{n+1-k}}{\lambda_1 - \lambda_2} \leq \sum_{k=1}^n \Theta_k e^{\frac{n+1-k}{2C}}. \end{aligned} \quad (12.37)$$

事实上, 对 $n = 1$, 我们注意到对充分大的 C , 成立

$$\frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{C} \geq e^{\frac{2}{3C} - C}.$$

假设不等式(12.36)对 $n-1$ 成立, 则对 n ,

$$\frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \geq \frac{\lambda_1 \lambda_1^n - \lambda_1^{-1} \lambda_1^{-n}}{\lambda_1 - \lambda_2} \geq \lambda_1 \frac{\lambda_1^n - \lambda_1^{-n}}{\lambda_1 - \lambda_2} \geq e^{\log \lambda_1 - \frac{1}{3C} + \frac{n+1}{3C} - C} \geq e^{\frac{n+1}{3C} - C},$$

这是因为对充分大的 C , $\log \lambda_1 - \frac{1}{3C} \geq \log(1 + \frac{1}{2C}) - \frac{1}{3C} \geq 0$.

为了证明(12.37)对所有的 $n \geq 1$ 成立, 首先注意到

$$\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \leq \frac{\lambda_1^n + \lambda_1^{-n}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

对 $n = 1$,

$$\frac{\lambda_1^n + \lambda_1^{-n}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{C \sqrt{4 + \frac{1}{C^2}}} \leq 1 \leq e^{\frac{1}{2C}}.$$

假设

$$\frac{\lambda_1^n + \lambda_1^{-n}}{\lambda_1 - \lambda_2} \leq e^{\frac{n}{2C}},$$

则对 $n+1$,

$$\frac{\lambda_1^{n+1} + \lambda_1^{-(n+1)}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1 \lambda_1^n + \lambda_1^{-1} \lambda_1^{-n}}{\lambda_1 - \lambda_2} \leq \lambda_1 \frac{\lambda_1^n + \lambda_1^{-n}}{\lambda_1 - \lambda_2} \leq e^{\log \lambda_1 - \frac{1}{2C} + \frac{n+1}{2C}} \leq e^{\frac{n+1}{2C}},$$

这是因为

$$\log \lambda_1 - \frac{1}{2C} = \log \left(\frac{1}{2C} + \sqrt{1 + \frac{1}{4C^2}} \right) - \frac{1}{2C} \sim -\frac{1}{48C^3} + o(C^{-4}),$$

由此可知 $\log \lambda_1 - 1/(2C) \leq 0$ 对充分大的 C 成立.

(12.35), (12.36) 以及(12.37) 表明

$$F_1 \leq e^{C - \frac{n+1}{3C}} F_{n+1} + \sum_{k=1}^n \Theta_k e^{C + \frac{n+1}{6C} - \frac{k}{2C}}. \quad (12.38)$$

而由(12.24), 我们知道对任意的 $l \in \mathbb{N}$,

$$\max_{S^{2m-1}} |\partial_t^l u| \leq \max_{\partial B_\rho} \rho^l |\nabla^l u| \leq C \varepsilon^{1/m}, \quad \forall t \in (\log \lambda_i R, \log \delta).$$

因此, 将(11.10)在 $[t_0 - n, t_0 + n]$ 积分, 得到

$$F_{n+1} \leq C \varepsilon^{1/m}. \quad (12.39)$$

利用(12.34)和(12.39), 由(12.38)知,

$$\begin{aligned} F_1 &\leq C \varepsilon^{1/m} e^{-\frac{n}{3C}} + C \varepsilon^{1/m} \left(e^{-\sigma(\log \delta - t_0)} + e^{-\sigma(t_0 - \log(\lambda R))} \right) e^{(\sigma - \frac{1}{3C})n} \\ &\leq C \varepsilon^{1/m} e^{-\frac{n}{3C}} \leq C \varepsilon^{1/m} \left(e^{-\frac{\log \delta - t_0}{3C}} + e^{-\frac{t_0 - \log(\lambda R)}{3C}} \right), \end{aligned}$$

这正是(12.32). □

参考文献

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier, *Sobolev spaces*, Second, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), vol. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003. MR2424078 ↑101, 125, 128, 129
- [2] G. Angelsberg and D. Pumberger, *A regularity result for polyharmonic maps with higher integrability*, Ann. Global Anal. Geom. **35** (2009), no. 1, 63–81. MR2480664 ↑75, 126
- [3] K. Atkinson and W. Han, *Spherical harmonics and approximations on the unit sphere: an introduction*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2044, Springer, Heidelberg, 2012. MR2934227 ↑109
- [4] K.-C. Chang, *Heat flow and boundary value problem for harmonic maps*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **6** (1989), no. 5, 363–395. MR1030856 (90i:58037) ↑4, 45
- [5] S.-Y. A. Chang, L. Wang, and P. C. Yang, *A regularity theory of biharmonic maps*, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), no. 9, 1113–1137. MR1692148 ↑75
- [6] J. Chen and Y. Li, *Homotopy classes of harmonic maps of the stratified 2-spheres and applications to geometric flows*, Adv. Math. **263** (2014), 357–388. MR3239142 ↑79, 83, 85, 87
- [7] W. Ding and G. Tian, *Energy identity for a class of approximate harmonic maps from surfaces*, Comm. Anal. Geom. **3** (1995), no. 3-4, 543–554. MR1371209 (97e:58055) ↑75, 76, 79, 97
- [8] J. Eells Jr. and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160. MR0164306 (29 #1603) ↑39
- [9] S. Fröhlich and F. Müller, *On the existence of normal Coulomb frames for two-dimensional immersions with higher codimension*, Analysis (Munich) **31** (2011), no. 3, 221–236. MR2822307 ↑4, 6, 69
- [10] A. Gastel and C. Scheven, *Regularity of polyharmonic maps in the critical dimension*, Comm. Anal. Geom. **17** (2009), no. 2, 185–226. MR2520907 ↑75, 140
- [11] P. Goldstein, P. Strzelecki, and A. Zatorska-Goldstein, *On polyharmonic maps into spheres in the critical dimension*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26** (2009), no. 4, 1387–1405. MR2542730 ↑75
- [12] R. S. Hamilton, *Harmonic maps of manifolds with boundary*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 471, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. MR0482822 (58 #2872) ↑33, 39
- [13] F. Hélein, *Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** (1991), no. 8, 591–596. MR1101039 ↑75
- [14] ———, *Regularity of weakly harmonic maps from a surface into a manifold with symmetries*, Manuscripta Math. **70** (1991), no. 2, 203–218. MR1085633 ↑132
- [15] F. Hélein, *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, Second, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 150, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Translated from the 1996 French original, With a foreword by James Eells. MR1913803 (2003g:58024) ↑3
- [16] P. Hornung and R. Moser, *Energy identity for intrinsically biharmonic maps in four dimensions*, Anal. PDE **5** (2012), no. 1, 61–80. MR2957551 ↑76
- [17] J. Jost, *Two-dimensional geometric variational problems*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1991. A Wiley-Interscience Publication. MR1100926 ↑76
- [18] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Sixth, Universitext, Springer, Heidelberg, 2011. MR2829653 ↑57
- [19] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, Publications of the Mathematical Society of Japan, vol. 15, Princeton University Press, Princeton, NJ; Iwanami Shoten, Tokyo, 1987. Kano Memorial Lectures, 5. MR909698 (89e:53100) ↑33
- [20] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication. MR1393940 (97c:53001a) ↑14
- [21] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968. MR0241822 (39 #3159b) ↑4

- [22] P. Laurain and T. Rivière, *Energy quantization for biharmonic maps*, Adv. Calc. Var. **6** (2013), no. 2, 191–216. MR3043576 ↑76
- [23] L. Lei, *Blow-up analysis and its geometric applications*, Ph.D. Thesis, 2014. ↑96
- [24] L. Lei and Y. Hao, *Neck analysis for biharmonic maps*, Math. Z. **283** (2016), no. 3–4, 807–834. MR3519983 ↑76, 77, 108, 136, 142
- [25] Y. Li and Y. Wang, *Bubbling location for F -harmonic maps and inhomogeneous Landau-Lifshitz equations*, Comment. Math. Helv. **81** (2006), no. 2, 433–448. MR225633 (2008f:35390) ↑51
- [26] ———, *A weak energy identity and the length of necks for a sequence of Sacks-Uhlenbeck α -harmonic maps*, Adv. Math. **225** (2010), no. 3, 1134–1184. MR2673727 ↑79, 87
- [27] G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996. MR1465184 (98k:35003) ↑38
- [28] F. Lin and C. Wang, *Energy identity of harmonic map flows from surfaces at finite singular time*, Calc. Var. Partial Differential Equations **6** (1998), no. 4, 369–380. MR1624304 ↑77
- [29] L. Ma, *Harmonic map heat flow with free boundary*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), no. 2, 279–301. MR1107842 ↑4, 5
- [30] Y. Meyer and T. Rivière, *A partial regularity result for a class of stationary Yang-Mills fields in high dimension*, Rev. Mat. Iberoamericana **19** (2003), no. 1, 195–219. MR1993420 ↑4
- [31] P. W. Michor, *Topics in differential geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 93, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, available at <http://goo.gl/sbCBtN>, access date: 2017 年 1 月 5 日. MR2428390 ↑14, 15, 20, 21, 23, 25, 26
- [32] R. Moser, *Regularity of minimizing extrinsic polyharmonic maps in the critical dimension*, Manuscripta Math. **131** (2010), no. 3–4, 475–485. MR2592091 ↑75
- [33] F. Müller and A. Schikorra, *Boundary regularity via Uhlenbeck-Rivière decomposition*, Analysis (Munich) **29** (2009), no. 2, 199–220. MR2554638 ↑4
- [34] L. I. Nicolaescu, *Lectures on the geometry of manifolds*, Second, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007. MR2363924 (2008g:53001) ↑29
- [35] L. Nirenberg, *An extended interpolation inequality*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **20** (1966), 733–737. MR0208360 (34 #8170) ↑50
- [36] Parallel transport, *Encyclopedia of mathematics*, https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Parallel_transport. Accessdate: 2015-11-03. ↑19
- [37] T. H. Parker, *Bubble tree convergence for harmonic maps*, J. Differential Geom. **44** (1996), no. 3, 595–633. MR1431008 ↑75, 76, 88, 91, 92, 93, 95, 96
- [38] J. Qing, *On singularities of the heat flow for harmonic maps from surfaces into spheres*, Comm. Anal. Geom. **3** (1995), no. 1–2, 297–315. MR1362654 (97c:58154) ↑53, 76
- [39] ———, *A remark on the finite time singularity of the heat flow for harmonic maps*, Calc. Var. Partial Differential Equations **17** (2003), no. 4, 393–403. MR1993961 (2004g:53071) ↑5, 59
- [40] J. Qing and G. Tian, *Bubbling of the heat flows for harmonic maps from surfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), no. 4, 295–310. MR1438148 ↑76, 98
- [41] T. Rivière, *Conservation laws for conformally invariant variational problems*, Invent. Math. **168** (2007), no. 1, 1–22. MR2285745 (2008d:58010) ↑4, 6, 69
- [42] T. Rivière and M. Struwe, *Partial regularity for harmonic maps and related problems*, Comm. Pure Appl. Math. **61** (2008), no. 4, 451–463. MR2383929 ↑4
- [43] J. Sacks and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. of Math. (2) **113** (1981), no. 1, 1–24. MR604040 (82f:58035) ↑45, 51, 57, 76, 79, 80, 88
- [44] A. Schikorra, *A remark on gauge transformations and the moving frame method*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **27** (2010), no. 2, 503–515. MR2595189 (2011d:58039) ↑4, 6
- [45] R. Schoen and K. Uhlenbeck, *A regularity theory for harmonic maps*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 2, 307–335. MR664498 ↑5, 59
- [46] R. M. Schoen, *Analytic aspects of the harmonic map problem*, Seminar on nonlinear partial differential equations (Berkeley, Calif., 1983), 1984, pp. 321–358. MR765241 (86b:58032) ↑45

- [47] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II*, Second, Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979. MR532831 (82g:53003b) ↑19, 20
- [48] S. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, Second, Chelsea Publishing Co., New York, 1983. With an appendix by Sternberg and Victor W. Guillemin. MR891190 (88f:58001) ↑11
- [49] M. Struwe, *On the evolution of harmonic mappings of Riemannian surfaces*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), no. 4, 558–581. MR826871 (87e:58056) ↑4, 5, 6, 45, 59
- [50] P. Strzelecki, *On biharmonic maps and their generalizations*, Calc. Var. Partial Differential Equations **18** (2003), no. 4, 401–432. MR2020368 ↑75
- [51] T. Tao and G. Tian, *A singularity removal theorem for Yang-Mills fields in higher dimensions*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), no. 3, 557–593. MR2053951 ↑4
- [52] P. Topping, *Winding behaviour of finite-time singularities of the harmonic map heat flow*, Math. Z. **247** (2004), no. 2, 279–302. MR2064053 ↑5
- [53] K. K. Uhlenbeck, *Connections with L^p bounds on curvature*, Comm. Math. Phys. **83** (1982), no. 1, 31–42. MR648356 (83e:53035) ↑3, 4
- [54] C. Wang, *Bubble phenomena of certain Palais-Smale sequences from surfaces to general targets*, Houston J. Math. **22** (1996), no. 3, 559–590. MR1417632 ↑76
- [55] ———, *Biharmonic maps from $\mathbf{R}^4$ into a Riemannian manifold*, Math. Z. **247** (2004), no. 1, 65–87. MR2054520 ↑3, 75
- [56] ———, *Remarks on biharmonic maps into spheres*, Calc. Var. Partial Differential Equations **21** (2004), no. 3, 221–242. MR2094320 ↑76
- [57] ———, *Stationary biharmonic maps from $\mathbb{R}^m$ into a Riemannian manifold*, Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), no. 4, 419–444. MR2026177 ↑3
- [58] C. Wang and S. Zheng, *Energy identity of approximate biharmonic maps to Riemannian manifolds and its application*, J. Funct. Anal. **263** (2012), no. 4, 960–987. MR2927401 ↑76
- [59] ———, *Energy identity for a class of approximate biharmonic maps into sphere in dimension four*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013), no. 2, 861–878. MR2975138 ↑76
- [60] K. Wehrheim, *Uhlenbeck compactness*, EMS Series of Lectures in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2004. MR2030823 (2004m:53045) ↑33, 38

致 谢

经过四年多的博士阶段学习,时至今日我终于完成了自己的博士毕业论文.一路跌跌撞撞的走来,颇多感触却难以言说.在此,请允许我表达对老师和同学们的感激之情.

我诚挚的感谢我的导师李嘉禹教授与殷浩副教授.李老师鼓励我报考中科大,并招收我为他的博士生.在四年多的学习过程中,李老师和殷老师他们对我都非常关心,从论文选题到项目的具体细节,从修改定稿到投稿杂志的选择,从研究到生活.他们都付出了大量的时间与精力.这篇博士论文的完成,离不开他们的关心与鼓励.在我学习过程中,殷老师耐心的解答我的疑惑.并帮助我克服一个又一个数学研究上的难点.我的每一个进步都离不开他们的帮助.在研究生学习过程中,我还参加了麻希南老师和张希老师组织的讨论班.麻老师对数学的热情以及对学生的关心我都感受深刻,他几乎每次碰面都问下我学习的近况并给予鼓励.张老师一直鼓励我学习完全非线性分析的基本技巧,并对我论文提出诸多修改意见.他们还资助我参加国内国际几何分析的相关会议,这不仅开拓了我的视野,而且指明了我未来学习的方向.与参会老师和同学的交流是我提高了研究的兴趣,坚定了研究的信念与意义.

此外,我还要感谢孔胜利老师、赵立丰老师、许小卫老师、王作勤老师、左达峰老师、科研秘书黄稚新老师、教学秘书张伟老师以及学院的各位秘书.孔老师曾经讲过 Ricci 流基础.他讲课思路清晰,条理清楚,板书简洁而优美.王国芳老师来科大讲课期间对我的论文提出了中肯的修改意见.我的硕士生导师周家足教授对我博士阶段的学习非常关心,而且时常鼓励我坚持学习下去.各位老师对我都非常关心.特别是生活上,他们都给予我很多的帮助.

感谢杨柳青师姐、刘磊师兄以及曾春娜师姐、徐文学师兄在学习和生活上给予我的帮助.感谢龚华均博士后、孙林林博士后在学习上的交流.感谢同组的师兄姐妹:刘佳伟、谢如龙、聂艳赐、张川静、金希深、孙志强、孙锐然、朱超娜、桂耀挺、黄鹏飞、陈优民,与他们一起上讨论班是件非常愉快的事情以及研究生同学:徐金菊、邱国寰、朱静勇、方益、韦韡、张德凯、沈大伟、林秉文、杨金榜、李焕焕、汪任、焦鹏杰、孙淘牛和大学同学曾涛玲博士、温欣博士、宋林亮博士、谢逊博士与博士研究生陈嵩箐,他们陪我度过了难忘的博士时光,听我唠叨且不断激励我前进.

最后,感谢我父母及家人的艰辛付出与支持以及我可爱的、爱鼓励人的、支

持的、耐心的女朋友汪娟,我非常感谢她在我完成博士论文的最后阶段忠实的支持.

最后的最后,我借梁漱溟先生朝话中关于发心与立志的一段话来勉励之:

我们都是力量不够的人,要去可怜旁人,先须可怜自己. 如何可怜自己? 就是须培养开发自己的愿力 (发心与立志都是愿力). 怎样开发? 要在当初动念研究几何分析这个方向的地方去找,去反问自己为何有此意思? 而此意思为何又在彼时真切? 这样能将原来的真情真愿因反求而开大. 当同样恻隐之情发露时而更深厚之,才有真精神,才有真事业. 我们只有努力自勉,才能完成我们伟大的使命.

艾万君

2017 年 1 月 5 日

于 ● 管理科研楼 1223 室

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

- [1] Wanjun Ai, *The flow of gauge transformations on Riemannian surface with boundary*, submit.
- [2] Wanjun Ai and Hao Yin, *Neck analysis of extrinsic polyharmonic maps*, submit.

索引

- Bianchi 恒等式, 23
- bubble, 57, 93
 - ghost, 83
 - 内部, 55
 - 本质相同, 84
 - 树状结构, 94
 - 根, 83
 - 正上方, 86
 - 调和映照, 83
 - 边界, 55
- Dirac 测度, 88
 - 质量, 88
- Hodge 星算子, 26
- neck 分析
 - 能量等式, 76
 - 能量量子化, 76
- neck 分析 no neck 性质, 76
- neck 分析, 76
- Neck 映照, 95
- Pohozaev
 - 恒等式, 98
 - 相对, 121
- 丛
 - G -丛, 12
 - G -坐标图册, 12
 - 转移函数, 12
 - G -丛结构, 12
 - G -主丛, 13
 - 全空间, 14
 - 底空间, 14
 - 投影映射, 14
 - 结构群, 14
 - G -向量丛, 12
 - 主丛, 14
 - 转移函数, 14
 - 向量丛, 12
 - 自同态丛, 16
 - 自同构丛, 16
 - 垂直切丛, 17
 - 局部平凡化
 - 等变性, 12
 - 指数映照, 26
 - 水平切丛, 18
 - 水平子丛, 18
 - 纤维丛, 10
 - 坐标图册, 10
 - 转移函数, 10
 - 纵空间, 14
 - 规范变换丛, 16
 - 配丛, 13, 15
- 作用
 - 主右作用, 13, 15, 20
 - 共轭作用, 16
 - 可迁地, 10
 - 右作用, 9
 - 左作用, 9
 - 有效地, 10
 - 自由地, 10
- 共变外微分, 23
 - 形式伴随, 26
- 共变微分
 - 导性, 25

函数空间

 $C^{k,\alpha}(E)$ -Hölder 空间, 29 $W^{k,p}$ -Sobolev 空间, 28, 32

分布

水平分布, 18

分次代数导数, 23

向量

水平提升向量, 18

向量丛

 G -向量丛, 15

共变外微分, 25

共变微分, 24

度量

整体内积, 26

向量场

基本向量场, 20

水平向量场, 18

多调和

三圈性质, 77

外 m -多调和能量, 75

外多调和映照, 75

多调和函数

逼近多调和函数, 137

多重指标, 126

模长, 126

长度, 126

奇异时刻, 53

奇点, 53

奇点可去, 51

左 Maurer-Cartan 形式, 22

平行移动, 19

主平行移动, 21

广义解, 5

抛物距离, 32

映照

 σ -逼近, 5

Bubble 映照, 95

Neck 映照, 95

基映照, 94, 95

淹没, 14

锥延拓, 94, 95

曲线

提升曲线, 18

水平提升曲线, 18

水平曲线, 18

标架丛, 16

正则性

小能量

抛物, 45

椭圆, 54

正则点, 53

法部消失性质, 39

爆破

缩放因子, 90

重心, 90

爆破序列, 83

严格偏序, 84

在... 上面, 84

本质不同, 83

本质相同, 83

爆破点, 88

联络

 G 等变, 20

主联络, 20, 21

度量相容, 26

曲率, 17

李代数值的联络 1-形式, 20

线性联络, 24

- 联络 1-形式, [17](#)
- 能量
 - 切向分量, [133](#)
 - 法向分量, [133](#)
- 能量不等式, [5](#)
 - 局部, [43](#)
 - 逆向, [43](#)
- 能量集中点, [53](#)
- 自反的, [28](#), [32](#)
- 自相关
 - R_a 自相关, [20](#)
- 规范变换, [16](#)
- 规范变换群, [16](#)
- 调和映照
 - η -逼近调和映照, [99](#)
- 重整化常数, [90](#)
- 零阶相容性, [4](#)