微积分授课讲义

艾万君

上海交通大学 • 数学科学学院

2018 年 11 月

授课教师基本信息

学院	数学科学学院
姓名	艾万君
联系方式	aiwanjun@sjtu.edu.cn
授课学期	秋
办公室	数学楼 1201
上课时间	每周二/四 18:00-20:20
上课地点	中院 213
课后时间	每周五下午 14:00-17:00

概要

- 级数的基本概念和性质
  - 级数及其收敛性的定义
  - 级数收敛性的 ϵ-δ 刻画
  - 数项级数的基本性质
- 正项级数及其敛散性判别法
  - 正项级数的定义
  - 正项级数的收敛原理
  - p 级数的敛散性
  - 比较判别法
  - p 判别法
  - 比值判别法
  - 根值判别法

概要续

  - 积分判别法

- 一般级数的敛散性判别法
  - 交错级数的定义
  - Leibniz 判别法
  - 绝对收敛与条件收敛

- 函数项级数及其敛散性

- 幂级数
  - Abel 定理及其推论
  - 幂级数的收敛半径公式
  - 幂级数的分析性质
  - Taylor 级数

    常见初等函数的 Taylor 展开

概要续

- 函数幂级数展开的应用

- Fourier 级数
  - 三角级数与 Fourier 级数的定义
  - 正弦级数与余弦级数
  - 周期为 2l 的 Fourier 级数

- 课后习题

级数的定义

事实上, 我们已经接触过数项级数, 例如

$$1, 2, , 3, \ldots, \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \qquad 1, \frac{1}{2^2}, , \frac{1}{3^2}, \ldots$$

级数的定义续

定义 1.1. 给定数列 $\{a_n\}$, 我们称和式

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, 为无穷级数. 而称有限和

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项部分和.

称 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的余项级数.

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$(存在), 则称 S 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和, 这时我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的, 否则称级数是发散的.

级数收敛性的 ϵ-δ 语言刻画

按照级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛到 S 的定义, 我们给出如下的 ϵ-δ 语言刻画.

命题 1.2. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛到 S, 即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

则对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $N = N(\epsilon) > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 都有

$$|S - S_n| < \epsilon.$$

常见级数的敛散性判断

例子 1. 判断下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}(aq \neq 0)$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

数项级数的基本性质

利用极限的基本性质, 我们立即得到收敛级数的线性性:

定理 1.3. 假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛到 S, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛到 T, 则对任意的常数 a, b, 我们有级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (aa_n + bb_n) = a\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b\sum_{n=1}^{\infty} b_n = aS + bT.$$

数项级数的基本性质续

按照级数收敛的定义 (参考 ϵ-δ 刻画), 级数的有限和极限存在与否与前有限项的值无关 (但极限值是相关的); 从而增加、删除或者改变有限项并不改变原级数的敛散性.

定理 1.4. 将级数增加、删除、改变有限项并不改变原级数的敛散性.

数项级数的基本性质续

由于数列收敛必有其子列也收敛, 故我们得到

定理 1.5. 假设级数 $\sum_{n=1}^{n} a_n$ 收敛到 S, 则通过将其相邻的若干项加括号所形成的新的级数也收敛, 且其和仍为 S.

注记. 上述定理反过来结论不成立: 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

通过添加括号可写成 $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 但级数本身不收敛.

数项级数的基本性质续

定理 1.6 (级数收敛的必要条件). 假设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则必有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

事实上, 按照级数收敛的定义, 我们有

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

利用必要条件判断级数发散

例子 2 (p. 242: 例 11.5–11.6). 判断下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

利用必要条件判断级数发散

例子 2 (p. 242: 例 11.5–11.6). 判断下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

例子 3 (p. 286: 3(3), (6)). 判断下列级数的敛散性, 并求出收敛时级数的和:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

正项级数的定义

定义 2.1. 我们称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 如果其通项 a_n 都满足 $a_n \geq 0(n \in \mathbb{Z}^+)$.

正项级数的定义

定义 2.1. 我们称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 如果其通项 a_n 都满足 $a_n \geq 0 (n \in \mathbb{Z}^+)$.

例如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

是正项级数, 而

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

不是正项级数 (其实它被称为交错级数).

正项级数的收敛原理

由于正项级数的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 是单调增加的数列, 根据单调有界原理, 我们知道

定理 2.2 (收敛原理). 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是其部分和序列 $\{S_n\}$ 有上界.

证明. 充分性是单调有界原理的直接推论. 必要性是由于收敛序列必是有界序列.

正项级数的收敛原理

由于正项级数的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 是单调增加的数列, 根据单调有界原理, 我们知道

定理 2.2 (收敛原理). 正项级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛的充要条件是其部分和序列 $\{S_n\}$ 有上界.

证明. 充分性是单调有界原理的直接推论. 必要性是由于收敛序列必是有界序列.

进一步地, 由于改变级数的有限项不改变级数的敛散性, 故我们得到更一般的收敛原理:

推论 2.3 (广义收敛原理). 假设级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 满足除有限项外都有 $a_n \geq 0$, 那么级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛当且仅当其部分和序列 $\{S_n\}$ 有上界.

p 级数的敛散性

例子 4 (p. 243: 例 11.7). 讨论 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

证明. 注意到

$$\frac{1}{k^p} \begin{cases} < \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p} dx, & p > 1 \\ \geq \dfrac{1}{k} > \displaystyle\int_{k}^{k+1} \frac{1}{x} dx, & p \leq 1. \end{cases}$$

p 级数的敛散性续

因此, 部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\begin{cases}<1+\displaystyle\int_1^n\frac{1}{x^p}dx=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right), & p>1,\\ >\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)\to+\infty, & p\le 1.\end{cases}$$

利用收敛原理知, 当 $p>1$ 时, p 级数收敛; 而当 $p\le 1$ 时, p 级数发散.
这个结论非常重要, 是我们后面应用其他判别法判断正项级数敛散性的基础.

正项级数的比较判别法

比较判别法的基本想法是利用已知级数的敛散性来判断给定级数的敛散性. 其基本原理是: 极限的保号性.

定理 2.4 (比较判别法). 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是正项级数 (除有限项外), 且 (除有限项外) 都满足 $a_n \leq b_n$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. 逆否命题: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

利用比较判别法判断级数收敛性

例子 5. 利用比较判别法判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ 的敛散性.

利用比较判别法判断级数收敛性

例子 5. 利用比较判别法判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ 的敛散性.

提示: 直接和等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 比较.

利用比较判别法判断级数收敛性

例子 5. 利用比较判别法判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ 的敛散性.

提示: 直接和等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 比较.

例子 6 (p. 286: 5(1), (3)). 利用比较判别法判断下列级数的敛散性:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$;

利用比较判别法判断级数收敛性

例子 5. 利用比较判别法判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ 的敛散性.

提示: 直接和等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 比较.

例子 6 (p. 286: 5(1), (3)). 利用比较判别法判断下列级数的敛散性:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$; $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$;

利用比较判别法判断级数收敛性

例子 5. 利用比较判别法判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ 的敛散性.

提示: 直接和等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 比较.

例子 6 (p. 286: 5(1), (3)). 利用比较判别法判断下列级数的敛散性:

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$; $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

利用比较判别法判断级数收敛性

例子 5. 利用比较判别法判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ 的敛散性.

提示: 直接和等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 比较.

例子 6 (p. 286: 5(1), (3)). 利用比较判别法判断下列级数的敛散性:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$; $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$; $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

直接利用比较判别法, 较难找到比较级数来判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3-n+1}}$ 的敛散性. 但我们可用下面的极限形式来判断.

比较判别法的极限形式

我们可将比较判别法推广成如下更一般的形式.

定理 2.5 (比较判别法的极限形式). 假设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $b_n > 0 (n \in \mathbb{Z}^+)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$. 那么

- 当 $0 < l < +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 具有相同的敛散性;
- 当 $l = 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛蕴含级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
- 当 $l = +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散蕴含级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

比较判别法的极限形式续

证明. 我们只证明第一条, 其他可类似证明. 由于级数的敛散性与有限项的值无关, 由 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$, 不妨假设对所有的 n 都成立

$$\frac{l}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3l}{2} \Longrightarrow \frac{l}{2}b_n<a_n<\frac{3l}{2}b_n.$$

因此, 有限和

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{l}{2}b_k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}\frac{3l}{2}b_k.$$

由此并利用正项级数的收敛原理可知, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛当且仅当部分和 $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 有上界, 这又当且仅当部分和 $\sum_{k=1}^{n}b_k$ 有上界, 即当且仅当正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. $\square$

利用比较判别法的极限形式判断级数的敛散性

例子 7 (p. 286: 5(6)). 判断下列级数的敛散性:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^2\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$;

利用比较判别法的极限形式判断级数的敛散性

例子 7 (p. 286: 5(6)). 判断下列级数的敛散性:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^2\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$;

证明. 注意到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \implies \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)}{\frac{1}{n^2}}=1.$$

因此原级数收敛.

p-判别法

特别地, 利用 p 级数的敛散性, 我们得到如下的 p-判别法:

推论 2.6. p-判别法 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数. 如果 $\sum_{n\to\infty} n^p a_n = l$, 那么

- 当 $0 \leq l < +\infty$ 且 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
- 当 $0 < l \leq +\infty$ 且 $p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

利用 p-判别法判断级数的敛散性

回忆, 级数收敛的必要条件说明其通项为无穷小. 而 p-判别法其实就是比较级数的通项 a_n 当 $n \to \infty$ 时作为等价无穷小与 $\frac{1}{n}$ 的阶 p.

例子 8 (p. 246: 例 11.9(2), 例 11.10(2)). 利用 p-判别法判断下列级数的敛散性:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(n+1)}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln \frac{1}{n}}$, $a > 0$.

利用 p-判别法判断级数的敛散性续

证明. 注意到 $\ln n$ 比 n 的任何正方幂区域无穷大的速度都要慢, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2(1+n)}{n}=0.$$

因此由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散知原级数发散.
对于第二个级数, 注意到

$$a^{\ln\frac{1}{n}}=e^{\ln a\cdot\ln\frac{1}{n}}=\frac{1}{n^{\ln a}}.$$

因此, 根据 p-判别法知, 当 $\ln a>1$ 时, 即 $a>e$ 时原级数收敛; 而当 $0<a\le e$ 时原级数发散.

比值判别法

利用比较判别法的关键是估计通项关于 $1/n$ 趋于 0 的阶, 但有时这个阶不好估计, 例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. 我们发现它趋于零的速度比 $1/n$ 快, 从而可能收敛, 但又比任何 $1/n^p(p>1)$ 慢, 从而不能直接用 p-判别法来判断敛散性.
通过和等比级数比较, 我们可以得到如下的比值判别法.

定理 2.7 (比值判别法). 假设 $\sum_{n=1}^{n} a_n$ 是正项级数, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, 那么

- 当 $0\le l<1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
- 当 $1<l\le +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

比值判别法续

证明. 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, 而级数的敛散性与前有限项的值无关. 因此可以假设 $a_1>0$ 且对所有的 n 成立

$$1<l\le+\infty \implies \frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{l+1}{2}>1,$$

$$0\le l<1 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{l+1}{2}<1.$$

现在, 令 $b_n=a_1\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-1}:=a_1q_l^{n-1}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}a_1\frac{1}{b_{n+1}}\prod_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}\begin{cases}\ge 1, & 1<l\le+\infty,\\ \le 1, & 0\le l<1.\end{cases}$$

比值判别法续

由此可见, 当 $1 < l \leq +\infty$ 时, 由于 $q_l > 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散; 当 $0 \leq l < 1$ 时, 由于 $q_l < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. $\square$

注记. 特别需要注意的是, 当比值等于 1 时, 我们不能通过比值判别法来判断级数的敛散性.(反例: p 级数)

利用比值判别法判断正项级数的敛散性

例子 9 (p. 248: 例 11.11(2), 例 11.12). 判断下列正项级数的敛散性:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a > 0;$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, a > 0;$

利用比值判别法判断正项级数的敛散性续

证明. 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0,$$

由比值判别法知道级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ 收敛.

利用比值判别法判断正项级数的敛散性续

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{e},$$

因此, 当 $0<a<e$ 时, 级数收敛; 当 $a>e$ 时级数发散.
而当 $a=e$ 时, 注意到 $(1+1/n)^n<e$(因为关于 n 单调递增), 故我们仍有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1 \implies a_n>\cdots>a_1=e \implies \lim_{n\to\infty}a_n\neq 0,$$

从而原级数发散.

根值判别法

定理 2.8 (根值判别法). 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, 则

- $0 \le l < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
- $1 < l \le +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

根值判别法

定理 2.8 (根值判别法). 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, 则

- $0 \leq l < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
- $1 < l \leq +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明. 其证明和比值判别法是类似的, 因为由 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, 知 (不妨假设对所有的 n 都成立):

$$a_n \begin{cases} < \left(\dfrac{l+1}{2}\right)^n < 1, & 0 \leq l < 1, \\ > \left(\dfrac{l+1}{2}\right)^n > 1, & 1 < l \leq +\infty. \end{cases}$$

因此, 我们可以直接对 $b_n = \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$ 利用比较判别法得到结论.

根值判别法的应用

例子 10 (p. 250: 例 11.13). 讨论级数的收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}, \qquad a>0.$$

根值判别法的应用续

证明. 如果用比值判别法则较复杂. 而注意到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{a+\frac{1}{n}} = \frac{1}{a}.$$

因此, 当 $1 < a \leq +\infty$ 时, 原级数收敛; 而当 $0 < a < 1$ 时, 原级数发散. 最后, 当 $a = 1$ 时, 由于

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e} = +\infty,$$

可见原级数发散.

积分判别法

注意到对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)} = 1.$$

从而我们不能用比值判别法. 其实也不能用根值判别法. 事实上, 一般地我们有:

命题 2.9. 假设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, 则我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

积分判别法续

证明. 我们只对 $0 \le l < +\infty$ 来证明, $l = +\infty$ 留作习题. 由于添加或者改变有限项不改变序列的极限值, 从而还可假设 $a_0 = 1$ 且对任何 n 都有: 对任意的 $\epsilon > 0$ 成立

$$l - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \epsilon \implies a_0(l-\epsilon)^n < a_n < a_0(l+\epsilon)^n.$$

因此

$$l - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \epsilon$$

令 $\epsilon \to 0$, 并利用夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

积分判别法续

$\square$

上述级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 可以用下面讲的积分判别法来判断.

定理 2.10 (积分判别法). 假设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数. 若存在非负函数 $f(x), x\in[N,+\infty)$, 这里 N 是充分大的正整数, 使得

- f 关于 x 单调递减;
- 除去有限项, 我们有 $a_n = f(n)$, 这里 $n \geq N$;

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与反常积分 $\int_N^{\infty}f(x)dx$ 有相同的敛散性.

积分判别法续

证明. 事实上, 由于级数的敛散性与有限项无关, 不妨假设 $a_n = f(n)$ 对所有的 n 都成立. 且 $f(x)$ 是定义在 $[1, +\infty)$ 的单调递减函数. 由单调性知

$$a_{k+1} = f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) = a_k, \quad \forall x \in [k, k+1],$$

因此

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k$$

从而

$$S_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_{n-1},$$

于是利用级数的收敛原理知反常积分与原级数有相同的敛散性.

利用积分判别法判断级数的敛散性

例子 11 (p. 251: 例 11.14). 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^q n}$, $q > 0$ 的敛散性.

利用积分判别法判断级数的敛散性

例子 11 (p. 251: 例 11.14). 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^q n}$, $q>0$ 的敛散性.

令 $f(x)=\frac{1}{x\ln^q x}$, 则 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 单调递减. 又注意到

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx=\int_2^{+\infty}\ln^{-q}x d\ln x=\begin{cases}\dfrac{\ln^{1-q}2}{q-1}, & q>1,\\ +\infty, & 0<q\le 1,\end{cases}$$

因此, 由积分判别法知当 $q>1$ 时, 原级数收敛; 而当 $0<q\le 1$ 时原级数发散.

交错级数的定义

对于非正项级数, 比较常见而且有用的是交错级数, 即它的通项是正负相间的. 例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\quad a_n>0;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

交错级数的 Leibniz 判别法

对单调递减的正项数列通过相间地添加正负号形成的交错级数, 我们有如下判别法:

交错级数的 Leibniz 判别法续

定理 3.1 (Leibniz 判别法). 假设交错级数 $\sum_{n=1}^{n}(-1)^{n-1}a_n$ 满足

- $0 < a_{n+1} \leq a_n$, 对所有的 $n \in \mathbb{Z}^+$ 都成立;
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

则级数 $\sum_{n=1}^{n}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 且其余项满足

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\right| \leq a_{n+1}.$$

交错级数的 Leibniz 判别法续

证明. 由单调性, 知通项为 $b_n = a_{2n-1} - a_{2n}$ 组成的级数是正项级数, 且

$$S_{2k} = \sum_{i=1}^{k} b_i = a_1 - \sum_{i=1}^{k-1} (a_{2i} - a_{2i+1}) - a_{2k} \leq a_1$$

可见 S_{2k} 作为 $\{b_n\}$ 的前 k 项和单调递增且有上界, 故存在极限, 即

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S.$$

交错级数的 Leibniz 判别法续

又注意到 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 故

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} (S_{2k} + a_{2k}) = S.$$

由于奇偶子列均趋于同一极限, 故

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S.$$

这就证明了原交错级数收敛. 此外易知

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k\right| = a_{n+1} - \sum_{i=1}^{\infty} (a_{n+2i} - a_{n+2i+1}) \leq a_{n+1}.$$

$\square$

利用 Leibniz 判别法判断交错级数敛散性

例子 12 (p. 253: 例 11.15(1)). 判断下列级数的敛散性

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}, p > 0;$
- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{4n-1};$

利用 Leibniz 判别法判断交错级数敛散性

例子 12 (p. 253: 例 11.15(1)). 判断下列级数的敛散性

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}, p > 0;$
- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{4n-1};$

易见, 当 $p > 0$ 时, $\frac{1}{n^p}$ 是单调递减趋于 0 的, 从而根据 Leibniz 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 是收敛的交错级数.
对第二个级数, 我们利用级数的收敛原理知道其通项不趋于零, 故发散.

绝对收敛与条件收敛的定义

定义 3.2. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是任意级数. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

绝对收敛蕴含收敛

注意到我们对正项级数有许多判别法 (比值/根值), 故我们在判断一般级数的收敛性时, 可先看其是否是绝对收敛. 事实上, 如下定理告诉我们, 绝对收敛的级数一定收敛.

定理 3.3. 假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则它必收敛.

证明. 只需注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_n| + a_n}{2} - \frac{|a_n| - a_n}{2} \right),$$

而且

$$0 \leq \frac{|a_n| \pm a_n}{2} \leq |a_n|,$$

故由比较判别法以及收敛级数的线性性知原级数收敛.

绝对收敛级数的交换律与分配率

我们不加证明地给出以下的定理:

定理 3.4. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是绝对收敛的级数.

- 交换律: 则任意交换其各项的次序所得的新级数仍然是绝对收敛的, 且其和不变.
- 分配律: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是另一绝对收敛的级数, 则它们的各项乘积 $a_i b_j, i, j = 1, \ldots, \infty$, 按照任意方式排列而成的新级数仍是绝对收敛的, 且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{\substack{i+j=n \\ n=1}}^{\infty} a_i b_j.$$

几个常用级数的收敛性

- 等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0$: 当 $|q| < 1$ 时绝对收敛; 当 $|q| \geq 1$ 时发散;
- p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$: 当 $p > 1$ 时 (绝对) 收敛; $p \leq 1$ 时发散;
- $\sum\limits_{n=2} \dfrac{1}{n \ln^p n}$: 当 $p > 1$ 时 (绝对) 收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$: 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛; 当 $p \leq 0$ 时发散.

函数项级数的定义

我们将前面讨论的数项级数的通项换成函数则得到函数项级数.

定义 4.1. 假设函数列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在实数集 (例如区间)X 上有定义. 我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为函数项级数.

- 若对 $x_0 \in X$, 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点, 否则称为发散点.
- 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的全体收敛点所成之集合 I 称为它的收敛域.
- 对收敛域中的每一点 $x \in I$, 和式 $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 称为它的和函数.
- 函数项级数的部分和与余和分别定义为 $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, $r_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$.

求函数项级数的收敛域

例子 13 (p. 259: 例 11.18, 11.19(1)). 求下列函数项级数的收敛域

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

求函数项级数的收敛域续

证明. 本质上和判断数项级数的收敛性一样. 我们考察部分和函数

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1-x^n}{1-x}, & x \neq 1, \\ n, & x = 1. \end{cases}$$

可见, 当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}$; 而当 $|x| \geq 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} x^{n-1} \neq 0$. 故原级数的收敛域是 $(-1, 1)$.

求函数项级数的收敛域续

对于第二个函数项级数, 我们可先考察其绝对收敛性 (因为此时判断方法较多). 假设其通项记为 $u_n(x)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\frac{|x-1|}{|x+1|},$$

可见 $\frac{|x-1|}{|x+1|}<1$, 即 $x>0$ 时原级数绝对收敛; 当 $x<0$ 时, 由于 $\frac{|x-1|}{|x+1|}>1$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n=\infty,$$

求函数项级数的收敛域续

由数列收敛的必要条件知原级数发散. 当 $x = 0$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

是交错级数, 容易根据 Leibniz 判别法知它是收敛的.
综上, 对第二个级数其收敛域是 $[0, +\infty)$.

求函数项级数的收敛域续

对第三个函数项级数, 我们首先注意到其通项 $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 满足,

$$|u_n(x)| \le |x|^n,$$

因此, 由比较判别法知当 $|x| < 1$ 时, 原级数绝对收敛; 当 $|x| > 1$ 时,

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{1 + |x|^{2n}} \le \frac{1}{|x|^n},$$

同样由比较判别法知原级数绝对收敛. 最后, 当 $|x| = 1$ 时, 由于 $|u_n(x)| = \frac{1}{2}$, 故

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) \ne 0$$

求函数项级数的收敛域续

从而由数项级数收敛的必要条件知原级数发散.
综上, 原函数项级数的收敛域为 $\{x : |x| \neq 1\}$.

注记. 从上面的例子我们看到, 对由 x 的方幂组成的 (幂) 级数, 其收敛域是一个对称区间; 对比于其他一般的函数项级数, 它们的收敛域可能是非对称区间, 也可能是区间除去一些点.

幂级数的定义

最重要的函数项级数是由幂函数组成的, 我们将其称作幂级数.

定义 5.1. 假设 x_0 是一个给定实数. 我们称函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots,$$

为 $x-x_0$ 的幂级数. 常数 $a_0, a_1, \ldots,$ 称为该幂级数的系数.

Abel 定理

利用比较判别法, 容易得到如下关于幂级数收敛域的 Abel 定理.

定理 5.2 (Abel 定理). 假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是幂级数, 则有如下结论成立:

1. 若 $x = x_0 \neq 0$ 是其收敛点, 则当 $|x| < |x_0|$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛;
2. 若 $x = x_1$ 是其发散点, 则当 $|x| > |x_1|$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

Abel 定理续

证明. 明显第二条可由第一条推出. 我们只证第一条. 注意到按照假设正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |x_0|^n$ 是收敛的, 应用比较判别法知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n x^n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^n|}{|x_0|^n} < 1,$$

因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x| < |x_0|$ 时是绝对收敛的. □

Abel 定理的推论

推论 5.3. 由 Abel 定理知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域只有下面的三种情况:

1. 只在 $x = 0$ 处收敛;
2. 在以原点为心半径为 $R > 0$ 的区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛, 而在 $|x| > R$ 时发散;
3. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛.

注记. 尽管有第二条, 我们还是要分别判断在端点处的敛散情况. 我们称上述推论中的 R 为幂级数的收敛半径. 当幂级数只在原点收敛时, 我们称此时幂级数的收敛半径为 0. 当幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛时, 我们称收敛半径为 $+\infty$.

系数模比/根值法

下面我们给出幂级数的收敛半径计算方法.

系数模比/根值法续

定理 5.4. 假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 时幂级数. 若下列极限之一成立,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

这里 $0 \le \rho \le +\infty$, 则原幂级数的收敛半径为

$$R = \frac{1}{\rho},$$

这里当 $\rho = +\infty$ 时, $1/\rho = 0$; $\rho = 0$ 时, $1/\rho = +\infty$.

系数模比/根值法续

证明. 由于系数 $|a_n|$ 所组成的级数是正项级数, 我们可以利用命题 2.9知比值极限蕴含着根值极限, 从而只证明后者成立时结论成立即可.
令幂级数的通项为 $u_n(x) = a_n x^n$, 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = \rho|x|.$$

可见, 当 $\rho|x| < 1$ 时, 由正项级数的根值判别法知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛. 若 $\rho|x| > 1$, 则当 n 充分大时, 都有 $\sqrt[n]{|u_n(x)|} > 1$, 从而原幂级数的通项不趋于零, 故发散. 由此易得结论成立. $\square$

求幂级数的收敛域

例子 14 (p. 263: 例 11.20(3), p. 264: 例 11.21–11.23). 求下列幂级数的收敛域:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\ln n} x^n}{n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \sqrt{n+1}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n-1}}{3^n n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

求幂级数的收敛域续

例子 15 (p. 288: 14(4), 15(4), (5)). 求下列级数的收敛域:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^p}.$$

幂级数的分析性质

由于幂级数在其收敛半径内是绝对 (一致) 收敛的. 而绝对 (一致) 收敛的级数有良好的分析性质: 例如, 可逐项求导、逐项求积分等.

定理 5.5 (连续性定理). 假设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 则其和函数在 $(-R, R)$ 内连续. 此外, 若改幂级数在 $x = R$(或 $-R$) 处收敛, 则其和函数在相应的点处左 (或右) 半连续.

幂级数的分析性质续

定理 5.6 (逐项可导性). 假设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 则其和函数在 $(-R, R)$ 内可导, 且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0} n a_n x^{n-1}.$$

此外, 上述逐项求导后形成的新幂级数的收敛半径仍为 R.

幂级数的分析性质续

定理 5.7 (逐项可积性). 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 则其和函数在 $(-R, R)$ 的任何闭子区间上可积, 且对任意的 $x \in (-R, R)$, 有

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

此外, 上述逐项积分所得的新幂级数的收敛半径仍为 R.

利用幂级数的分析性质求数项级数的和

例子 16 (p. 267: 例 11.24). 求下列数项级数的和

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(1+r)^n}$, $r > 0$;
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}$.

例子 17 (p. 288: 18(1), (4)). 利用幂级数性质求下列级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}.$$

利用分析性质求级数的和函数

例子 18 (p. 288: 17(2), (3), (6)). 求下列级数的和函数以及收敛域:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n.$$

Taylor 级数的定义

从前面关于幂级数的讨论知道, 幂级数不仅具有简单的形式而且具有良好的性质. 现在的问题是是否可以将其他函数表示成某个幂级数的和函数呢?

假设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内可表示为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

此时, 我们称 $f(x)$ 在 x_0 处可展开为幂级数.

利用幂级数的逐项可微性, 在 x_0 的一个更小的邻域内,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k)a_n (x - x_0)^{n-k}.$$

Taylor 级数的定义续

特别地, 令 $x = x_0$, 则

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, \infty.$$

这里 a_k 称为 $f(x)$ 在 x_0 的 *Taylor* 系数. 因此, 如果 $f(x)$ 在 x_0 处可展开为幂级数, 则 (此即 Taylor 级数的唯一性)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

上式称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 *Taylor* 级数. 特别地, 当 $x_0 = 0$ 时, 称为 $f(x)$ 的 *Maclaurin* 级数.

Taylor 级数的存在唯一性与收敛性

由前面的讨论知道, 只要 $f(x)$ 在 x_0 处任意阶可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 处有唯一的 *Taylor 展开*, 此时记为

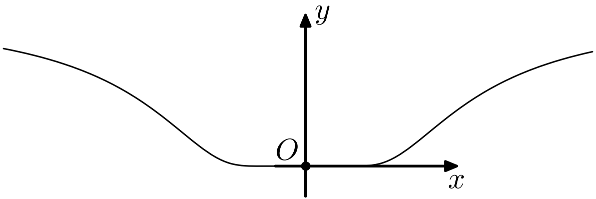
$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

这里仍有两个问题:

- Taylor 展开的幂级数是否在 x_0 的某邻域内收敛?
- 如果收敛, 其和函数是否等于 $f(x)$?

Taylor 级数的存在唯一性与收敛性续

例子 19.



求函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的 Maclaurin 级数, 并验证它是否等于 $f(x)$.

Taylor 级数的存在唯一性与收敛性续

证明. 易见函数 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 的各阶导函数在 $x=0$ 处的左右极限都存在, 从而该函数在 $x=0$ 处任意阶可导. 容易求得 $f^{(k)}=0$, $k=0,1,2,\ldots$. 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 Maclaurin 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛到和函数 $S(x)=0$. 但显然当 $x\neq 0$ 时, $f(x)\neq S(x)$. $\square$

函数可 Taylor 展开的条件

上面的例子表明, 即使 Taylor 级数存在, 也不一定说明函数在该点可 Taylor 展开. 下面的定理利用 Taylor 公式的余项给出了函数在一点可 Taylor 展开的充要条件, 其证明是显然的.

函数可 Taylor 展开的条件续

定理 5.8. 假设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 I 内任意阶可导. 则在该邻域内 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可 Taylor 展开, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

当且仅当 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的 Taylor 公式余项满足

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

函数可 Taylor 展开的条件续

下面的定理给出了 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可 Taylor 展开的一个充分条件:

定理 5.9. 假设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的 r 邻域 I 内任意阶可导. 如果存在常数 $M>0$, 使得对任意的 $n\in\mathbb{Z}^+$, 都成立

$$|f^{(n)}(x)|\le M,\quad \forall x\in I,$$

则 $f(x)$ 必在 I 内可展开成 Taylor 级数.

函数可 Taylor 展开的条件续

证明. 我们可以利用 $f(x)$ 在 I 内的 Lagrange 型余项 $R_n(x)$, 对任意的 $x \in I$:

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)| \cdot |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}.$$

现在, 由于利用正项级数的比值判别法易知级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}$$

对任意固定的 $r > 0$ 都收敛. 因此其通项

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \implies \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0, \quad \forall x \in I.$$

由定理5.8的充要条件知, 此时 $f(x)$ 在 I 内可展开为 Taylor 级数.

常见初等函数的 Taylor 展开

利用 Taylor 公式, 以及上面的定理 5.9给出的充分条件. 我们容易得到下列初等函数的 Taylor/Maclaurin 展开 (称为直接法):

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty);$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1, 1];$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty);$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty);$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$
  $x \in (-1, 1)$, 这里 $\alpha \neq 0$.

常见初等函数的 Taylor 展开续

除了直接法, 我们还可以利用幂级数的分析性质以及基本运算与变量代换来求 Taylor 展开, 称为间接展开法.

例子 20 (p. 272: 例 11.28). 假设 $f(x) = \arctan x$, 试将其在 $x = 0$ 处展开成 Taylor 级数.

如果采用直接法, 则涉及到比较复杂的求 $\arctan x$ 的各阶导数. 这里用间接法, 注意到

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots,$$

常见初等函数的 Taylor 展开续

容易看出 Taylor 级数的系数 (作为 $u=x^2$) 满足,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(-1)^{n+1}|}{|(-1)^n|}=1,$$

可见 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n$ 的收敛半径为 1. 变量代换知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ 在 $|x|<1$ 上绝对收敛. 由幂级数的逐项积分定理知

$$\arctan x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad -1<x<1.$$

常见初等函数的 Taylor 展开续

最后, 注意到 $x = \pm 1$, 级数

$$\pm \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$$

为交错级数, 利用 Leibniz 判别法知收敛. 故

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -1 \le x \le 1.$$

常见初等函数的 Taylor 展开续

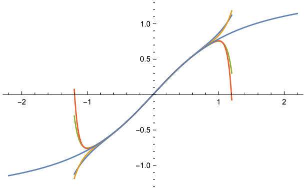


图 1: $\arctan x$ 在 $x = 0$ 处展开

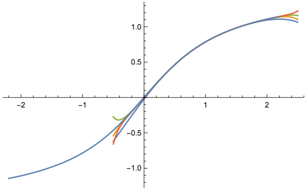


图 2: $\arctan x$ 在 $x = 1$ 处展开

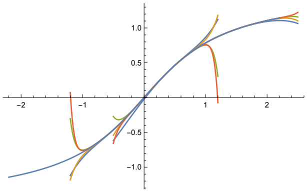


图 3: $\arctan x$ 逐段展开

常见初等函数的 Taylor 展开续

例子 21 (p. 288:19(2),(6)). 将下列函数展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数, 并指出展开式成立的区间:

1. $\frac{1}{x^2}, x_0 = 1;$
2. $(1+x)\ln(1-x), x_0 = 0.$

常见初等函数的 Taylor 展开续

证明. 对第一个函数, 注意到对 $x-1\in(-1,1)$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} &= (1+x-1)^{-2} \\
&= 1-2(x-1)+\frac{(-2)\times(-3)}{2!}(x-1)^2+\cdots \\
&\quad +\frac{(-2)\times(-3)\times\cdots\times(-2-n+1)}{n!}(x-1)^n+\cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n, \quad x\in(0,2).
\end{aligned}
$$

常见初等函数的 Taylor 展开续

对第二个函数, 注意到

$$(1+x)\ln(1-x) = \ln(1-x) + x\ln(1-x),$$

从而对 $-x \in (-1, 1]$,

$$\begin{aligned}(1+x)\ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n} + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} \\ &= -x - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) x^n, \quad x \in [-1, 1).\end{aligned}$$

利用级数表示积分

例子 22 (例子 11.31). 用级数表示积分值

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}.$$

利用级数表示积分续

由于

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

故,我们可用逐项积分定理得到

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}. \end{aligned}$$

三角级数与 Fourier 级数的定义

回忆，Taylor 展开可以在一定程度上逼近函数。一般而言这种逼近的收敛域不可能太大。特别地，当 $f(x)$ 是周期函数时，我们知道由于 Taylor 级数不具有周期性，从而很难用逼近来体现函数周期性的特点。
另一方面，我们知道声波/简谐振动可以容三角函数

$$A\sin(\omega t+\varphi)$$

来表示，其中 A 表示振幅，ω 表示频率，$T=\frac{2\pi}{\omega}$ 表示周期，而 φ 表示初相。然后不同频率对简谐振动的叠加可以组成和弦。这正是音乐的数学解释。

三角级数与 Fourier 级数的定义续

定义 6.1. 一般地, 我们称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为三角级数, 其中 $a_0, a_1,a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots,$ 称为三角级数的系数. 我们又称三角函数的集合

$$\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

为三角正交函数系, 即任何两个不同函数的乘积在一个周期上的积分等于零。

三角级数与 Fourier 级数的定义续

和 Taylor 级数一样，是否每个函数都可以表示成三角级数呢？
我们首先假设函数 $f(x)$ 可以表示成三角级数，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则对上式两边同乘 $\sin mx$ 或者 $\cos mx$ 并假设右端的三角级数可以逐项积分，我们得到

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

以及

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx,\quad n=1,2,\ldots,$$

上述两式称为函数 $f(x)$ 的 *Fourier* 系数公式.

三角级数与 Fourier 级数的定义续

定义 6.2. 假设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi]$ 上可积。则我们知道可以利用上面的 Fourier 系数公式计算函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数。我们称由这些 Fourier 系数构成的三角级数为函数 $f(x)$ 的 *Fourier 级数*，并记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

此外，我们还将 $F_n(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$，称作 $f(x)$ 的 n 阶 *Fourier 多项式*.

三角级数与 Fourier 级数的定义续

注记. 对照 Taylor 级数, 从 Fourier 级数的定义我们至少发现以下优点

- Taylor 级数的存在性要求函数 $f(x)$ 无穷阶可导, 而 Fourier 级数的存在性只要求函数 $f(x)$ 可积分即可;但是这里要求是周期函数。
- 一般而言, Fourier 系数更好计算出来, 因为求积分比求高阶导数容易。

Fourier 级数的收敛性

从前面的讨论我们知道，对可积对周期函数，我们总是可以计算其 Fourier 级数，一个自然的问题是该 Fourier 级数是否收敛呢？当收敛时是否一定收敛到函数 $f(x)$ 呢？一般而言上述问题的答案都是否定的。我们有如下 Dirichlet 收敛性定理.

定理 6.3 (Dirichlet 收敛定理). 假设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数。若它在 $[-\pi,\pi]$ 上分段单调且至多只有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛，并且在 $[-\pi,\pi]$ 上其和函数满足

$$S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

计算 Fourier 级数及其和函数

例子 23 (例 11.33). 求函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0,\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

的 Fourier 级数及其和函数在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式。

计算 Fourier 级数及其和函数续

例子 24 (p. 289: 22(2)). 将周期为 2π 的函数 $f(x)=\pi^2-x^2$, $-\pi<x\leq\pi$ 展开为 Fourier 级数, 并写出其和函数在 $[-\pi,\pi]$ 的表达式.

计算 Fourier 级数及其和函数续

证明. 直接按照 Fourier 级数的计算公式得到 (注意到 $f(x)$ 是偶函数):

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{4\pi^2}{3}, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi^2 - x^2\right) d\sin nx \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} 2x\sin nx dx = -\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} 2x d\cos nx \\
&= \frac{-2}{n^2\pi}\left(2(-1)^n\pi - 2\int_0^{\pi}\cos nx dx\right) = \frac{(-1)^{n+1}4}{n^2},
\end{aligned}
$$

计算 Fourier 级数及其和函数续

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0.$$

因此, 我们得到 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{2\pi}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\cos nx.$$

最后, 根据 Dirichlet 收敛定理知, 该 Fourier 级数的和函数等于

$$S(x) = \pi^2 - x^2, \quad -\pi \le x \le \pi.$$

正弦级数与余弦级数

回忆 Fourier 系数的计算公式

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

以及

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

利用函数的奇偶性与积分区域的对称性，我们容易知道：

正弦级数与余弦级数续

- 当 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数时，则 $f(x)\cos(nx)$ 也是 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数，从而 $a_n=0,\ n=0,1,\ldots$，故此时

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

这时称 Fourier 级数为正弦级数.

- 当 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数时，则 $f(x)\sin(nx)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数，从而 $b_n=0,\ n=1,\ldots$，故此时

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

这时称 Fourier 级数为余弦级数.

将函数展开为正弦级数或者余弦级数

例子 25 (例 11.36). 将函数 $f(x) = x + 1, x \in (0, \pi]$ 分别展开成正弦级数和余弦级数。

将函数展开为正弦级数或者余弦级数续

分析:由于给定函数定义在 $(0,\pi]$. 它满足逐段单调且至多只有有限个间断点,从而可以将其作奇延拓或者偶延拓到 $[-\pi,\pi]$ 上它仍是满足展开条件的。而现在根据奇偶性,我们作 Fourier 展开得到的级数分别是正弦级数和余弦级数。
事实上,根据正弦级数和余弦级数的 Fourier 系数的计算公式,我们知道利用奇偶性可以只需要函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上的值。
下面具体将其展开为正弦级数和余弦级数。先来看正弦级数,为此我们将 $f(x)$ 作奇延拓 (这也是为什么 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没定义),然后根据 Fourier 系数的计算公式得到

将函数展开为正弦级数或者余弦级数续

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+1)\sin nx dx = -\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi}(x+1)d(\cos nx) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left[(x+1)\cos nx|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\cos nx dx\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n(\pi+1)\right].
\end{aligned}$$

将函数展开为正弦级数或者余弦级数续

因此,我们得到 $f(x)$ 的正弦级数:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [1-(-1)^n(\pi+1)] \sin nx.$$

根据 Dirichlet 收敛原理

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [1-(-1)^n(\pi+1)] \sin nx = \begin{cases} x+1, & 0<x<\pi, \\ 0, & x=0,\pi. \end{cases}$$

将函数展开为正弦级数或者余弦级数续

完全类似地，我们将 $f(x)$ 作偶延拓，然后利用 Fourier 级数的计算公式得到

将函数展开为正弦级数或者余弦级数续

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+1)dx = \frac{x+1)^2}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \pi + 2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+1)d(\sin nx) = \frac{2}{\pi}\left[(x+1)\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx dx\right]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\phi} f(x)\sin nx dx = 0.$$

将函数展开为正弦级数或者余弦级数续

因此，我们得到余弦级数为

$$f(x) \sim \frac{\pi+2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx.$$

最后，根据 Dirichlet 收敛定理知道

$$f(x) \sim \frac{\pi+2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx = x+1, \quad 0 \le x \le \pi.$$

将函数展开为正弦级数或者余弦级数续

例子 26 (p. 289: 23(1)). 将函数 $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ 在 $(0,\pi]$ 上展开成 Fourier 正弦级数, 并写出该级数在 $[0,\pi]$ 上的和函数.

将函数展开为正弦级数或者余弦级数续

证明. 为了将其展开为正弦级数, 我们将 $f(x)$ 作奇延拓, 并按照 Fourier 级数的计算公式得到

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin nx dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) d\cos nx
\end{aligned}
$$

将函数展开为正弦级数或者余弦级数续

$$= -\frac{2}{n\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{2n},$$

因此, 我们得到 $f(x)$ 的正弦级数

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}.$$

而根据 Dirichlet 收敛原理知其和函数在 $[0, \pi]$ 上的表达式为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \pi. \end{cases}$$

周期为 2l 的 Fourier 级数

前面我们讨论了周期为 2π 的函数的 Fourier 级数。对一般的周期为 $2l, l > 0$, 的函数 $f(x)$, 若令 $F(t) = f(l/\pi t)$, 则 $F(t + 2\pi) = f(l/\pi t + 2l) = F(t)$, 即 F 是周期为 2π 的函数。明显地,若 $f(x)$ 在 $(-l, l]$ 上满足可积,那么 $F(t)$ 在 $(-\pi, \pi]$ 上也可积从而可以计算其 Fourier 级数,通过变量替换我们就得到了 $f(x)$ 的 Fourier 级数。具体而言

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right),$$

周期为 2l 的 Fourier 级数续

其中

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx, \quad n = 0, 1, \ldots, \\
b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx, \quad n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}
$$

周期为 2l 的 Fourier 级数续

通过上面的变量替换，我们还可得到周期为 $2l$ 的函的 Dirichlet 收敛定理：

周期为 2l 的 Fourier 级数续

定理 6.4. 假设 $f(x)$ 是 $[-l,l]$ 上周期为 $2l$ 的分段单调且至多只有有限个第一类间断点的函数。则 $f(x)$ 的 Fourier 级数存在, 且

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其中 a_n, b_n 的计算公式如上.

此外, 该 Fourier 级数的和函数在 $[-l,l]$ 上收敛, 且

$$S(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

周期为 2l 的 Fourier 级数续

最后，当 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上具有奇偶性时，我们可以类似得到正弦级数和余弦级数。

课后习题

第一次: p. 285: 3(1), (5), (7), (8);
p. 286: 5(2), (4), (5), (8);
第二次: p. 286:6(1), (4), (7), (10); 7(2), (3);
p. 287: 9(2), (4), (5), (7); 12(1), (3), (5);
第三次:
p. 287: 13(1), (4), (5);
p. 288: 14(1), (3), (4); 15(1), (3), (6); 17(1), (4), (5); 18(2), (3), (4);
第四次:
p. 288: 19(1), (3), (5), (7);
p. 289: 21(2), (4); 22(1), (3); 23(2); 25(2);