微积分授课讲义

艾万君

上海交通大学 • 数学科学学院

2018 年 10 月

授课教师基本信息

学院	数学科学学院
姓名	艾万君
联系方式	aiwanjun@sjtu.edu.cn
授课学期	秋
办公室	数学楼 1201
上课时间	每周二/四 18:00-20:20
上课地点	中院 213
课后时间	每周五下午 14:00-17:00

概要 I

- 一些基本概念
  - 常见记号
  - 多元函数
- 多元函数的极限与连续性
  - 二元函数的极限
  - 换元法求函数极限
  - 二元函数的连续性
- 多元函数的导数与微分
  - 多元函数的偏导数
  - 多元函数的全微分
  - 多元复合函数偏导的链式法则
  - 多元隐函数的偏导

概要 II

- 方向导数与梯度
- 多元微分的几何应用

- 多元函数的极值
  - 多元函数的 Taylor 公式
  - 多元函数的极值判断原则
  - 条件极值: 拉格朗日乘数法

- 课后习题

一些常见记号

回忆, n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一些常见记号: 点 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}$; 模长 $\|x\|$, 距离 $\|x-y\|$; δ(去心) 邻域; 内点; 边界点; 开集; 闭集; (道路) 连通; (开/闭) 区域; 有界集;

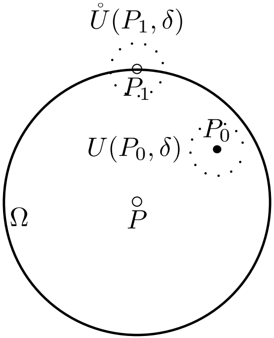


图 1: 边界点与内点

多元函数的定义

定义 1.1 (多元函数). 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 是一个非空集合，我们称 f 是 Ω 上的n 元函数，即是说映射 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

例子 1. 用多元函数的概念来描述理想气体压强 p，与体积 V 和温度 T 直接的关系：

$$p = CT/V, \quad C = \text{Const.}, \quad T > 0, V > 0.$$

即理想气体的压强是温度和体积的二元函数，它与温度成正比而与体积成反比.

二元函数的极限

函数的微积分是建立在极限的基础上的. 回忆, 一元函数的极限定义:

定义 2.1. 我们称 a 为一元函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限, 若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - a| < \epsilon, \quad \forall 0 < |x - x_0| < \delta.$$

记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

二元函数的极限

我们可以仿照写成多元函数的极限定义:

定义 2.2. 我们称二元函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处的极限为 A, 若对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x,y)-A|<\epsilon, \quad \forall (x,y)\in \mathring{U}(P_0,\delta).$$

记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

累次极限

注意函数极限的定义中, 要求 (x, y) 沿着任何路径 (例如直线、曲线) 趋于 (x_0, y_0) 时, 都有 $f(x, y)$ 趋于极限值 a. 这是比一元函数的极限复杂的地方. 我们有累次极限的概念. 我们称

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y), \qquad \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

为函数 $f(x, y)$ 的累次极限.

函数极限与累次极限的关系

命题 2.3. 函数极限与累次极限存在如下关系：若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y), \quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),$$
$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

都存在，则累次极限都存在且相等；反过来，累次极限都存在且相等时，不一定有函数极限存在；函数极限存在时，不一定有累次极限存在。

函数极限与累次极限的关系

例子 2. 证明函数 $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ 在原点处累次极限存在相等, 但函数极限不存在.

事实上, 易见

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0 = \lim_{y\to 0} f(x,y),$$

这表明累次极限存在且相等, 但令 $y = kx$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = k/(1+k^2),$$

故有函数极限的唯一性知, 此时函数极限不存在.

函数极限与累次极限的关系 (续)

例子 3. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0 \end{cases}$$

在原点处的极限为零但累次极限都不存在。

证明. 事实上, 注意到

$$|f(x,y)-0|\leq |x|+|y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}\to 0,$$

我们知 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. 但 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在, 故累次极限不存在。 □

换元法求函数极限

我们首先证明换元法求函数极限的一个命题。

命题 2.4. 假设 $f(t)$ 是定义在开区间 (a,b) 上的一元函数，$g(x,y)$ 是定义在 (x_0,y_0) 的去心邻域 $\Omega := \mathring{U}\big((x_0,y_0),\delta_1\big)$ 上的二元函数，满足 $g(\Omega) \subset (a,b)$. 若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = t_0, \quad \lim_{t\to t_0} f(t) = A,$$

且要么 $t_0 \neq g(\Omega)$ 要么 f 在 t_0 连续，则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y)) = A.$$

证明. 事实上, 对任意的 $\epsilon > 0$, 按照一元函数极限的定义, 存在 $\epsilon_1 > 0$ 使得

$$|f(t) - A| \leq \epsilon, \quad \forall 0 < |t - t_0| < \epsilon_1.$$

再按照二元函数极限的定义, 对 $\epsilon_1 > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|g(x,y) - t_0| \leq \epsilon_1, \quad \forall (x,y) \in \mathring{U}\big((x_0,y_0),\delta\big).$$

如果 $t_0 \notin g(\Omega)$, 则

$$0 < |g(x,y) - t_0| \leq \epsilon_1, \quad \forall (x,y) \in \mathring{U}\big((x_0,y_0),\delta\big).$$

从而

$$|f(g(x,y))-A|\le\epsilon,\quad\forall(x,y)\in\mathring{U}\big((x_0,y_0),\delta\big).$$

如果 $f(t)$ 在 t_0 连续, 则

$$|f(t)-A|\le\epsilon,\quad\forall|t-t_0|<\epsilon_1,$$

此时也有

$$|f(g(x,y))-A|\le\epsilon,\quad\forall(x,y)\in\mathring{U}\big((x_0,y_0),\delta\big).$$

$\square$

换元法求函数极限的例子

例子 4. 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

换元法求函数极限的例子

例子 4. 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

证明. 令 $f(t) = t\sin\frac{1}{t}$, $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0, \quad \lim_{t\to 0} f(t) = 0.$$

由于 $g(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y = 0$, 故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(g(x,y)) = \lim_{t\to 0} f(t) = 0.$$

□

二元函数连续性的定义

回忆, 一元函数在点 P_0 连续是指当 P 趋于 P_0 时, 函数的极限等于函数在 P_0 处的值. 从函数图像上看, 在连续点处, 函数的图像是不间断的.

对多元函数, 我们关于连续性的定义是类似的.

定义 2.5. 假设 f 是平面区域 Ω 上的一个二元函数, 我们称 f 在 $P_0(x_0, y_0) \in \Omega$ 处连续, 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

我们也称不连续点为函数的间断点. 此外, 若 f 在任何 $P \in \Omega$ 处都连续, 则我们称 f 在 Ω 上连续.

二元函数连续性的 ϵ-δ 刻画

我们利用函数极限的 ϵ-δ 刻画, 可以给出函数在一点连续的数学刻画.

定义 2.6. 假设 $f(x,y)$ 是定义在平面区域 Ω 上的一个函数. 则 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续, 当且仅当对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $P=(x,y)\in U(P_0,\delta)\subset\Omega$ 时, 有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon.$$

连续函数的基本性质

类似一元连续函数, 多元连续函数有如下基本性质:

- 多元连续函数的和差积商在其定义域中仍是连续函数;
- 一个一元连续函数和另一个多元连续函数的复合函数在其有效定义域中仍是连续函数;
- 特别地, 多元初等函数都是在其定义域上的连续函数;
- 多元连续函数具有: *有界性定理、最值定理、介值定理和零点存在定理*成立.

试着仿照一元函数用闭集套定理证明上述定理.

一元函数的导数

回忆一元函数导数的定义:

定义 3.1. 假设 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内有定义. 我们称 a 为一元函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数或微分, 若

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在. 用 ϵ-δ 语言, 可等价陈述为: 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $|\Delta x| \le \delta$,

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x| \le \epsilon |\Delta x|.$$

一元函数导数的几何意义

数学上, 一元函数的导数是该函数在对应点处的斜率.
如果将一元函数 $f(t)$ 视为某一物体沿着某一直线移动时在时刻 t 时的位移, 则 $f'(t)$ 刻画了在 t 时刻物体的移动速度, 即位移的变化率. 顺便一提, 若对速度再次求导, 得到速度的变化率, 即 $f''(t)$, 称为加速度.
试用函数图像举例说明踩刹车时车子的位移还在增加.

一元函数导数的几何意义

如下是假设初始时刻, 位移为零而速度为 100km/h $\approx$ 28m/s, 若假设我们希望在 5 秒内紧急停车, 则时间–位移函数 $f(t) = 25(10t - t^2)/9$.

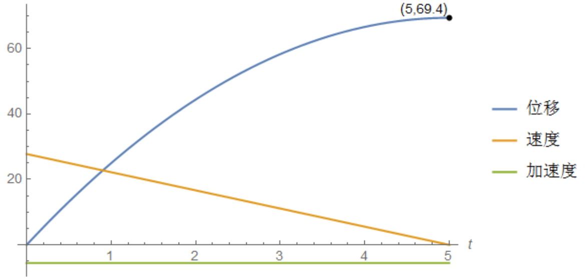


图 2: 刹车时车子的位移、速度与加速度函数图像

事实上, 从速度为 Vkm/s 踩刹车到经过 T 秒后完全停车的总位移可以利用公式 $VT/7.2$(m) 来计算

多元函数的偏导数

对于多元函数 $f(x,y)$, 可以定义一元函数的导数 $f'(x,y_0)$, $f'(x_0,y)$, 我们将它们分别称为 $f(x,y)$ 的偏导数, 记作 $f_x(x,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)$ 等. 请自行仿照一元函数导数的定义, 写出多元函数偏导数的定义 (以及 ϵ-δ 刻画). 根据一元函数的几何意义知, 多元函数的偏导数 $f_x(x,y_0)$ 为截曲线 $f(x,y_0)$ 的斜率.

注记.

- 偏导数的记号 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是一个整体记号, 一般而言并不能看作 ∂f 与 ∂x 的商 (理想气体的压强公式为反例);
- 函数在某点的偏导数都存在不能导出函数在该点处连续;

偏导数的计算 I

多元函数的偏导数和一元函数的导数计算没有本质区别, 只需将其他非求导元当成常数即可.

例子 5. 求函数 $z = \ln(1 + |\arctan \frac{x}{y}|)$ 的偏导数.

偏导数的计算 II

证明. 首先我们注意到, z 的定义域为 $D = \{(x,y) : y \neq 0\}$, 而且易见 $\{x = 0\}$ 时, 函数不可导. 故函数 z 可导的区域为 $D' = \{(x,y) : x \neq 0, y \neq 0\}$, 直接计算可知

$$
\begin{aligned}
z_x &= (1 + |\arctan(x/y)|)^{-1} \cdot \operatorname{sgn}(x/y) \frac{1}{1+(x/y)^2} \cdot 1/y, \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(x/y) y}{(x^2+y^2)(1+|\arctan(x/y)|)}, \\
z_y &= (1 + |\arctan(x/y)|)^{-1} \cdot \operatorname{sgn}(x/y) \frac{1}{1+(x/y)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sgn}(x/y) x}{(x^2+y^2)(1+|\arctan(x/y)|)}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

多元函数的全微分

回忆, 一元函数 $f(x)$ 的微分的 ϵ-δ 刻画为: 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 δ, 使得当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时,

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x| \leq \epsilon|\Delta x|.$$

利用无穷小记号, 上式等价于

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(|\Delta x|),$$

这里 $o(|\Delta x|)$ 表示

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|} = 0.$$

多元函数的全微分

完全类似地, 对定义在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域上的多元函数 $f(x, y)$, 我们可以定义它的全微分如下.

定义 3.2. 若存在常数 A, B, 使得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 $\rho = \sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2}$. 则称 $Adx + Bdy$ 为 $f(x, y)$ 在 P_0 处的全微分, 记作 $df|_{P_0}$. 此时我们也称 f 在 P_0 处可微.

由定义可见, 函数 f 在 P_0 处可微, 则 f 在 P_0 处连续. 进一步地, f 在 P_0 处的偏导数都存在且 $f_x(P_0) = A$, $f_y(P_0) = B$. 因此, 此时全微分可以写成 $f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy$.

利用全微分的概念求解偏导数 I

例子 6. 假设二元函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(0,0)$ 处连续, 且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)+ax-by}{\ln(1+x^2+y^2)} = -1,$$

其中 a,b 为常数, 则 $f_x(P_0)+f_y(P_0)$ 等于对少?

利用全微分的概念求解偏导数 II

证明. 注意到 f 在 P_0 处连续, 故 $f(0,0)=0$. 而

$$
\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-(-ax+by)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y+ax-by)}{\ln(1+x^2+y^2)} \cdot \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= -1\cdot 0 = 0,
\end{aligned}
$$

故 $f_x(P_0)=-a$, $f_y(P_0)=b$, 从而 $f_x(P_0)+f_y(P_0)=-a+b$.

可微与偏导的关系

到现在为止, 我们已经知道函数在某点处可微则一阶偏导数都存在, 而反过来在某点处一阶偏导数都存在并不能保证该函数在该点处可微. 为了使得函数在该点处可微, 一个比较自然的条件是要求一阶偏导数存在且连续.

可微与偏导的关系

命题 3.3. 假设函数 $f(x,y)$ 的两个一阶偏导数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处都存在且连续, 则 f 在 P_0 处可微.

证明. 注意到 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$
$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$.
按照偏导数的定义

$$f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0)\Delta y + o(|\Delta y|),$$

以及

$$\begin{aligned} &f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) \\ &\qquad = f_x(x_0, y_0+\Delta y)\Delta x + o(|\Delta x|). \end{aligned}$$

可微与偏导的关系

因此,

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \\ = f_x(x_0, y_0+\Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + o(|\Delta x|) + o(|\Delta y|), \end{aligned}$$

由偏导数 f_x 在 P_0 处连续知,

$$f_x(x_0, y_0+\Delta y) - f_x(x_0, y_0) = o(|\Delta y|).$$

故

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \\ = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \\ + o(|\Delta y|)\Delta x + o(|\Delta x|) + o(|\Delta y|), \end{aligned}$$

由此, 利用定义可见 f 在 P_0 处可微.

多元复合函数偏导的链式法则 I

回忆一元函数的链法则: 假设 $u = u(x)$ 在 x_0 处可导, 函数 $f = f(u)$ 在函数 $u_0 = u(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $z = f(u(x))$ 在 x_0 处可导, 且

$$z' = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0).$$

多元复合函数偏导的链式法则 II

类似地, 对多元复合函数, 我们有

定理 3.3. 假设函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处可偏导. 若 $z = f(u, v)$ 在 $Q_0 = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ 处可微, 则复合函数 $z = f(u(x, y), v(x, y))$ 在 P_0 处存在偏导数 (但不一定可微), 且

$$z_x(P_0) = f_u(Q_0) \cdot u_x(P_0) + f_v(Q_0) \cdot v_x(P_0),$$
$$z_y(P_0) = f_u(Q_0) \cdot u_y(P_0) + f_v(Q_0) \cdot v_y(P_0).$$

多元复合函数偏导的链式法则 III

注记. 一个自然的问题是, 什么时候上述定理中的复合函数在点 P_0 处可微. 事实上, 我们只需额外假设 u, v 在 P_0 可微即可. 其证明可以参考 [1, 定理. 6.13].

事实上, 利用多元函数一阶微分的形式不变性

$$dz = f_u du + f_v dv,$$
$$du = u_x dx + u_y dy, \quad dv = v_x dx + v_y dy.$$

因此,

$$dz = (f_u u_x + f_v v_x)dx + (f_u u_y + f_v v_y)dy,$$

故我们知道此时复合函数 $z = f(u(x, y), v(x, y))$ 可微。(请按照定义写出严格证明)。

多元复合函数的链式法则的应用 I

例子 7. 对函数 $z = z(x, y)$, 我们称 $\Delta z = z_{xx} + z_{yy}$ 为函数 z 的拉普拉斯. 试计算在极坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 下, 复合函数 $f(r, \theta) = z(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 的拉普拉斯 (或者说函数 z 的拉普拉斯在极坐标下的表达式).

多元复合函数的链式法则的应用 II

证明. 按照复合函数的链式法则知

$$
\begin{aligned}
f_{rr} &= (z_x \cdot x_r + z_y \cdot y_r)_r \\
&= z_{xx} x_r^2 + 2 z_{xy} x_r y_r + z_{yy} y_r^2 + z_x \cdot x_{rr} + + z_y \cdot y_{rr} \\
&= z_{xx} \cos\theta^2 + 2 z_{xy} \cos\theta \sin\theta + z_{yy} \sin\theta^2, \\
f_{\theta\theta} &= z_{xx} x_\theta^2 + 2 z_{xy} x_\theta y_\theta + z_{yy} y_\theta^2 + z_x \cdot x_{\theta\theta} + z_y \cdot y_{\theta\theta} \\
&= z_{xx}(-r\sin\theta)^2 - 2 z_{xy}(r^2 \sin\theta\cos\theta) + z_{yy}(r\cos\theta)^2 \\
&\qquad + z_x(-r\cos\theta) + z_y(-r\sin\theta) \\
&= r^2\left(z_{xx}\sin^2\theta - 2 z_{xy}\sin\theta\cos\theta + z_{yy}\cos^2\theta\right) - r f_r,
\end{aligned}
$$

多元复合函数的链式法则的应用 III

因此,

$$\Delta z = z_{xx} + z_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}.$$

$\square$

特别地, 若令 $f(r, \theta) = \ln r$, $r > 0$, 则由上述拉普拉斯的极坐标计算公式知 $\Delta f = 0$, 即

$$z(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

是全平面除去原点上的调和函数 (即 $\Delta z = 0$).

由隐函数定义的一元函数的例子 I

我们考察平面上单位圆的方程:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

若令 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, 则 D 也可视为二元函数 $F(x, y)$ 所确定的抛物面与 xy-平面相交所得曲线. 我们希望能将该曲线表示为 $y = y(x)$, 即以 x 为自变量的函数图像. 由图易知除了点 $(-1, 0)$ 以及 $(1, 0)$ 以外的任何点 P 都存在一个邻域 $U(P; \delta)$, 使得曲线在 $U(P; \delta)$ 内的部分可视为 $y = y(x)$ 的图像. 事实上, 直接求解得到

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \implies y'(x) = \mp\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

由隐函数定义的一元函数的例子 II

故在 $(-1,0)$ 以及 $(0,1)$ 处 $y'(x)$ 不存在. 上述观察的几何解释是, 当 $y'(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在时, 我们利用复合函数求导的链式法则知

$$F_x + F_y y' = 0 \implies y' = -F_x/F_y \implies F_y \neq 0.$$

由 F_y 的连续性, 我们知道 F_y 在 $(x_0, y(x_0))$ 的某邻域内保号. 即在该邻域内, 当 x 固定时, $f(y) := F(x,y)$ 是关于 y 的单调函数. 从而, 此时对给定的 x 只有唯一的一个 y 使得 $F(x,y)=0$. 这即表明在该邻域内存在隐函数 $y=y(x)$, 使得 $F(x,y(x))=0$.

一元隐函数存在性定理

上述例子可抽象为如下的一般定理.

定理 3.4. 假设函数 $F(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0;\delta)$ 内具有连续的偏导数 F_y, 且

$$F(x_0,y_0)=0, \quad F_y(x_0,y_0)\neq 0,$$

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 P_0 的另一邻域 $U(P_0;\delta')$ 内唯一确定了一个函数 $y=y(x)$, 使得

$$F(x,y(x))=0, \quad y_0=y(x_0)$$

且函数 y 具有连续偏导数

$$y'(x)=-F_x(x,y)/F_y(x,y)$$

多元函数的隐函数存在性定理

我们可将上述定理推广为多元函数的情形.

定理 3.5. 假设函数 $F(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域 $U(P_0;\delta)$ 内具有连续的偏导数 F_z, 且

$$F(x_0,y_0,z_0)=0,\quad F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 P_0 的另一邻域 $U(P_0;\delta')$ 内唯一确定了一个函数 $z=z(x,y)$, 使得

$$F(x,y,z(x,y))=0,\quad z_0=z(x_0,y_0)$$

且函数 $z(x,y)$ 具有连续偏导数

$$z_x=-F_x(x,y,z)/F_z(x,y,z),$$
$$z_y=-F_y(x,y,z)/F_z(x,y,z).$$

隐函数的偏导数 I

从上面的讨论可知, 隐函数的偏导数本质上是链式法则的应用. 需要注意的是, 利用链式法则求偏导数时, 我们甚至还不需要知道隐函数是否存在. 而上述定理表明, 当在某点 (x_0, y_0) 处偏导数 z_x 或者 z_y 存在时, 隐函数 $z = z(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域是存在的.

例子 8. 例如求由函数方程

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

所决定的球面的隐函数 $z = z(x, y)$ 的偏导数.

隐函数的偏导数 II

证明. 由复合函数求导的链式法则知

$$F_x + F_z z_x = 0 \implies z_x = -F_x/F_z = -2x/2z = -x/z,$$

即在点 (x_0, y_0, z_0) 的某邻域内, 其中 $z_0 \neq 0$, 存在隐函数 $z = z(x, y)$, 且其关于 x 的偏导数为

$$z_x = -x/z.$$

例如, 对上半球上的点 (x_0, y_0, z_0), $z_0 > 0$, 我们有

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z_x = -x/z = -x/\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

可见与先求解隐函数, 在求偏导数的结果一致.

多元函数的方向导数 I

根据偏导数的定义, 我们知道偏导数刻画了沿着坐标方向的变化率. 自然的问题是:

- 沿着其他方向, 函数的变化率应该如何刻画?
- 沿着什么方向, 函数的变化率取得最大值与最小值?

多元函数的方向导数 II

以二元函数为例, 假设 xy-平面上一向量 $\vec{v}$ 与 x-轴, y-轴的夹角分别为 α,β. 则 $\vec{v} = (\cos\alpha, \cos\beta)$.

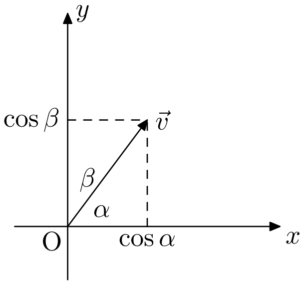


图 3: 方向余弦

多元函数的方向导数 III

则函数 $f(x,y)$ 沿着方向 $\vec{v}$ 的定义为

定义 3.6. 假设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域有定义, $\vec{v}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 为非零向量 (注意按方向余弦的定义, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$). 若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在, 则称此极限为 f 在 P_0 处沿着方向 $\vec{v}$ 的方向导数. 记作 $\left.\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}\right|_{(x_0,y_0)}$.

多元函数的方向导数 IV

易见对 $\vec{v}=(1,0)$ 或者 $\vec{v}=(0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ 分别给出了偏导数 f_x, f_y. 而 $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ 刻画了函数沿着 $\vec{v}$ 方向的变化率.

利用复合函数求导的链式法则, 我们容易得到如下的方向导数存在性定理.

定理 3.7. 假设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域有定义, $\vec{v}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 为一非零向量. 若 f 在 P_0 处可微, 则 f 在 P_0 存在沿着 $\vec{v}$ 的方向导数, 且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right|_{x_0,y_0} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

练习:p. 116, 40(3)

多元函数的梯度

假设函数 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微, 则沿着向量 $\vec{v} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 的方向导数可改写为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right|_{(x_0,y_0)} = (f_x, f_y)|_{P_0} \cdot \vec{v}.$$

我们将向量 $(f_x, f_y)|_{P_0}$ 称为函数 f 在 P_0 处的梯度, 记为 $\nabla f|_{P_0}$ 或者 $\nabla f(P_0)$. 注意到,

$$\nabla f(P_0) \cdot \vec{v} = |\nabla f(P_0)||\vec{v}| \cos\angle(\nabla f(P_0), \vec{v}).$$

因此, 我们得到:

- 沿着梯度方向, 方向导数取得最大值, 即函数沿着梯度方向递增得最快;
- 沿着梯度的反方向方向, 方向导数取得最小值, 即函数沿着梯度的反方向递减得最快.

曲面上给定点处的梯度方向

我们将梯度单位化后的向量

$$\nabla f/|\nabla f| = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}(f_x, f_y),$$

称为梯度方向. 而可以证明点 $(x, y, f(x, y))$ 处的空间向量

$$\frac{1}{\sqrt{(f_x^2 + f_y^2)(1 + f_x^2 + f_y^2)}}(f_x, f_y, f_x^2 + f_y^2)$$

为曲面上沿着梯度方向与曲面相切的向量. 它指向的是函数增加最快的方向 (其相反向量为函数减少最快的方向).

曲面上沿着给定曲线的梯度方向

作为例子, 我们给出函数 $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ 沿着单位圆曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 的梯度方向图示.

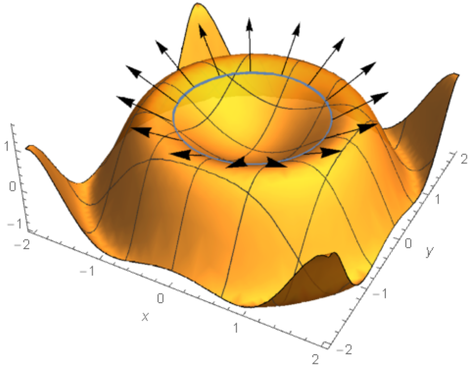


图 4: 沿着曲线的梯度方向

求空间曲线的切线及其法平面 I

例子 9. 求平面 $x+y+z=a$ 与抛物面 $-2az+a^2=x^2+y^2$ 的交线 γ 以及点 $P_0(0,a,0)$ 处的切线方程与法平面方程, 其中 $a>0$ 为常数.

联立方程容易求得曲线 γ 的参数方程为:

$$\begin{cases} x(t)=t, \\ y(t)=a\mp\sqrt{(2a-t)t} \\ z(t)=\pm\sqrt{(2a-t)t}-t, \end{cases}$$

求空间曲线的切线及其法平面 II

其中, $t \in [0, 2a]$ 为了求切线方程, 我们可以直接对曲线 γ 求其切向量, 注意到 $\gamma(0) = P_0 = (0, a, 0)$:

$$\begin{aligned}\gamma'(0) &= \left(1, \frac{t-a}{\sqrt{(2a-t)t}}, \frac{a-t}{\sqrt{(2a-t)t}} - 1\right)\Bigg|_{t=0} \\ &= (1, -\frac{1}{0}, \frac{1}{0} - 1),\end{aligned}$$

看起来是没有意义的. 那么问题出在哪里呢?

求空间曲线的切线及其法平面 III

令

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= x+y+z-a,\\
G(x,y,z) &= x^2+y^2+2az-a^2.
\end{aligned}
$$

假设在 P_0 的邻域存在隐函数 $y=y(x)$, $z=z(x)$, 则由链式法则知

$$F_x + F_y y' + F_z z' = 0, \quad G_x + G_y y' + G_z z' = 0.$$

上述方程有解 (y', z') 当且仅当 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \det\begin{pmatrix} F_y & G_y \\ F_z & G_z \end{pmatrix} \neq 0.$$

求空间曲线的切线及其法平面 IV

容易验证, 在 P_0 处,

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 1 & 2a \end{pmatrix} = 0$$

这即表明, 我们不能在 P_0 处, 将相交曲线视为以 x 为自变量的参数曲线 $y = y(x), z = z(x)$. 解决办法是, 将其视为 y 为自变量的参数曲线, 即 $x = x(y), z = z(y)$. 同样的推导可知

$$\begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_y \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求空间曲线的切线及其法平面 V

因此, 我们得到在 P_0 处 γ 的切方向为 $(0, 1, -1)$. 进而过点 P_0 的切线为

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-a}{1} = \frac{z-0}{-1}.$$

上式可改写为参数方程

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = a + t \\ z(t) = -t \end{cases}$$

求空间曲线的切线及其法平面 VI

而过 P_0 的法平面方程为

$$\Big((x-0),(y-a),(z-0)\Big)\cdot(0,1,-1)=0,$$

即

$$y-a-z=0.$$

最后, 我们来说明求相交曲线在给定点处的切向量的微分法: 对 F,G 求全微分, 并在 P_0 处取值, 得到

$$dx+dy+dz=0,\quad 2ady+2adz=0,$$

求空间曲线的切线及其法平面 VII

求解得到

$$dx = 0, \quad dz = -dy.$$

当我们假设相交曲线 γ 的参数方程为 $(x(t), y(t), z(t)$, 则切方向为 (利用微分与 (偏) 导数的关系),

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = (0, y'(t), -y'(t)),$$

单位化后得到 $(0, 1, -1)$ 和前面的结果一致.
练习 : p. 116, 44(3).

曲面的切平面与法线 I

假设曲面 S 由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出, 且在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内, F 可微. 若 $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 是曲面 S 上过 P_0 的一条正则参数曲线, 即

$$F(x(t),y(t),z(t))=0,\quad \gamma(t_0)=P_0,\quad |\gamma'(t)|\neq 0.$$

则

$$F_x(P_0)x'(t_0)+F_y(P_0)y'(t_0)+F_z(P_0)z'(t_0)=0,$$

即

$$\nabla F(P_0)\cdot\gamma'(t_0)=0,$$

曲面的切平面与法线 II

这表明梯度向量 $\nabla F(P_0)$ 是曲面 S 在 P_0 处的法向量 (因为他和任意曲线的切方向垂直).

由此, 容易得到曲面 S 在 P_0 处的切平面方程

$$\nabla F(P_0) \cdot \big((x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)\big) = 0,$$

即

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

以及法线方程,

$$\frac{x - x_0}{F_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(P_0)}.$$

曲面的切平面与法线 III

特别地, 对函数 $z=f(x,y)$(即二元函数的图像), 我们可令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ 得到 $\nabla F=(f_x,f_y,-1)$. 由此易知 $z=f(x,y)$ 在某给定的处的切平面方程与法线方程.
当 $x=x_0$ 固定时, 曲线 $z(y)=f(x_0,y)$ 的切方向为 $(0,1,f_y)$, 类似地当 $y=y_0$ 固定时, 曲线 $z(x)=f(x,y_0)$ 的切方向为 $(1,0,f_x)$, 从而曲面的法向为 $(0,1,f_y)\times(1,0,f_x)=(f_x,f_y,-1)$, 这样我们也可得到曲面的切平面方程.
事实上, 若函数在一点处可微则存在唯一的过该点的切平面, 这正是全微分的几何意义.

一元函数的 Taylor 公式

回忆, 一元函数的泰勒公式:假设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

其中,

$$R_n(x) = \begin{cases} o\big((x - x_0)^n\big), & \text{Peano 型} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, & \text{拉格朗日型} \end{cases}$$

ξ 介于 x_0 与 x 之间。注意拉格朗日型余项要求 f 在 x_0 的某邻域内有 $n+1$ 阶导数。

多元函数的 Taylor 公式 I

我们将一元函数的 Taylor 公式改写为如下形式：

$$
\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot \partial_x f(x_0) + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 \cdot \partial_x^2 f(x_0) + \\
\cdots + \frac{1}{n!}(\Delta x)^n \partial_x^n f(x_0) + R_n(x),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{cases}
R_n(x) = o(|\Delta x|^n), & \text{Peano 型} \\
\frac{(\Delta x)^{n+1}\partial_x^{n+1}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}, & \text{拉格朗日型}
\end{cases}
$$

多元函数的 Taylor 公式 II

则容易得到二元函数的 Taylor 公式:假设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域具有 $n+1$ 阶连续偏导数,

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(\Delta x\cdot\partial_x+\Delta y\cdot\partial_y)^k f(x_0,y_0) + R_n(x,y),$$

其中

$$R_n(x,y) = \begin{cases} o(\rho^n), & \text{Peano 型} \\ \frac{1}{(n+1)!}(\Delta x\cdot\partial_x+\Delta y\cdot\partial_y)^{(n+1)} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y), & \text{拉格朗日型.} \end{cases}$$

一元函数的极值

回忆一元函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导且在 x_0 处取得极值的必要条件是

$$f'(x_0) = 0.$$

而当 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导时, 在 x_0 处取得极值的一个充分条件是

$$f''(x_0) > 0(\text{ 极小值}),$$

或者

$$f''(x_0) < 0(\text{ 极大值}).$$

多元函数的极值

对比一元函数与二元函数的 Taylor 公式知, $f'(x_0)$ 对应的是梯度向量 $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x, f_y)|_{x_0,y_0}$, 而 $f''(x_0)$ 对应的是二阶偏导数矩阵 $\mathrm{Jacobi}(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$. 由此, 容易得到二元函数 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处取得极值必要条件:假设 $f(x, y)$ 在 P_0 处可微, 则 P_0 是 f 的极值点必有

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0 \iff \nabla f(P_0) = 0.$$

充分条件:假设 $f(x, y)$ 在 P_0 的邻域内有二阶连续偏导数, 则 P_0 是极值点的充分条件是

$$f_{xx}(P_0) > 0 \,\&\, \det \mathrm{Jacobi}(f)(P_0) > 0(\text{ 极小值点})$$
$$f_{xx}(P_0) < 0 \,\&\, \det \mathrm{Jacobi}(f)(P_0) > 0(\text{ 极大值点}).$$

求闭区域上的函数极值

例子 10. 求函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在闭区域 $D=\{(x,y):x^2+y^2/4\le 1\}$ 上的最值。

证明. 容易求得 $\nabla f=(2x,-2y)=0 \implies x=0=y$, 而 $\det \mathrm{Jacobi}(f)(0,0)=-4<0$ 故驻点 $(0,0)$ 不是函数 f 的极值点。从而最值在边界 $\partial D=\{\theta\in[0,2\pi]: x=\cos\theta, y=2\sin\theta\}$ 取得。将边界参数曲线代入 f 得到

$$f(x,y)|_{\partial D}=\cos^2\theta-4\sin^2\theta+2=-2+5\cos^2\theta.$$

从而最小值为 $f(0,\pm 2)=-2$, 最大值为 $f(\pm 1,0)=3$.

拉格朗日乘数法

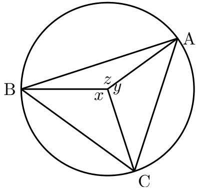
我们以二元函数为例来说明拉格朗日乘数法:假设 $u=f(x,y)$ 是我们的目标函数, 而 $\phi(x,y)=0$ 是约束条件。则条件极值问题:求 $f(x,y)$ 在约束条件 $D:=\{(x,y):\phi(x,y)=0\}$ 下的极值等价于无条件极值

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y).$$

这一转化方法称为拉格朗日乘数法.

拉格朗日乘数法的应用 I

例子 11. 证明单位圆的内接三角形中，正三角形的面积最大。证明单位圆的内接三角形中，正三角形的面积最大。



拉格朗日乘数法的应用 II

证明. 假设三个圆心角为 x, y, z, 则三角形 ABC 的面积为

$$S(x, y, z) = \frac{1}{2}(\sin x + \sin y + \sin z)$$

而约束条件为

$$\phi(x, y, z) = x + y + z - 2\pi = 0.$$

因此令

$$F(x, y, z, \lambda) = S(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z),$$

拉格朗日乘数法的应用 III

则由拉格朗日乘数法得到必要条件 $\nabla F = 0$, 即

$$\begin{cases} S_x + \lambda \phi_x = 0, \\ S_y + \lambda \phi_y = 0, \\ S_z + \lambda \phi_z = 0, \\ \phi = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos y = \cos z = -2\lambda, \\ x + y + z = 2\pi. \end{cases}$$

由于 $x, y, z \in (0, \pi)$, 故 $x = y = z = 2\pi/3$, 即此时 ABC 为等边三角形。

课后习题 I

p. 110: 3(2)(并作图); 4(3);
p. 111: 5(改编) 如下 (欧拉定理): 假设 $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ 是连续可微的. 则 f 是 k 次其次函数 (即, 对任意的非零常数 $t > 0$, 以及任意的 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 都有 $f(tx) = t^k f(x)$), 当且仅当

$$x \cdot \nabla f(x) = k f(x).$$

提示充分性中, 令 $g(t, x) = f(tx)$, 利用条件得到微分方程 $\partial_t g(t, x) = k g(t, x)/t$ 并求解 ODE.
p. 111: 7(1)(改编) 如下: 讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$$

课后习题 II

在点 $O(0,0)$ 处的极限存在性、连续性、偏导存在性与连续性、方向导数的存在性以及可微性. (提示, 极限存在且连续, 偏导数存在且为零, 偏导数不连续. 方向导数只在坐标轴上存在且为零, 故不可微.)

p. 113: 25

p. 116: 40(3)(改编), 计算函数

$$u = x\,\mathbf{arctan}(y/z)$$

在点 $P_0(1,2,-2)$ 处的梯度与沿着方向 $\vec{v}$ 的方向导数, 其中 $\vec{v}$ 为从点 M_0 到点 $(5,5,15)$ 的方向.

p. 117: 46(1); 47

p. 118: 56

补充题:

课后习题 III

1. 定义三元函数的拉普拉斯为 $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$, 试将径向对称函数 $f(x, y, z) = f(r)$ 的拉普拉斯用极坐标 (r, φ, θ) 来表示出来;
2. 叙述 2 元连续函数 $f(x, y)$ 的有界性定理、最值定理、介值定理和零点存在定理;
3. 求 $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z)$ 在点 $P_0(0, 0, 0)$ 处的拉格朗日型二阶 Taylor 公式。

参考文献 I

[1] 小平邦彦, 裴东河. 微积分入门 II: 多元微积分[M]. 北京, 中国: 人民邮电出版社, 2008.