微积分授课讲义

艾万君

上海交通大学 • 数学科学学院

2018 年 10 月

授课教师基本信息

学院	数学科学学院
姓名	艾万君
联系方式	aiwanjun@sjtu.edu.cn
授课学期	秋
办公室	数学楼 1201
上课时间	每周二/四 18:00-20:20
上课地点	中院 213
课后时间	每周五下午 14:00-17:00

概要 I

- 二元函数的重积分与累次积分
  - 多元函数的重积分的定义
  - 二重积分的计算

    直角坐标系下的二重积分之计算
  - 二重积分的变量替换公式

    极坐标系下重积分的计算
- 三元函数的重积分与累次积分
  - 三重积分的定义与几何意义
  - 三重积分的计算

    三重积分的变量替换公式
  - 重积分的几何应用
- 课后习题

一元函数定积分的定义 I

回忆, 假设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数, 我们定义其在 $[a,b]$ 上的定积分是通过分割、求和、求极限这三步来完成的.

- 作 $[a,b]$ 的任意划分, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$;
- 对任意的 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 考虑近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1};$$

- 若当 $\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$ 时, 存在极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I;$$

一元函数定积分的定义 II

则我们称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分为 I, 记作

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

一元函数定积分的定义 III

注记. 用 ϵ-δ 语言表述: 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 以及任意的 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\} < \delta, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

我们都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \epsilon.$$

一元函数定积分的定义 IV

从图形上看, 它是如下图中虚线长方形的面积和的极限.

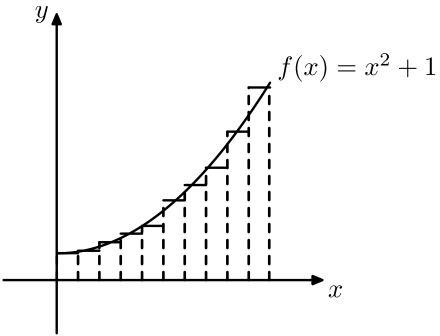


图 1: 定积分的定义

多元函数的重积分定义

我们以二元函数为例来说明二重积分的定义。

定义 1.1. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界闭区域, 而函数 $f(x, y)$ 是 Ω 上的有界函数。若存在实数 $I \in \mathbb{R}$, 使得对 Ω 的任意分划:Δ_1, Δ_2, $\cdots$, Δ_n, 以及任意的 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 极限

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} |\Delta_i|}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)|\Delta_i| = I,$$

则称 $f(x, y)$ 在 Ω 上可积, I 称为它在 Ω 上的二重积分, 记作

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma.$$

关于多重积分的一些注记

- 我们完全可以类似地定义三重积分甚至多重积分; 一般三重积分记作
$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV;$$
- 和一元函数的定积分一样, 按照定义即知: 多重积分的存在性以及数值与区域 Ω 的分划方式以及点 $(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{ni}) \in \Omega$ 的选取无关; 而只与被积函数以及积分区域有关;
- 特别地, 当被积函数恒为 1 时, 二重积分表示的是积分区域的面积, 三重积分表示的是积分区域的体积;
- 对于有界闭区域 Ω 上的连续函数 (可推广为间断点为零测集)f, f 在 Ω 上可积.

重积分的基本性质 I

重积分和一元函数的定积分一样有如下基本性质:

- 线性性. 若 $f, g \in R(\Omega)$ (即在 Ω 上可积), 则对任意实数 λ, μ, 有

$$\iint_\Omega (\lambda f + g\mu) d\sigma = \lambda \iint_\Omega f d\sigma + \mu \iint_\Omega g d\sigma.$$

- 积分区域可加性. 若 $\Omega = \Omega_1 \bigsqcup \Omega_2$, 则 f 在区域 Ω 上可积当且仅当其在区域 Ω_1 和 Ω_2 上可积, 且

$$\iint_\Omega f d\sigma = \iint_{\Omega_1} f d\sigma + \iint_{\Omega_2} f d\sigma.$$

重积分的基本性质 II

- 保序性. 若 f, g 都在 Ω 上可积且在 Ω 上有 $f \leq g$, 则

$$\iint_\Omega f d\sigma \leq \iint_\Omega g d\sigma.$$

特别地, 取 f 或者 g 等于零, 我们得到保号性. 此外, 可以证明 f 在 Ω 上可积时, $|f|$ 也在 Ω 上可积, 从而由保序性知

$$\left|\iint_\Omega f d\sigma\right| \leq \iint_\Omega |f| d\sigma.$$

重积分的基本性质 III

- 连续函数的积分中值定理. 假设 f 是有界闭区域 Ω 上的连续函数, 函数 g 在 Ω 上可积且在 Ω 上不变号. 则存在点 $\xi \in \Omega$, 使得

$$\iint_{\Omega} fg d\sigma = f(\xi) \iint_{\Omega} g d\sigma.$$

特别地, 取 $g \equiv 1$, 则

$$\iint_{\Omega} f d\sigma = f(\xi)|\Omega|,$$

$f(\xi)$ 称为函数 f 在 Ω 上的平均值.

两个连续函数的积分中值定理的证明 I

由于 f 是有界闭区域 Ω 上的连续函数, 根据连续函数的最值存在定理, 存在 $m, M \in \mathbb{R}$, 使得

$$m \le f(x) \le M, \quad \forall x \in \Omega.$$

不妨假设 $g \ge 0$ 在 Ω 上成立, 则

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

由于我们假设了 g 也在 Ω 上连续, 故 fg 也在 Ω 上连续, 从而 fg 在 Ω 上可积. 进而根据积分的线性性和保序性知

$$m \iint_{\Omega} g d\sigma \le \iint_{\Omega} fg d\sigma \le M \iint_{\Omega} g d\sigma.$$

两个连续函数的积分中值定理的证明 II

这表明

$$\iint_\Omega fg d\sigma \Big/ \iint_\Omega g d\sigma \in [m, M].$$

最后, 根据 f 是 Ω 上的连续函数, 由介值定理知, 存在 $\xi \in \Omega$, 使得

$$f(\xi) = \iint_\Omega fg d\sigma \Big/ \iint_\Omega g d\sigma.$$

注意, 这里假设了 $\iint_\Omega g d\sigma \neq 0$; 当它等于零时, 可以利用保序性以及积分区域可加性反证得到 $g \equiv 0$, 此时结论也成立 (作业!!).

直角坐标系下的二重积分之计算 I

重积分的计算基本都是将其化为累次积分来得到的. 而其基本思想就是所谓的**切片法**. 我们首先回忆两种正则的区域:

- ***x*-正则区域**: 即它可表示为

$$\{(x,y) : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\},$$

其中 φ_1, φ_2 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 它的特点是该区域可看成关于 x 的两个函数曲线与端点处平行于 y 轴的两直线围成的.

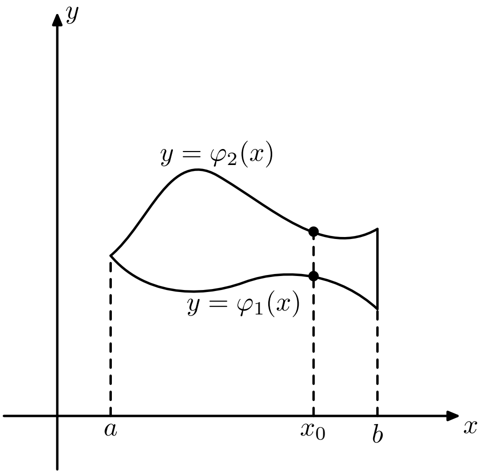
直角坐标系下的二重积分之计算 II

- y-正则区域: 即它可表示为

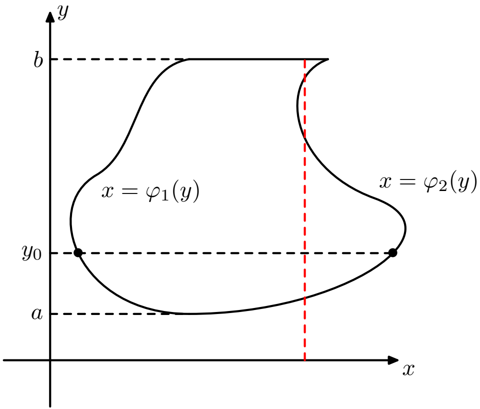
$$\{(x,y): a \le y \le b, \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\},$$

其中 φ_1, φ_2 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 它的特点是该区域可看成关于 y 的两个函数曲线与端点处平行于 x 轴的两直线围成的.

直角坐标系下的二重积分之计算 III



(a) x-型区域



(b) y-型区域

直角坐标系下的二重积分之计算 IV

我们称曲边梯形

$$\Omega_{x_0} := \{(y, f(x_0, y)) : \varphi_1(x_0) \le y \le \varphi_2(x_0)\},$$

为 $x = x_0$ 处 x-型区域的切片. 其面积可以通过一元函数的定积分计算如下:

$$|\Omega_{x_0}| = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)dy.$$

从而我们得到二重积分的累次积分计算公式

$$\iint_{\Omega} f(x, y)d\sigma = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right) dx.$$

直角坐标系下的二重积分之计算 V

完全类似地, y-型区域的切片定义为

$$\Omega_{y_0} := \{(x, f(x, y_0)) : \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}.$$

其面积为

$$|\Omega_{y_0}| = \int_{\varphi_1(y_0)}^{\varphi_2(y_0)} f(x, y_0) dx,$$

从而 y-型区域的二重积分计算公式为

$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

直角坐标系下二重积分的计算例子

例子 1 (p. 170: 8(5)). 计算区域 Ω 为曲线 $xy=1, y=x, x=2$ 围成的闭区域时函数 $f(x,y)=x^2/y^2$ 在 Ω 上的积分.

直角坐标系下二重积分的计算例子

例子 1 (p. 170: 8(5)). 计算区域 Ω 为曲线 $xy=1, y=x, x=2$ 围成的闭区域时函数 $f(x,y)=x^2/y^2$ 在 Ω 上的积分.

证明. 作图可知区域为 x-型正则区域, 故

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} f(x,y)d\sigma &= \int_1^2 \left(\int_{1/x}^{x} x^2/y^2 dy\right) dx \\
&= \int_1^2 \left(-x^2/y\right)\Big|_{y=1/x}^{x} dx \\
&= \int_1^2 \left(-x+x^3\right) dx \\
&= 9/4.
\end{aligned}$$

例子 2 (p.170:8(7)). 计算 Ω 为抛物线 $y^2 = x$ 和直线 $y = x - 2$ 围成的闭区域上函数 $f(x, y) = xy$ 的积分.

例子 2 (p.170:8(7)). 计算 Ω 为抛物线 $y^2 = x$ 和直线 $y = x - 2$ 围成的闭区域上函数 $f(x, y) = xy$ 的积分.

证明. 作图可知, Ω 为 y-型正则区域, 故

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma &= \int_{-1}^{2} \left(\int_{y^2}^{y+2} xydx \right) dy \\
&= \int_{-1}^{2} y \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=y^2}^{y+2} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} y \left((y+2)^2 - y^4 \right) dy \\
&= 45/8.
\end{aligned}$$

例子 3 (p. 130: 例 9.5). 计算积分

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \sin y / y dy.$$

由图可知, 区域 Ω 既可看成 x 型正则区域又可看成 y 型正则区域. 当看成 x 型区域时, 由于 $\sin y/y$ 的原函数不是初等函数, 因

此此时内积分不能用牛顿–莱布尼兹公式计算; 我们改用 y 型正则区域来计算

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \sin y/y dx \\
&= \int_0^1 (\sin y - y \sin y)\, dy \\
&= (-\cos y)|_0^1 + y \cos y|_0^1 - \int_0^1 \cos y dy \\
&= 1 - \sin 1.
\end{aligned}
$$

二重积分的变量替换公式 I

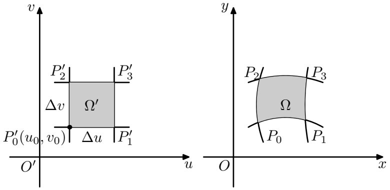


图 3: 面积微元的坐标变换

如图所示, 假设我们希望通过变量替换 $T : (u, v) \mapsto (x, y)$, $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 来计算二重积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma \overset{?}{=} \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v)) d\sigma'.$$

二重积分的变量替换公式 II

其中 $\Omega' = T(\Omega)$, 问题的关键是找到 Ω' 上关于 u, v 的面积微元 $d\sigma'$ 与 Ω 上关于 x, y 的面积微元 $d\sigma$ 的关系. 我们定义 u, v 的面积微元为左边阴影部分的面积, 即

$$d\sigma' = dudv \approx \Delta u \Delta v,$$

他经过变换 T 变为右边的曲边长方形的面积, 注意到它约等于由向量 $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$ 组成的平行四边形面积即

$$d\sigma = dxdy \approx |\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}|.$$

二重积分的变量替换公式 III

注意到

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P_1} &= (x(u_0+\Delta u, v_0), y(u_0+\Delta u, v_0)) \\ &\quad - (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \\ &\approx (x_u\Delta u, y_u\Delta u) = T_u(u_0, v_0)\Delta u\end{aligned}$$

同理,

$$\overrightarrow{P_0P_2} \approx (x_v\Delta v, y_v\Delta v) = T_v(u_0, v_0)\Delta v.$$

因此

$$d\sigma \approx |\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}| = \text{Jacobi}(T)\Delta u\Delta v \approx |\text{Jacobi}(T)|d\sigma'.$$

二重积分的变量替换公式 IV

其中

$$\mathrm{Jacobi}(T) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}.$$

于是我们得到如下的变量替换公式

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{\Omega'} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

极坐标系下重积分的计算

回忆极坐标系

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

因此

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

因此

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

极坐标系下重积分的计算例子 I

例子 4 (p. 171:14(1)). 利用极坐标计算二重积分

$$I = \iint_{\Omega} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma,$$

其中

$$\Omega = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq Rx \right\}.$$

极坐标系下重积分的计算例子 II

证明. 注意到 $x^2+y^2 \le Rx$ 等价于 $(x-R/2)^2+y^2 \le (R/2)^2$. 于是可令 $x = R/2 + r\cos\theta, y = r\sin\theta$; 则区域变为

$$\Omega' = \{(r,\theta) : 0 \le \alpha \le 2\pi, 0 \le r \le R/2\}.$$

因此, 利用极坐标变换公式知

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{R/2} \sqrt{3R^2/4 - r^2 - Rr\cos\theta}\, r\,dr\,d\theta$$

如果继续计算的话, 我们注意到 $\sqrt{a^2-\cos\theta}$ 在 $[0,2\pi]$ 上是一个椭圆积分, 它没有初等表达式. 或者先对 r 积分得到的表达式也是关于 θ 的一个比较复杂的三角函数.

极坐标系下重积分的计算例子 III

我们转而将极点取在原点，即令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; 则积分区域变为

$$\Omega' = \{(r,\theta) : -\pi/2 \le \theta \le \pi/2, 0 \le r \le R\cos\theta\}.$$

因此利用极坐标变换下的公式得到

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - r^2} r\,dr \\
&= 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - r^2} d(-(R^2 - r^2)/2) \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \left(2t^{3/2}/3\right) \Big|_{R^2(1-\cos^2\theta)}^{R^2}
\end{aligned}$$

极坐标系下重积分的计算例子 IV

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \left(R^3 - R^3 \sin^3\theta\right) d\theta \\
&= \frac{2}{3}R^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3\theta) d\theta \\
&= \frac{2}{3}R^3 \left(\pi/2 - \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\right) d\theta \\
&= \frac{2}{3}R^2(\pi/2 - 2/3) = \frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right).
\end{aligned}
$$

例子 5. 计算积分

$$I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} e^{\frac{xy}{x^2+y^2}}\,dx.$$

证明. 注意到 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 当且仅当 $x^2+(y-1)^2=1$ 且 $x\geq 0$, 而 $x=1+\sqrt{1-y^2}$ 当且仅当 $(x-1)^2+y^2=1$ 且 $x\geq 1$. 作图, 并令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 知原区域等价于

$$\Omega'=\{(r,\theta):0\leq\theta\leq\pi/4; 2\sin\theta\leq r\leq 2\cos\theta\}.$$

因此

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{2\sin\theta}^{2\cos\theta} e^{\cos\theta\sin\theta} r dr \\
&= 2\int_0^{\pi/4} e^{\sin(2\theta)/2}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} e^{\sin\theta/2} \cos\theta d\theta \\
&= \int_0^1 e^{t/2} dt = 2(\sqrt{e}-1).
\end{aligned}
$$

注意该题的关键是先固定 θ, 此时可将区域的边界 r 看作 θ 的两个函数图像围成的区域.

极坐标系换为直角坐标系

例子 6. 假设 $f(x, y)$ 连续, 试将积分

$$I=\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

改写成直角坐标系下的积分.

证明. 注意到极坐标区域为

$$\Omega' = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2a\cos\theta\}.$$

而因为 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 故 $x^2+y^2=r^2 \leq 2ar\cos\theta = 2ax$.
因此 Ω' 等价于

$$\Omega = \left\{(x,y) : (x-a)^2+y^2 \leq a^2 \& y \geq 0\right\}.$$

交换积分次序的应用

例子 7. 假设 $f(x)$ 为连续函数, 定义

$$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx,$$

试求 $F'(2)$ 的值.

证明. 作图可知, 原给定积分区域为 y 型正则区域, 它是由直线 $y=1, y=x, x=t$ 围成的三角形. 因为它同时也是 x 型区域, 故由 $f(x)$ 连续知道

$$F(t)=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^t f(x)(x-1)dx.$$

从而 $F'(t)=f(t)(t-1)$.

应用适当的变量替换求积分 I

例子 8 (p. 172:17(2)). 求由 Ω 为 $xy = 1, xy = 2, x = y$ 以及 $x = 4y$ 围成的闭区域上 $f(x, y) = x^2y^2$ 的积分.

证明. 注意到区域以及被积函数与 xy 有关, 故我们可令 $u = xy$, $v = x/y$ (作图知 $y \neq 0$). 则 Ω 在该变换下变为

$$\Omega' = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}.$$

而该变换的 Jacobian 为

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = -2\frac{x}{y} = -2v.$$

应用适当的变量替换求积分 II

因此由积分的换元公式为

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^2 du \int_1^4 u^2/(2v)dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 u^2 \ln v|_1^4 du \\
&= u^3|_1^2 \ln 4/6 = 7\ln 2/3.
\end{aligned}
$$

三重积分的定义与几何意义 I

假设 $f(x, y, z)$ 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 中闭区域 Ω 上的函数. 我们完全可以仿照二重积分的定义, 通过将 Ω 分划为小方体 $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$, 并取点 $\xi_i = (x_i, y_i, z_i) \in \Delta_i$, 作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|\Delta_i|.$$

若上述和式对任意的分划 $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$, 以及任意的点 $\xi_i = (x_i, y_i, z_i) \in \Delta_i$, 只要 $\lambda := \max_{i=1}^n \{|\Delta_i|\}$ 充分小, 我们都有极限

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|\Delta_i|$$

三重积分的定义与几何意义 II

存在, 则称 f 在 Ω 上可积, 且其积分等于 I, 记作

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz.$$

Ω 上的三重积分的几何意义是: 区域 Ω 上在点 (x, y, z) 处的密度为 $f(x, y, z)$ 的物质的质量.

直角坐标系下三重积分的计算: 柱线法 I

关于三重积分的计算, 其基本想法和二重积分一致. 即将其化为累次积分. 与二重积分类似, 我们可以通过 Ω 的不同类型来计算累次积分 (这里按照先算一重积分再算二重积分, 即柱线法; 还是先算二重积分再算一重积分, 即截面法).

定义 2.1. 如图所示, 假设 Ω 是由两个曲面 $z=\varphi_1(x,y)$, $z=\varphi_2(x,y)$ 以及平行于 z 轴的直线围成的区域, 即

$$\Omega=\{(x,y,z):\varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y),(x,y)\in\Omega_{xy}\},$$

其中 Ω_{xy} 表示 Ω 向 xOy 坐标平面投影得到的区域. 则称 Ω 为 xy-型正则区域. 完全类似定义 xz-型、yz-型正则区域.

直角坐标系下三重积分的计算: 柱线法 II

按照三重积分的几何意义, 我们可以得到 xy-型正则区域上的累次积分计算方法 (称为柱线法):

$$\iiint_{\Omega} f dxdydz = \iint_{\Omega_{xy}} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f dz.$$

柱线法计算三重积分 I

例子 9 (p. 174:26(2) 改编). 计算 Ω 为柱面 $x^2+(y-1)^2=1$ 以及平面 $z=0$, $z=2$ 围成的闭区域上函数 $f(x,y,z)=x^3+xy^2z^3$ 的积分.

证明. 作图可知, Ω 是标准的 xy-型区域

$$\Omega=\{(x,y,z):0\le z\le 2,(x,y)\in\Omega_{xy}\},$$

这里

$$\Omega_{xy}=\{(x,y):x^2+(y-1)^2\le 1\}.$$

柱线法计算三重积分 II

因此

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Omega_{xy}} dxdy \int_0^2 (x^3 + xy^2z^3)dz \\
&= \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} (2x^3 + 4xy^2)dx \\
&= \int_0^2 (x^4/2 + 2x^2y^2)\Big|_{x=-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} dy \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

注意, 注意到 Ω_{xy} 关于 y 轴对称, 而被积函数当 y, z 固定时, 关于 x 是奇函数从而积分为零.

例子 10 (p 173: 25(6)). 计算
$\Omega = \left\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq z \leq \pi/2 - y\right\}$ 上
$f(x, y, z) = x \sin(y + z)$ 的积分.
证明. 作图可知 Ω 可看作 xy-型区域, 而
$\Omega_{xy} = \left\{(x, y) : 0 \leq y \leq \pi/2, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\right\}$ 是 y-型区域, 从而

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega} x \sin(y + z) dxdydz \\
&= \iint_{\Omega_{xy}} dxdy \int_0^{\pi/2-y} x \sin(y + z) dz \\
&= \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\sqrt{y}} dx \int_0^{\pi/2-y} x \sin(y + z) dz \\
&= (\pi - 2)/4.
\end{aligned}$$

直角坐标系下三重积分的计算: 截面法 I

如果 Ω 向坐标轴的投影为闭区间, 且每个垂直于该坐标轴的平面与 Ω 相截都是一个平面闭区域, 则我们可以应用截面法.

定义 2.2. 假设 Ω 在 z-轴上的投影为区间 $[h_1, h_2]$, 且平面 $z = z$, $h_1 \le z \le h_2$ 与 Ω 的交为区域 Ω_z. 则 Ω 可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega_z, h_1 \le z \le h_2\}.$$

此时, 我们称 Ω 为 z-型正则区域. 完全类似地定义 x-型正则区域, y-型正则区域.

直角坐标系下三重积分的计算: 截面法 II

按照三重积分的几何意义, 我们可以得到 z-型正则区域上的累次积分计算方法 (称为截面法):

$$\iiint_\Omega f\,dxdydz = \int_{h_1}^{h_2} dz \iint_{\Omega_z} f\,dxdy.$$

截面法计算三重积分 I

例子 11 (p173:25(5)). 计算 Ω 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z = \pi$ 围成的闭区域上函数 $f(x,y,z) = \sin z$ 的积分.

证明. 由图可知, Ω 是标准的 z-型区域, 其中 $\Omega_z = \left\{(x,y) : 0 \le x^2+y^2 \le z^2\right\}$. 从而

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega} \sin z dx dy dz = \int_0^{\pi} dz \iint_{\Omega_z} \sin z dx dy \\
&= \int_0^{\pi} \pi z^2 \sin z dz = -\pi \int_0^{\pi} z^2 d\cos z \\
&= -\pi \left(z^2 \cos z |_{z=0}^{\pi} - 2\int_0^{\pi} z \cos z dz \right)
\end{aligned}
$$

截面法计算三重积分 II

$$
\begin{aligned}
&= -\pi\left(-\pi^2 - 2\int_0^\pi z d\sin z\right)\\
&= -\pi(-\pi^2 - 2z\sin z|_{z=0}^{\pi} + 2\int_0^\pi \sin z dz)\\
&= -\pi(-\pi^2 - 2\cos z|_{z=0}^{\pi})\\
&= \pi^3 - 4\pi.
\end{aligned}
$$

三重积分的变量替换公式

定理 2.3 (书上定理 9.3). 假设 $f(x,y,z)$ 是 Ω 上的连续函数，而变换 $T:\Omega'\to\Omega$, $(u,v,w)\to(x,y,z)$, 其中 $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$, 是空间闭区域 Ω' 与 Ω 之间的 C^1 变换. 若 T 的 Jacobian 行列式

$$J(T) := \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0, \quad \forall (u,v,w)\in\Omega',$$

则我们有如下的变量替换公式成立:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{\Omega'} f\circ T(u,v,w)|J|dudvdw.$$

三重积分的变量替换公式 I

回忆,

$$J(T) = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}.$$

我们常用的变量替换有如下两种:

三重积分的变量替换公式 II

- **柱坐标系**: $T:(r,\theta,z)\to(x,y,z)$, 其中

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

这里

$$\{(r,\theta,z): r>0, \theta\in[0,2\pi), z\in\mathbb{R}\}.$$

三重积分的变量替换公式 III

因此此时 $J(T)=r$, 故得到三重积分在柱坐标系下的计算公式

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV\\&\qquad=\iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,dr\,d\theta\,dz.\end{aligned}$$

注意到柱坐标的定义区域既是 $r\theta$-型正则区域也是 z-型正则区域. 故我们可以将上述 Ω' 上的重积分化为相应的累次积分.

三重积分的变量替换公式 IV

- **球坐标系**: $T:(r,\theta,\phi)\to(x,y,z)$, 其中

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta, \\ y = r\sin\phi\sin\theta, \\ z = r\cos\phi, \end{cases}$$

这里

$$\{(r,\theta,\phi): r>0, \theta\in[0,2\pi), \phi\in[0,\pi]\}.$$

三重积分的变量替换公式 V

直接计算得到此时 $J(T) = r^2 \sin\phi$, 故得到三重积分在球坐标系下的计算公式:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega'} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta) \cdot r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta.$$

应用柱坐标或者球坐标时, 我们应该注意 Ω' 的范围.

柱坐标系下计算三重积分 I

除了应用截面法, 我们还可以利用柱坐标系对绕轴旋转体上的三重积分.

例子 12. 利用截面法和柱坐标系分别计算 Ω 为平面曲线

$$\begin{cases} y^2 = 3z, \\ x = 0 \end{cases}$$

绕 z-轴旋转而成的曲面与平面 $z = 3$ 围成的区域上函数 $f(x, y, z) = (x + y)^2$.

柱坐标系下计算三重积分 II

证明. 截面法: 由图可知, Ω 是标准的 z-型区域, 其中 $\Omega_z = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3z\right\}$, 故可以应用截面法计算如下

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega} (x+y)^2 dV = \int_0^3 dz \iint_{\Omega_z} (x+y)^2 dxdy \\
&= \int_0^3 dz \int_{-\sqrt{3z}}^{\sqrt{3z}} dx \int_{-\sqrt{3z-x^2}}^{\sqrt{3z-x^2}} (x+y)^2 dy \\
&= \int_0^3 dz \int_{-\sqrt{3z}}^{\sqrt{3z}} \sqrt{3z - x^2} \left(2z + 4x^2/3\right) dx \\
&= \int_0^3 9\pi z^2/2 dz = 81\pi/2.
\end{aligned}
$$

柱坐标系下计算三重积分 III

上述计算中, 关于 x 的积分那一步其实是比较复杂的. 当注意到 $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, 而积分区域 Ω_z 关于 y 是对称的. 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 dz \iint_{\Omega_z} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3z}} r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^3 9\pi z^2/2 dz = 81\pi/2. \end{aligned}$$

柱坐标系下计算三重积分 IV

我们同样可以采用柱坐标来计算: 采用标准的柱坐标系

$$\Omega' = \left\{(r,\theta,z) : \theta \in [0,2\pi], z \in [0,3], r \in [0,\sqrt{3z}]\right\}.$$

若将 Ω' 看做 θ-型正则区域, 则 $\Omega_\theta = \left\{(r,z) : r^2 \leq 3z\right\}$, 由三重积分的柱坐标变换公式知

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega'} (r\cos\theta + r\sin\theta)^2 r\,dr\,d\theta\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{\Omega_\theta} (r^2 + r\sin 2\theta) r\,d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{\Omega_\theta} r^3 d\sigma, \quad \theta \text{ 的对称性}
\end{aligned}$$

柱坐标系下计算三重积分 V

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 dr \int_{r^2/3}^3 r^3 dz, \quad \Omega_\theta \text{ 视为 } r\text{-正则域}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{3z}} r^3 dr, \quad \Omega_\theta \text{ 视为 } z\text{-型正则域}$$

$$= 81\pi/2.$$

球坐标系下计算三重积分 I

对积分区域是锥面和球面、平面和球面围成的区域, 我们可以利用球坐标来计算积分.

例子 13 (p 174:27(5)). 计算锥面 $\phi = \pi/6$ 上方和球面 $r = 2$ 下方围成的区域 Ω 上函数 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的积分.

证明. 采用标准的球坐标, 我们知道被积区域

$$\Omega' = \{(r, \theta, \phi) : r \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi/6]\}.$$

球坐标系下计算三重积分 II

因此,

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV \\
&= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/6} r \cdot r^2 \sin\phi\, d\phi \\
&= 2\pi \int_0^2 r^3 dr \int_0^{\pi/6} \sin\phi\, d\phi \\
&= 2\pi(1-\sqrt{3}/2) = 8\pi(1-\sqrt{3}/2).
\end{aligned}
$$

将直角坐标转换为球坐标计算 I

例子 14 (p 175:29(4)). 用适当的坐标计算积分

$$I = \int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} dx \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz.$$

证明. 根据 I 的表达式, 我们知道 I 的积分区域 Ω 可以看做 xy-型正则区域. 且构成 Ω 的两个曲面分别为

$$z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

将直角坐标转换为球坐标计算 II

它们分别是以原点 O 为心半径为 $3\sqrt{2}$ 的上半球面以及过原点的锥面, 将它们围成的区域记作 $\tilde{\Omega}$. 容易解得它们的交线为 $z=3$ 平面上以点 $(0,0,3)$ 为心 3 为半径的圆. 很明显, $\tilde{\Omega}$ 向 xy 平面投影的区域为 $\left\{(x,y): x^2+y^2\leq 3^2\right\}$, 它在第一象限的部分恰好是 I 中关于 x,y 的积分区域. 故 I 的积分区域 Ω 是球面和锥面围成

将直角坐标转换为球坐标计算 III

的区域 $\tilde{\Omega}$ 的第一象限部分. 因此, 我们可以利用球坐标来计算:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{3\sqrt{2}} dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/4} r^2 \cdot r^2 \sin\phi d\phi \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{3\sqrt{2}} r^4 dr \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\phi d\phi \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(3\sqrt{2})^5}{5} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{486}{5}(\sqrt{2}-1)\pi.
\end{aligned}
$$

曲面的面积 I

假设光滑曲面 S 是由参数方程
$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in \Omega$ (平面区域), 给出的. 则类似前面关于二元函数坐标变换公式的推导, 我们知道此时空间曲边四边形 $P_0P_1P_3P_2$ 的面积可以用向量 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 与 $\overrightarrow{P_0P_2}$ 形成的平行四边形的面积来近似. 注意到, 对空间向量我们有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P_1} = \big(&x(u_0+\Delta u, v_0), y(u_0+\Delta u, v_0), z(u_0+\Delta u, v_0)\big)\\ &- \big(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)\big)\\ \approx& \big(x_u\Delta u, y_u\Delta u, z_u\Delta u\big) = \vec{r}_u(u_0, v_0)\Delta u,\end{aligned}$$

曲面的面积 II

同理,

$$\overrightarrow{P_0P_2} \approx \vec{r}_v(u_0, v_0)\Delta v.$$

因此曲面 S 的面积微元等于

$$dS = |\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}| \approx |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\Delta u\Delta v \approx |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|d\sigma'.$$

故我们得到曲面 S 的面积为

$$\iint_\Omega |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|dudv.$$

曲面的面积 III

特别地, 当曲面 S 可以看做 x, y 为自变量的函数 $z = z(x, y)$ 的图像时, 这时容易计算得到 $\vec{r}(u, v) = \vec{r}(x, y)$,

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + |\nabla z|^2},$$

因此函数 $z = z(x, y)$ 图像的表面积可表示为

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla z|^2} dx dy.$$

计算曲面的表面积 I

例子 15. 试计算椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 其中 $a,c>0$ 的表面积 S.

证明. 根据对称性, 我们可以通过计算上半椭球 $z=c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/a^2}$ 的表面积得到结果. 由于此时它是一个函数图像, 故令 $\Omega=\{(x,y):r^2=x^2+y^2\le a^2\}$, 则

$$
\begin{aligned}
S/2 &= \iint_\Omega \sqrt{1+|\nabla z|^2}d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1+\frac{c^2r^2}{a^2(a^2-r^2)}}rdr
\end{aligned}
$$

计算曲面的表面积 II

$$= \pi \int_0^{a^2} \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}\frac{t}{a^2 - t}}dt$$

$$= \begin{cases} \pi\left(a^2 + \dfrac{ac^2}{2\sqrt{a^2-c^2}} \ln \dfrac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{a-\sqrt{a^2-c^2}}\right), & a > c, \\ \pi\left(a^2 + ac \arccos(a/c)/\sqrt{1-a^2/c^2}\right), & c > a. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \pi\left(a^2 + c^2 \dfrac{\operatorname{arctanh} \sin\alpha}{\sin\alpha}\right), & a > c, \\ \pi\left(a^2 + c^2 \dfrac{\alpha}{\tan\alpha}\right), & c > a, \end{cases}$$

计算曲面的表面积 III

其中 α 是角离心率

$$\alpha = \begin{cases} \arccos(c/a), & c < a \\ \arccos(a/c), & a < c. \end{cases}$$

而

$$\operatorname{arctanh} \sin\alpha = \lambda \iff \tanh\lambda = \sin\alpha,$$

即

$$\sin\alpha = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}.$$

特别地, $\operatorname{arctanh} x \approx x + o(x)$, $x \to 0$, 因此当 $a = c$ 时, 我们得到球的表面积 $S_{a=c} = 4\pi a^2$.

计算闭区域的体积

根据三重积分的几何意义, 密度函数 $f(x,y,z)=1$ 在闭区域 Ω 上的三重积分就等于 Ω 的体积.

例子 16 (p 175:30(2)). 求抛物面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=18-x^2-y^2$ 围成的闭区域 Ω 的体积.

证明. 根据三重积分的几何意义知,

$$\begin{aligned}
|\Omega| &= \iiint_{\Omega} dV = \iint_{x^2+y^2\le 9} \int_{x^2+y^2}^{18-x^2-y^2} dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (18-2r^2) r\,dr \\
&= 81\pi.
\end{aligned}$$

课后习题 I

p. 170:8(6), 8(8);
p. 171:14(3),14(4), 14(5);
p. 172: 17(4)
p. 174:26(4)
p. 173:25(2), 25(7)
p. 175:29(2), 32(6)
p. 178: 14(1)
补充题:

课后习题 II

1. 试将关于连续函数 $f(x,y)$ 的积分

$$I=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\sin\theta}f(1+r\cos\theta,r^3\sin\theta)r^2dr$$

   改写为直角坐标系下的积分. (提示: 令
   $g(r\cos\theta,r\sin\theta)=rf(1+r\cos\theta,r^3\sin\theta)$)

2. 假设 $f(x)$ 为连续函数. 试求 $F'(2)$ 的值, 其中

$$F(t)=\int_1^t dy\int_{\sqrt{y}}^t f(x)dx,$$

3. 交换例子 6中积分 I 关于 r,θ 的积分次序.

课后习题 III

4. 试将例子 12中的柱坐标积分区域视为 z-型正则区域来计算积分.
5. 推导由母线 $z = f(x), x \in [a, b], a \geq 0$, 绕 z 轴旋转一周所形成的旋转体的表面积公式. 并利用它求半径为 R 的球的表面积.