微积分授课讲义

艾万君

上海交通大学 • 数学科学学院

2018 年 12 月

授课教师基本信息

学院	数学科学学院
姓名	艾万君
联系方式	aiwanjun@sjtu.edu.cn
授课学期	秋
办公室	数学楼 1201
上课时间	每周二/四 18:00-20:20
上课地点	中院 213
课后时间	每周五下午 14:00-17:00

概要

- 两类曲线积分与 Green 公式
  - 第一类与第二类曲线积分的概念
  - 两类曲线积分的计算公式
  - 计算第一类曲线积分的例子
  - 计算第二类曲线积分的例子
  - Green 公式
  - 计算平面曲线围成的面积
  - 利用 Green 公式求第二类曲线积分
  - 第二类曲线积分与路径无关
  - 非单连通区域上第二类曲线积分与道路无关性
  - 一次微分式的原函数存在性
  - 计算一次微分式的原函数

概要续

  - 求解一次微分方程

- 两类曲面积分与 Gauss 公式
  - 两类曲面积分的概念与计算
  - 利用第一类曲面积分计算表面积
  - Gauss 公式
- 联系曲线积分与曲面积分的 Stokes 公式
  - 利用 Stokes 公式计算曲线积分
- 无穷级数
  - 无穷级数的定义与基本性质
  - 几个常用级数的敛散性
  - 正项级数的敛散性判别法
  - 交错级数及其判别法

概要续

- 绝对收敛与条件收敛
- 利用级数的基本性质判断敛散性
- 幂级数及其基本性质
- 求幂级数的收敛域
- 求幂级数的和函数
- 求级数的值

第一类与第二类曲线积分的概念

我们将平面上的第一类曲线积分和第二类曲线积分分别记作

$$I_1 = \int_\gamma f(x,y)ds, \quad I_2 = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{s},$$

其中, $f(x,y)$ 是一个函数, ds 为 γ 的弧长微元; 而 $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, 而 $d\vec{s}$ 为有向弧长微元, 其大小为 ds, 而方向为单位切方向.

- 第一类曲线积分的物理意义是计算密度为 $f(x,y)$ 的平面曲线 γ 的质量; 而第二类曲线积分的物理意义是平面上一物体受到力 $\vec{F}(x,y)$ 的作用, 沿着有向弧 $\widehat{AB}$ 移动所做的功;
- 两类曲线积分的计算都是参数化, 然后 "换元". 计算第二类曲线积分时需要注意参数增加的方向要与曲线的定向一致否则要添加一个负号.

两类曲线积分的计算公式

为了计算第一类曲线积分, 我们将 γ 参数化为 $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[a,b]$, 则 $ds=|\gamma'(t)|dt=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$, 从而 “换元” 得到

$$I_1=\int_\gamma f(x,y)ds=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

完全类似地, 为了计算第二类曲线积分, 我们将 $\widehat{AB}$ 参数化为 $\gamma(t)=(x(t),y(t)), t\in[c,d]$ (这里 $\gamma(c)=A,\gamma(d)=B$), 则 $d\vec{s}=|ds|dt\cdot\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}=\gamma'(t)dt=(x'(t),y'(t))dt$, 从而 “换元” 得到

$$I_2=\int_{\widehat{AB}}\vec{F}(x,y)\cdot d\vec{s}=\int_c^d\vec{F}(x(t),y(t))\cdot\gamma'(t)dt.$$

两类曲线积分的计算公式续

注意到, $d\vec{s} = (x'(t), y'(t))dt = (dx, dy)$, 从而

$$I_2 = \int_c^d \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))dt = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

这正是两类曲线积分的联系.

两类曲线积分的计算公式续

特别地，当 γ 或者有向弧 $\overset{\frown}{AB}$ 可视为函数 $y=g(x), x\in[\alpha,\beta]$ 的图像时，则此时曲线可参数化为 $\gamma(t)=(t,g(t)), t\in[\alpha,\beta]$，从而第一类曲线积分的计算公式变成

$$I_1=\int_\alpha^\beta f(t,g(t))\sqrt{1+g'(t)^2}dt;$$

第二类曲面积分的计算公式变为

$$I_2=\int_\alpha^\beta \vec{F}(t,g(t))\cdot(1,g'(t))dt.$$

计算第一类曲线积分的例子

例子 1. 假设 γ 是椭圆周 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 位于第一象限的部分，求

$$I_1=\int_\gamma xyds.$$

计算第一类曲线积分的例子续

分析: 所求积分为第一类曲线积分, 我们只需适当参数化 γ 即可.

- 法一: 将 γ 参数化为 $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t), 0 \le t \le \pi/2$. 则

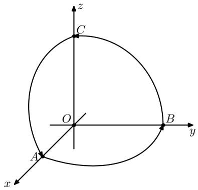
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} ab\cos t\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

- 法二: 将 γ 视作函数 $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, 0 \le x \le a$, 的图像. 则

$$I_1 = \int_0^a x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4+(b^2-a^2)x^2}{a^2-x^2}}dx.$$

作业: 完成上述计算.

计算第二类曲线积分的例子



例子 2. 如图所示, 假设曲线 γ 为球面在第一象限部分的边界曲线, 且从球面的外法向去看, 定向为逆时针. 试求曲线积分

$$I_2 = \oint_\gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz.$$

计算第二类曲线积分的例子续

分析: 所求积分为第二类曲线积分. 注意到将 x, y, z 轮换, 我们得到 $\overset{\frown}{AB}$ 变成 $\overset{\frown}{BC}$, 与 $\overset{\frown}{CA}$, 且被积表达式也不变, 从而

$$I_2 = 3 \oint_{\overset{\frown}{AB}} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz.$$

而有向弧 $\overset{\frown}{AB}$ 可参数化为 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t \le \pi/2$. 从而

$$\begin{aligned} I_2 &= 3 \int_{\overset{\frown}{AB}} \left(y^2 dx - x^2 dy\right) \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 t(-\sin t) - \cos^2 t \cos t\right) dt = -4. \end{aligned}$$

Green 公式

Green 公式联系了平面有界闭区域上的二重积分与该区域的边界曲线的第二类曲线积分. 具体而言, 假设平面闭区域 D 的边界曲线是逐段光滑的, 且函数 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 在 D 上有连续的一阶偏导数. 则有 *Green 公式*:

$$\int_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

具体应用时注意以下几点:

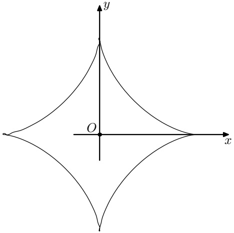
- D 连通但不一定单连通;
- ∂D 的定向为沿着正方向走, 区域位于左手边;
- P,Q 要求在闭区域上的偏导数都连续, 即在 D 上 (包括边界) 都没有奇点.

计算平面曲线围成的面积

假设平面简单 (即没有自交点) 闭曲线 γ 围成的区域为 D, 则 D 的面积可以计算为 (分别取特殊的 P, Q):

$$
\begin{aligned}
|D| &= \int_D dxdy \\
&= \frac{1}{2}\oint_{\partial D} xdy - ydx \\
&= \oint_{\partial D} xdy \\
&= -\oint_{\partial D} ydx.
\end{aligned}
$$

利用 Green 公式求平面图形的面积



例子 3. 求星形曲线 $\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3(t)), a > 0, t \in [0, 2\pi]$, 所围成的图形的面积.

利用 Green 公式求平面图形的面积续

分析: 尝试发现, 采用如下公式较为方便:

$$
\begin{aligned}
|D| &= \frac{1}{2}\oint_\gamma xdy - ydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t \cdot \cos t - a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\right) dt \\
&= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8}\pi a^2.
\end{aligned}
$$

利用 Green 公式求第二类曲线积分: 添加辅助曲线

例子 4 (p. 208: 例子 10.19 改编). 假设 γ 为从点 $A=(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周: $x^2+y^2=ax, a>0, y\geq 0$. 试求积分

$$I=\int_{\gamma}\left((e^x\sin y-m(x+y))\,dx+(e^x\cos y-mx)\,dy\right),$$

其中 m 为常数.

利用 Green 公式求第二类曲线积分: 添加辅助曲线续

分析: 由于 γ 不是闭曲线, 我们通过添加直径使得其变成闭曲线. 然后利用 Green 公式将该闭曲线上的第二类曲面积分化成二重积分.
具体过程留作习题.

利用 Green 公式求第二类曲线积分: 添加辅助曲线续

另一种类型是在应用 Green 公式时, 函数 P, Q 的一阶偏导数在 D 上不是连续的. 此时我们需要在 “挖掉奇点” 的区域上应用 Green 公式.

例子 5. 假设平面曲线 γ 为包含点 $P(1,0)$ 的简单闭曲线且取逆时针方向为正定向, 试求积分

$$I=\oint_\gamma \frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}.$$

利用 Green 公式求第二类曲线积分: 添加辅助曲线续

分析: 注意到

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-(x-1)^2}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

但此时, 由于点 A 包含在曲线 γ 围成的区域 D 中, 且是上述一阶偏导数的奇点. 从而我们不能直接应用 Green 公式. 为此, 作辅助曲线 $\gamma_1(t)=(1+\epsilon\cos t,\epsilon\sin t),\ 0\le t\le 2\pi$, 即为以点 A 为心, 半径为 ϵ 的圆周. 则我们可在 $\gamma\sqcup\gamma_1^-$ 围成的区域 $\tilde{D}$ 上应用 Green 公式得到

$$\oint_{\gamma\sqcup\gamma_1^-}\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=\iint_{\tilde{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

利用 Green 公式求第二类曲线积分: 添加辅助曲线续

从而 (注意定向)

$$I=\oint_{\gamma_1}\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\epsilon^2\cos^2 t-\epsilon^2\sin t\cdot(-\sin t)}{\epsilon^2}dt=2\pi.$$

第二类曲线积分与路径无关

作为 Green 公式的另一个应用, 我们知道当在平面单连通区域 D 中, 若 P, Q 在 D 上具有连续的一阶偏导数且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in D,$$

则沿着 D 中任何闭曲线 (想一想为什么不要求简单?)γ 我们都有

$$0 = \oint_\gamma P dx + Q dy.$$

这等价于说, 在 D 上, 第二类曲线积分

$$\oint_\gamma P dx + Q dy$$

与 D 中道路 γ 的选择无关.

利用曲线积分的道路无关性计算积分

正因为有上述定理, 我们可以在计算第二类曲线积分时适当的选择道路, 使得积分变得简单. 一般而言我们选择平行于坐标轴的道路较为方便.

例子 6. 假设 γ 是从 $A(1,2)$ 到 $B(2,1)$ 且与 Ox 轴不相交的逐段光滑曲线, 求积分

$$I=\int_{(1,2)}^{(2,1)}\frac{ydx-xdy}{y^2}.$$

利用曲线积分的道路无关性计算积分续

容易验证:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

从而在上半平面上满足积分区域与路径无关的条件. 故可选择平行于坐标轴的路径来计算积分

$$I = \int_1^2 1/y|_{y=2} dx + \int_2^1 -x/y^2|_{x=2} dy = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

作业: 请另选一条路径来计算上述积分.

非单连通区域上第二类曲线积分与道路无关性

前面关于第二类曲线积分与道路选择无关的讨论, 我们知道当

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in D$$

成立时, 要求 D 是一个单连通区域才有第二类曲线积分

$$\int_A^B Pdx + Qdy \tag{1.1}$$

与道路选择无关. 而对于含有奇点的区域, 这时我们只能在挖掉奇点的区域上验证条件

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in D \setminus P_0, \tag{1.2}$$

非单连通区域上第二类曲线积分与道路无关性续

这里 P_0 是 P, Q 的一阶偏导数不连续的点. 那么(1.2)成立时, 我们是否还成立: 在这个非单连通区域 $D \setminus P_0$ 上积分(1.1)与道路无关呢?

答案是否定的. 因为我们知道第二类曲线积分(1.1)与道路无关当且仅当沿着区域中的任意闭曲线有

$$0 = \oint_{\gamma} Pdx + Qdy.$$

而利用 $P_y = Q_x$, 我们可在 $D \setminus B_\delta(P_0)$ 上应用 Green 公式知

$$0 = \oint_{\gamma \sqcup \partial B_\delta(P_0)} Pdx + Qdy.$$

非单连通区域上第二类曲线积分与道路无关性续

可见要使第二类曲线积分(1.1)与路径选择无关, 当且仅当要求沿着奇点 P_0 的小圆周上的积分等于零, 即

$$0 = \oint_{\partial B_\delta(P_0)} Pdx + Qdy = 0.$$

非单连通区域上第二类曲线积分与道路无关性续

定理 1.1. 假设一次微分式 $Pdx + Qdy$ 在区域 $\tilde{D} := D \setminus \{P_i\}_{i=1}^n$ 上满足

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

则第二类曲线积分 $\int_\gamma Pdx + Qdy$ 与 $\tilde{D}$ 中的路径选择无关, 当且仅当

$$0 = \oint_{\partial B_\delta(P_i)} Pdx + Qdy, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

即它在绕着每个奇点的小圆周上的积分都等于零.

非单连通区域上第二类曲线积分与路径无关的判断

例子 7. 判断曲线积分

$$I = \int_{\gamma} \frac{x dx + y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

在下列区域上是否与路径的选择有关?

1. $D_1 : y > 0;$
2. $D_2 : x^2 + y^2 > 0.$

非单连通区域上第二类曲线积分与路径无关的判断续

分析: 第一个区域时上半平面为单连通区域且不包含奇点 (一阶偏导数不连续的点), 从而可以直接利用 $Q_x = P_y$ 来判断; 容易求得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{3xy}{r} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

从而在 D_1 内部积分 I 与路径无关.
对于第二个, 由于 D_2 等于全平面挖掉原点 $O(0,0)$, 根据上面的讨论, 只需验证 (因为明显 $P_y = Q_x$ 在 D_2 上成立):

$$\oint_{\partial B_\delta(O)} P dx + Q dy \stackrel{?}{=} 0.$$

非单连通区域上第二类曲线积分与路径无关的判断续

注意到,

$$\oint_{\partial B_\delta(O)} Pdx + Qdy = \frac{1}{\delta^3}\int_{x^2+y^2=\delta^2} xdx + ydy = 0.$$

其中, 最后一个等号我们利用了 Green 公式. 因此, 此时在 D_2 内, 积分 I 也与路径的选择无关.

一次微分式的原函数存在性

回忆, 我们称 $u = u(x, y)$ 为一次微分式 $Pdx + Qdy$ 在区域 D 上的原函数, 如果

$$du = Pdx + Qdy \Longleftrightarrow u_x = P, \quad u_y = Q, \quad \forall (x, y) \in D.$$

如果 P, Q 在 D 上具有一阶连续的偏导数, 则 u 的二阶混合偏导数连续, 从而相等, 即

$$Q_x = u_{yx} = u_{xy} = P_y, \quad \forall (x, y) \in D.$$

可见, $Q_x = P_y$ 在 D 上成立是当 P, Q 在 D 上具有连续的一阶偏导数时一次微分式 $Pdx + Qdy$ 存在原函数的必要条件.

一次微分式的原函数存在性续

根据书上的定理的证明过程, 我们知道有如下的充要条件: 假设 P, Q 在 D(不一定单连通) 上具有连续的一阶偏导数, 则下列条件之一成立当且仅当 $Pdx + Qdy$ 在 D 上存在原函数.

- 第二类曲线积分 $\int_\gamma Pdx + Qdy$ 与 D 中的道路 γ 选择无关 (此时 $u(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy + C$), 注意此时不要求区域 D 的单连通性;
  特别地, 当 $D = D_1 \setminus \{P_i\}_{i=1}^n$ 时, 其中 D_1 是单连通区域, 当且仅当
  $$0 = \oint_{\partial B_\delta(P_i)} Pdx + Qdy, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$
- 若 D 还是单连通区域, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 上处处成立;

计算一次微分式的原函数

常见的计算一次微分式的原函数的方法有如下三种:

- 特殊路径法: 当 $\int_\gamma Pdx + Qdy$ 与路径选择无关时 (例如: 平面单连通区域 D 上的一次微分式 $Pdx + Qdy$ 满足, P, Q 在 D 上具有连续的一阶偏导数, 且 $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in D$), 则该一次微分式存在原函数, 即存在 D 上的可微函数 $u = u(x, y)$, 使得

$$du = u_x dx + u_y dy = Pdx + Qdy, \quad \forall (x, y) \in D.$$

而且, 由于此时积分与路径无关, 我们知道

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy,$$

计算一次微分式的原函数续

就是一个原函数. 我们通常取特殊路径来计算上述积分:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy;$$

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx.$$

- 不定积分法: 注意到按照原函数的定义, 我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y),$$

计算一次微分式的原函数续

因此, 我们可首先对上述微分式之一对 x(或者 y) 两边同时求不定积分, 得到

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\phi(y)=\Phi(x,y)+\phi(y).$$

然后, 再次利用另一个方程得到

$$\frac{\partial(\Phi(x,y)+\phi(y))}{\partial y}=Q(x,y),$$

由此得到 $\phi'(y)$, 再次积分得到原函数.

计算一次微分式的原函数续

- 凑微分法: 对于特殊的一次微分式, 即满足

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

我们可将 $Pdx + Qdy$ 凑成 $dF(x, y)$, 则此时所求的原函数全体为

$$u(x, y) = F(x, y) + C.$$

计算一次微分式的原函数续

- 积分因子法: 有时, 所给的一次微分式并不能直接凑成全微分的形式. 但可以通过同时乘以一个函数 $\mu(x,y)$, 使得

$$\mu P dx + \mu Q dy$$

是一个可以凑成全微分的一次微分式. 我们称 μ 为积分因子. 寻找积分因子的方法是通过观察方程

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}.$$

讨论原函数的存在性并求原函数

例子 8. 讨论是否存在常数 n, 使得

$$\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^n},$$

在下列区域上存在原函数; 若存在, 求出一个原函数.

1. $D_1 : x > 0$;
2. $D_2 : x^2 + y^2 > 0$

讨论原函数的存在性并求原函数续

分析由于区域 D_1, D_2 都不含有 $P=\frac{x-y}{(x^2+y^2)^n}, Q=\frac{x+y}{(x^2+y^2)^n}$ 的奇点, 从而存在原函数的必要条件告诉我们必有

$$\frac{-(x^2+y^2)^n-2ny(x^2+y^2)^{n-1}(x-y)}{(x^2+y^2)^{2n}}=P_y$$
$$=Q_x=\frac{(x^2+y^2)^n-2nx(x^2+y^2)^{n-1}(x+y)}{(x^2+y^2)^{2n}},$$

移项后容易知道当且仅当 $n=1$.
对 D_1 由于是单连通区域, 故 $P_y=Q_x$ 表明此时存在原函数.
而对 D_2 由于不是单连通区域, $P_y=Q_x$ 成立并不能说明原函数的存在性. 我们可以通过判断第二类曲线积分是否与路径有关来

讨论原函数的存在性并求原函数续

判断原函数的存在性. 注意到, 沿着奇点 $O(0,0)$, 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 则积分

$$\oint_{\partial B_\delta} Pdx+Qdy = \frac{1}{\delta^2}\int_{\partial B_\delta)}(x-y)dx+(x+y)dy$$
$$= \frac{1}{\delta^2}\int_{x^2+y^2\le\delta^2}(1+1)dxdy = 2\pi \neq 0,$$

这里我们规定 ∂B_δ 为逆时针为正定向, 并利用了 Green 公式. 可见在 D_2 上并不满足积分与路径无关, 从而不存在原函数.

讨论原函数的存在性并求原函数续

我们在 D_1 上来求原函数 u.

- 道路积分法: 我们取 $A(0,1)$(想一想为什么不取 $A(1,0)$?) 为起点且在 D_1 中的道路来计算原函数:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{(0,1)}^{(x,y)} \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2} \\
&= \int_0^x \frac{x-y}{x^2+y^2}\Big|_{y=1} dx + \int_1^y \frac{x+y}{x^2+y^2} dy \\
&= \int_0^x \frac{x-1}{x^2+1} dx + \int_1^y \frac{x+y}{x^2+y^2} dy \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan(y/x).
\end{aligned}
$$

讨论原函数的存在性并求原函数续

- 凑微分: 注意到

$$\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2} = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} + \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2},$$

现在注意到 $d(x/y) = \frac{ydx-xdy}{y^2}$, 从而

$$\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = -\frac{1}{1+(x/y)^2}d(x/y) = \arctan(y/x) - \pi/2.$$

这里我们用了恒等式 $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$. 故

$$u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + \arctan(y/x) + C.$$

讨论原函数的存在性并求原函数续

- 不定积分法: 注意到

$$u_x = P = \frac{x-y}{x^2+y^2},$$

两边同时对 x 积分得到

$$u = \int \frac{x-y}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} - \frac{d(x/y)}{1+(x/y)^2}$$

$$= \ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan(x/y) + \phi(y).$$

因此再利用 $u_y = Q$ 得到

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = u_y + \phi'(y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} + \phi'(y) \implies \phi'(y) = 0,$$

从而 $\phi = C$. 故所求的原函数可表示为

$$u = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan(x/y) + C.$$

求解一次微分方程

我们知道, 如果 $Pdx + Qdy$ 在区域 D 上存在原函数, 即 $du = Pdx + Qdy$, 因此 $Pdx + Qdy = 0$ 在区域 D 上的通解就是

$$du = 0 \iff u = C.$$

可见, 求原函数和解一次微分方程的步骤是完全类似的. 我们这里仅举一个利用积分因子求解微分方程的例子, 更多练习请参考 p. 234: 26.

求解一次微分方程续

例子 9 (p. 234: 26(4)). 求解微分方程

$$(y+2xy^2)dx+(x-2x^2y)dy=0.$$

求解一次微分方程续

分析: 容易看出

$$1 + 4xy = P_y \neq Q_x = 1 - 4xy.$$

从而不能直接用凑微分或者道路积分以及不定积分的方法. 我们这里采用积分因子法: 假设有积分因子 μ, 则

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x \implies \mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y),$$

即

$$\mu_y y - \mu_x x + 2xy(\mu_y y + \mu_x x) = -8xy.$$

求解一次微分方程续

通过观察, 我们尝试

$$\mu_y y = \mu_x x = -2\mu.$$

有第一个等号知 x, y 是对称的, 故尝试 $\mu = (xy)^k$, 从而

$$\mu_y y = \mu_x x = kx^k y^k = -2\mu \implies k = -2.$$

从而我们找到了积分因子 $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$. 接下来可以用凑微分得到

$$\begin{aligned}
\mu(Pdx + Qdy) &= \frac{1}{(xy)^2} d(xy) + \frac{2(ydx - xdy)}{xy} \\
&= -d\left(\frac{1}{xy}\right) + 2d(x/y)/(x/y) \\
&= d\left(\ln(x/y)^2 - (xy)^{-1}\right).
\end{aligned}$$

求解一次微分方程续

故原微分方程的通解为

$$2\ln\frac{x}{y} - \frac{1}{xy} = C.$$

两类曲面积分的概念与计算

第一类和第二类曲面积分分别记作

$$II_1 = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS, \quad II_2 = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

其中 dS 是曲面 Σ 的面积微元;
$\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$; 而 $d\vec{S}$ 为有向面积微元, 其大小为 dS, 方向为单位法向 (要求定向与 Σ 的定向一致).

- 第一类曲面积分的物理意义是计算密度为 $f(x,y,z)$ 的空间曲面 Σ 的质量; 而第二类曲面积分的物理意义是单位时间内速度为 $\vec{F}$ 的空间向量场流过定向曲面 Σ 的流量;

两类曲面积分的概念与计算续

- 两类曲面积分的计算方法都是参数化, 然后 “换元”. 计算第二类曲面积分时需要注意参数化的法方向 $r_u \times r_v$ 要与曲面的定向一致.

假设 Σ 可参数化为 $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in D$, 则

$$dS = |r_u \times r_v| dudv.$$

而

$$d\vec{S} = |r_u \times r_v| dudv \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = r_u \times r_v dudv.$$

两类曲面积分的概念与计算续

于是

$$II_1 = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|r_u \times r_v| dudv.$$

而

$$II_2 = \iint_D (P(u,v), Q(u,v), R(u,v)) \cdot r_u \times r_v dudv.$$

通过外微分运算, 我们可以知道

$$II_2 = \iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{S} = \iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

计算第一类曲面积分

例子 10. 计算曲面积分

$$II = \iint_{\Sigma} \frac{dS}{(1+x+y+z)^2}$$

其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成的四面体的表面.

计算第一类曲面积分续

分析: 明显在每个坐标面上, 由于被积函数和区域的对称性知积分是一样的. 故我们只需计算 Oxy 面上的表面 Σ_1 以及第一象限的表面 Σ_4. 参数化

$$\Sigma_1 : r(x,y) = (x,y,0), \quad (x,y) \in \Sigma_1;$$
$$\Sigma_4 : r(x,y) = (x,y,1-x-y), \quad (x,y) \in \Sigma_1.$$

因此

$$dS_1 = dxdy, \quad dS_4 = \sqrt{3}dxdy.$$

计算第一类曲面积分续

从而

$$
\begin{aligned}
II &= 3\iint_{\Sigma_1} \frac{1}{(1+x+y)^2} dxdy + \iint_{\Sigma_1} \sqrt{3}\frac{1}{(1+1)^2} dxdy \\
&= 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dxdy + \frac{\sqrt{3}}{4}\iint_{\Sigma_1} dxdy \\
&= 3(-1/2+\ln 2) + \frac{\sqrt{3}}{8}.
\end{aligned}
$$

计算第二类曲面积分

例子 11. 求曲面积分

$$II = \iint_{\Sigma} yzdydz + xzdzdx + xydxdy,$$

其中 Σ 为平面 $x + y + z = 1$, 与坐标面围成的四面体的外侧.

计算第二类曲面积分续

分析: 由对称性知, 只需计算 Oxy 平面上的表面 Σ_1 与第一象限的表面 Σ_4. 它们的参数化如上题.

$$\Sigma_1 : r(x,y) = (x,y,0), \quad (x,y) \in \Sigma_1;$$
$$\Sigma_4 : \rho(x,y) = (x,y,1-x-y), \quad (x,y) \in \Sigma_1.$$

从而

$$r_x \times r_y = (0,0,1)dxdy, \quad (x,y) \in \Sigma_1$$

且与定向相反. 而

$$\rho_x \times \rho_y = (1,1,1)dxdy,$$

计算第二类曲面积分续

且与定向相同. 故

$$
\begin{aligned}
II &= -3\iint_{\Sigma_1}(0,0,xy)\cdot r_x\times r_y dxdy \\
&\quad + \iint_{\Sigma_1}(y(1-x-y),x(1-x-y),xy)\cdot(1,1,1)dxdy \\
&= -3\iint_{\Sigma_1} xydxdy + \iint_{\Sigma_1}(x+y-x^2-y^2-xy)dxdy \\
&= \iint_{\Sigma_1}(x+y-x^2-y^2-4xy)dxdy \\
&= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y-x^2-y^2-4xy)dy \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

利用第一类曲面积分计算表面积

我们知道, 根据第一类曲面积分的几何意义, 曲面的表面积可以表示为

$$|\Sigma| = \iint_{\Sigma} dS.$$

例子 12. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax, a > 0$, 截下部分的表面积.

利用第一类曲面积分计算表面积续

分析: 假设 Σ 为截下部分曲面, 即求

$$|\Sigma| = \iint_{\Sigma} dS.$$

首先将其参数化为

$$\Sigma : r(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \in D_{xy} = \left\{(x - a)^2 + y^2 \le a^2\right\}.$$

因此

$$dS = |r_x \times r_y| dxdy = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \sqrt{2} dxdy,$$

从而

$$|\Sigma| = \iint_{\Sigma} dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \cdot \pi a^2.$$

Gauss 公式

Gauss 公式联系了空间有界闭区域上的三重积分与其边界曲面上的第二类曲面积分. 即, 假设 $\vec{F} = (P, Q, R)$ 是分片光滑空间闭区域 Ω 上具有一阶连续偏导数的向量场, 则有如下的 Gauss 公式成立:

$$\iint_{\partial\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

其中 $\partial\Omega$ 取外侧.

利用 Gauss 公式计算第二类曲面积分

例子 13. 利用 Gauss 公式重新计算例子11.

利用 Gauss 公式计算第二类曲面积分续

分析: 直接利用 Gauss 公式知

$$II = \iiint_{\Omega} \left(\partial_x(yz) + \partial_y(xz) + \partial_z(xy)\right) dxdydz = 0.$$

利用 Gauss 公式计算第二类曲面积分续

例子 14. 计算曲面积分

$$II = \int_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy.$$

其中 Σ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, R > 0, z \geq 0$ 的内侧.

利用 Gauss 公式计算第二类曲面积分续

分析: 由于不是闭曲面, 我们需要先将其补成闭曲面然后再利用 Gauss 公式计算.

令 Σ_1 为圆盘 $z = 0, x^2 + y^2 \leq R^2$, 并取上侧为正定向. 则在 $\Sigma \cup \Sigma_1$ 上应用 Gauss 公式得到 (令 Ω 为上半球)

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega}(2x + 2y + 2z)dxdydz\\&\quad = -(II + \iint_{\Sigma_1} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy) = -II.\end{aligned}$$

又利用对称性知

$$II = -\iiint_{\Omega}(2x + 2y + 2z)dxdydz = -2\iint_{\Omega} zdxdydz = -\frac{\pi}{2}R^4.$$

联系曲线积分与曲面积分的 Stokes 公式

Stokes 公式联系了第二类曲面积分与其边界曲线的第二类曲线积分. 特别地, 当曲面为平面上一个区域时, Stokes 公式就是 Green 公式.

联系曲线积分与曲面积分的 Stokes 公式续

定理 3.1. 假设 Σ 是分片光滑的可定向曲面. 若函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 Σ 上有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_{\partial\Sigma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

其中 $\partial\Sigma$ 的正定向与 Σ 的正方向满足右手法则.

利用 Stokes 公式计算曲线积分

例子 15. 假设 γ 为椭圆周 $\gamma(t)=\left(a\sin^2 t, 2a\sin t\cos t, a\cos^2 t\right)$, $t\in[0,\pi]$, 且规定参数增加的方向为正方向. 计算曲线积分

$$I=\oint_\gamma (x+y)dx+(3x+y)dy+zdz.$$

利用 Stokes 公式计算曲线积分续

分析: 如果直接利用第二类曲面积分的计算方法, 我们得到

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^\pi \Big(& \big(a \sin^2 t + a \sin 2t\big)\, a \sin 2t + \big(3a \sin^2 t + a \sin 2t\big)\, 2a \cos 2t \\
& - a \cos^2 t a \sin 2t \Big)\, dt \\
= a^2 & \int_0^\pi \big((\sin 2t + \cos 2t) \sin 2t + 6 \sin^2 t \cos 2t\big)\, dt \\
= a^2 & \int_0^\pi \Big(\sqrt{2} \sin (2t + \pi/4) \sin 2t + 3\,(1 - \cos 2t) \cos 2t\Big)\, dt \\
= a^2 & \int_0^\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\cos \pi/4 - \cos(4t + \pi/4)) - \frac{3}{2}(1 + \cos 4t)\right) dt = -\pi a^2
\end{aligned}
$$

利用 Stokes 公式计算曲线积分续

另一个方法是利用 Stokes 公式. 为此我们需要先将 γ 视为某个曲面的边界. 注意到, 消去参数 t 可以得到 γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x+z=a \\ x^2+\dfrac{y^2}{2}+z^2=a^2. \end{cases}$$

因此, 可视为平面 $x+z=a$ 与椭球面 $x^2+y^2/2+z^2=a^2$ 的交线. 比较方便的是视作平面 (回忆该平面在 Oxy 平面的投影区域的求法是消掉 z)

$$\Sigma : r(x,y)=(x,y,a-x), \quad (x,y)\in D_{xy},$$

利用 Stokes 公式计算曲线积分续

其中 $D_{xy}:=(x-a)^2/(a/2)^2+y^2/a^2\leq 1$. 故此时 Σ 参数化的法方向为

$$\vec{n}=(1,0,1),$$

与曲面的正定向相反 (即此时负法向和边界曲线的正定向成右手系). 这样, 利用 Stokes 公式知道

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}-dxdy+3dxdy=2\iint_{\Sigma}dxdy\\&=-2\iint_{D_{xy}}(0,0,1)\cdot(1,0,1)dxdy=-2|D_{xy}|=-2\cdot\pi a\frac{a}{2}=-\pi a^2.\end{aligned}$$

无穷级数的定义与基本性质

我们将数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依次加起来所组成的无穷和式称为无穷级数, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 如果部分和极限存在, 即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$; 否则称为发散的. 收敛级数有如下基本性质:

- 两个收敛级数可以逐项相加;

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n).$$

- 一个收敛级数可以乘以一个常数;

$$\sum_{n=1}^{\infty} c u_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

无穷级数的定义与基本性质续

- 添加删除改变有限项不改变级数敛散性;
- 对收敛级数任意有限项加括号后形成的新级数仍然收敛到原级数;
- 收敛级数的通项 u_n 必须满足: $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$.

几个常用级数的敛散性

- 等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0$: 当 $|q| < 1$ 时绝对收敛; 当 $|q| \geq 1$ 时发散;
- p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$: 当 $p > 1$ 时 (绝对) 收敛; $p \leq 1$ 时发散;
- $\sum\limits_{n=2} \frac{1}{n \ln^p n}$: 当 $p > 1$ 时 (绝对) 收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$: 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛; 当 $p \leq 0$ 时发散.

按照定义判断级数的收敛性

我们知道, 相邻两项依次添加括号的级数收敛不一定有原级数收敛, 例如

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

就是一个反例.

按照定义判断级数的收敛性续

例子 16. 假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 相邻两项依次添加括号的级数收敛，即

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \cdots + (u_{2n-1} + u_{2n}) + \cdots$$

收敛. 若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, 则原级数也收敛, 并且和加括号的级数具有相同的极限.

按照定义判断级数的收敛性续

事实上, 若记 $T_n = \sum_{k=1}^{n}(u_{2k-1} + u_{2k})$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$, 则根据题意知

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} T_n = S.$$

根据数量极限的定义知, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 收敛, 当且仅当其奇子列和偶子列都收敛到同一个极限值. 现在注意到

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0 \implies \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S.$$

正项级数的敛散性判别法

每个通项都是非负数的级数叫做正项级数. 关于正项级数我们有如下判别法:

- 充要条件: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是其部分和序列 $\{S_n\}$ 有上界;
- 比较判别法: 若 $0 \le a_n \le b_n, n = N, N+1, \ldots$ 都成立, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; 关于发散, 只需用逆否命题.
- 比较判别法的极限形式: 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是正项级数, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = l$, 则当 $l \in [0, +\infty)$ 时 (此时可换为上极限), $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; 当 $l \in (0, +\infty]$ 时 (此时可换为下极限), $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

正项级数的敛散性判别法续

- 比值/根值判别法: 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 若 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = l$, 或者 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, 则当 $l \in [0,1)$ 时 (可换作上极限), 级数收敛; 若 $l \in (1,+\infty]$ 时 (可换作下极限), 则原级数发散; 若 $a_{n+1} \geq a_n$ 对充分大的 n 都成立, 则由必要性知此时发散 (除非通项都为零); 一般而言对 $l=1$ 不能判断级数的敛散性.
- 积分判别法: 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数. 积分判别法是说, 如果存在一个单调递减的正函数使得对充分大的 $n \geq N$, 恰好有 $a_n = f(n)$, 则原级数与反常积分 $\int_N^{\infty} f(x)dx$ 同敛散.

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n} q^n, |q| < 1;$

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n} q^n, |q| < 1;$

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n} q^n, |q| < 1; 0 \leq a_n \leq q^n, |q| < 1$ 知收敛;
2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$;

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n}q^n, |q| < 1; 0 \le a_n \le q^n, |q| < 1$ 知收敛;
2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$;

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n}q^n, |q| < 1; 0 \le a_n \le q^n, |q| < 1$ 知收敛;
2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}; a_n \sim \frac{1}{n^{7/6}}, p = 7/6 > 1$ 知收敛;
3. $a_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^p}, p > 0;$

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n}q^n, |q| < 1; 0 \leq a_n \leq q^n, |q| < 1$ 知收敛;
2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}; a_n \sim \frac{1}{n^{7/6}}, p = 7/6 > 1$ 知收敛;
3. $a_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^p}, p > 0;$

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n} q^n, |q| < 1; 0 \le a_n \le q^n, |q| < 1$ 知收敛;
2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}; a_n \sim \frac{1}{n^{7/6}}, p = 7/6 > 1$ 知收敛;
3. $a_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^p}, p > 0; \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x} = 0$ (洛必达法则), 然后和 $b_n = 1/n$ 比较知发散;
4. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n}q^n, |q| < 1; 0 \le a_n \le q^n, |q| < 1$ 知收敛;
2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}; a_n \sim \frac{1}{n^{7/6}}, p = 7/6 > 1$ 知收敛;
3. $a_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^p}, p > 0; \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x} = 0$ (洛必达法则), 然后和 $b_n = 1/n$ 比较知发散;
4. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n} q^n, |q| < 1; 0 \le a_n \le q^n, |q| < 1$ 知收敛;
2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}; a_n \sim \frac{1}{n^{7/6}}, p = 7/6 > 1$ 知收敛;
3. $a_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^p}, p > 0; \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x} = 0$ (洛必达法则), 然后和 $b_n = 1/n$ 比较知发散;
4. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; (\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln\ln n} = n^{\ln\ln n} > n^2$, 知收敛;
5. $a_n = \frac{1}{1+a^n}, a > 0;$

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n} q^n, |q| < 1; 0 \le a_n \le q^n, |q| < 1$ 知收敛;
2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}; a_n \sim \frac{1}{n^{7/6}}, p = 7/6 > 1$ 知收敛;
3. $a_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^p}, p > 0; \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x} = 0$ (洛必达法则), 然后和 $b_n = 1/n$ 比较知发散;
4. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; (\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln\ln n} = n^{\ln\ln n} > n^2$, 知收敛;
5. $a_n = \frac{1}{1+a^n}, a > 0;$

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n}q^n, |q| < 1; 0 \leq a_n \leq q^n, |q| < 1$ 知收敛;
2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}; a_n \sim \frac{1}{n^{7/6}}, p = 7/6 > 1$ 知收敛;
3. $a_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^p}, p > 0; \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x} = 0$ (洛必达法则), 然后和 $b_n = 1/n$ 比较知发散;
4. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; (\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln\ln n} = n^{\ln\ln n} > n^2$, 知收敛;
5. $a_n = \frac{1}{1+a^n}, a > 0$; 用根值判别法知道, 当 $a > 1$ 时, $\sqrt[n]{a_n} = 1/a < 1$ 从而收敛; 当 $a \leq 1$ 时, 不能用根值/比值判别法, 但是此时易见 $a_n \not\to 0$ 知发散;
6. $a_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$;

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n} q^n, |q| < 1; 0 \leq a_n \leq q^n, |q| < 1$ 知收敛;
2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}; a_n \sim \frac{1}{n^{7/6}}, p = 7/6 > 1$ 知收敛;
3. $a_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^p}, p > 0; \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x} = 0$ (洛必达法则), 然后和 $b_n = 1/n$ 比较知发散;
4. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; (\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln\ln n} = n^{\ln\ln n} > n^2$, 知收敛;
5. $a_n = \frac{1}{1+a^n}, a > 0$; 用根值判别法知道, 当 $a > 1$ 时, $\sqrt[n]{a_n} = 1/a < 1$ 从而收敛; 当 $a \leq 1$ 时, 不能用根值/比值判别法, 但是此时易见 $a_n \not\to 0$ 知发散;
6. $a_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$;

判断下列级数的敛散性

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

1. $a_n = \frac{1}{n}q^n, |q| < 1; 0 \leq a_n \leq q^n, |q| < 1$ 知收敛;
2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}; a_n \sim \frac{1}{n^{7/6}}, p = 7/6 > 1$ 知收敛;
3. $a_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^p}, p > 0; \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x} = 0$ (洛必达法则), 然后和 $b_n = 1/n$ 比较知发散;
4. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; (\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln\ln n} = n^{\ln\ln n} > n^2$, 知收敛;
5. $a_n = \frac{1}{1+a^n}, a > 0$; 用根值判别法知道, 当 $a > 1$ 时, $\sqrt[n]{a_n} = 1/a < 1$ 从而收敛; 当 $a \leq 1$ 时, 不能用根值/比值判别法, 但是此时易见 $a_n \not\to 0$ 知发散;
6. $a_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n; a_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{-n} \to e^{-1/3}$ 知发散;

判断下列级数的敛散性 (续)

例子 17. 用适当方法判断下列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性

1. $a_n = \sin na;\ a \neq k\pi;$

判断下列级数的敛散性 (续)

例子 17. 用适当方法判断下列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性

1. $a_n = \sin na; a \neq k\pi;$

判断下列级数的敛散性 (续)

例子 17. 用适当方法判断下列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性

1. $a_n = \sin na$; $a \neq k\pi$; 发散; 因假设 $a_n = \sin na \to 0$, 则 $\sin(n+1)a \to 0$, 展开知 $\cos na \to 0$ 矛盾.
2. $a_n = \frac{(n!^2)}{(2n)!}$;

判断下列级数的敛散性 (续)

例子 17. 用适当方法判断下列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性

1. $a_n = \sin na$; $a \neq k\pi$; 发散; 因假设 $a_n = \sin na \to 0$, 则 $\sin(n+1)a \to 0$, 展开知 $\cos na \to 0$ 矛盾.
2. $a_n = \frac{(n!^2)}{(2n)!}$;

判断下列级数的敛散性 (续)

例子 17. 用适当方法判断下列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性

1. $a_n = \sin na$; $a \neq k\pi$; 发散; 因假设 $a_n = \sin na \to 0$, 则 $\sin(n+1)a \to 0$, 展开知 $\cos na \to 0$ 矛盾.
2. $a_n = \frac{(n!^2)}{(2n)!}$; 法一: $a_n = \frac{n!}{(n+1)\cdots(2n)} < \frac{1}{2^n}$ (因为 $\frac{k}{n+k} < \frac{1}{2}$); 法二: $a_{n+1}/a_n = \frac{n++1}{2(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1$ 知收敛;
3. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$;

判断下列级数的敛散性 (续)

例子 17. 用适当方法判断下列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性

1. $a_n = \sin na$; $a \neq k\pi$; 发散; 因假设 $a_n = \sin na \to 0$, 则 $\sin(n+1)a \to 0$, 展开知 $\cos na \to 0$ 矛盾.
2. $a_n = \frac{(n!^2)}{(2n)!}$; 法一: $a_n = \frac{n!}{(n+1)\cdots(2n)} < \frac{1}{2^n}$ (因为 $\frac{k}{n+k} < \frac{1}{2}$); 法二: $a_{n+1}/a_n = \frac{n++1}{2(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1$ 知收敛;
3. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$;

判断下列级数的敛散性 (续)

例子 17. 用适当方法判断下列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性

1. $a_n = \sin na$; $a \neq k\pi$; 发散; 因假设 $a_n = \sin na \to 0$, 则 $\sin(n+1)a \to 0$, 展开知 $\cos na \to 0$ 矛盾.
2. $a_n = \frac{(n!^2)}{(2n)!}$; 法一: $a_n = \frac{n!}{(n+1)\cdots(2n)} < \frac{1}{2^n}$ (因为 $\frac{k}{n+k} < \frac{1}{2}$); 法二: $a_{n+1}/a_n = \frac{n++1}{2(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1$ 知收敛;
3. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$; 法一: 直接和已知级数比较 $a_n > b_n = \frac{1}{n\ln n}$, 而后者发散知原级数发散; 法二: 由 $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, p > 0$ 知, $\sqrt{n}\ln n/n \to 0$, 从而原级数发散;

判断下列级数的敛散性 (续)

4. $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$;

判断下列级数的敛散性 (续)

4. $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$;

判断下列级数的敛散性 (续)

4. $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$; 法一: 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 对充分大的 n, $a_n < \frac{2}{2^n}$ 知原级数收敛; 法二: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{1/n^2}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$ 知收敛; 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/n^2}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln n/n^2} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x/x^2} = 1$(洛必达);
5. $a_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$;

判断下列级数的敛散性 (续)

4. $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$; 法一：因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 对充分大的 n, $a_n < \frac{2}{2^n}$ 知原级数收敛；法二：$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{1/n^2}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$ 知收敛；其中 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/n^2}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln n/n^2} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x/x^2} = 1$(洛必达)；
5. $a_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$;

判断下列级数的敛散性 (续)

4. $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$; 法一: 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 对充分大的 n, $a_n < \frac{2}{2^n}$ 知原级数收敛; 法二: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{1/n^2}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$ 知收敛; 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/n^2}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln n/n^2} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x/x^2} = 1$(洛必达);
5. $a_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$; $a_n = \ln\left(1 + 1/n^2\right) \sim 1/n^2$ 知收敛;
6. $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$;

判断下列级数的敛散性 (续)

4. $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$; 法一: 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 对充分大的 n, $a_n < \frac{2}{2^n}$ 知原级数收敛; 法二: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{1/n^2}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$ 知收敛; 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/n^2}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln n/n^2} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x/x^2} = 1$(洛必达);
5. $a_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$; $a_n = \ln\left(1 + 1/n^2\right) \sim 1/n^2$ 知收敛;
6. $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$;

判断下列级数的敛散性 (续)

4. $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$; 法一: 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 对充分大的 n, $a_n < \frac{2}{2^n}$ 知原级数收敛; 法二: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{1/n^2}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$ 知收敛; 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/n^2}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln n/n^2} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x/x^2} = 1$(洛必达);
5. $a_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$; $a_n = \ln\left(1 + 1/n^2\right) \sim 1/n^2$ 知收敛;
6. $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(1+1/n)^n} > 1$, 从而通项不趋于 0, 故发散。注意直接用比值判别法失效;
7. $a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$;

判断下列级数的敛散性 (续)

4. $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$; 法一: 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 对充分大的 n, $a_n < \frac{2}{2^n}$ 知原级数收敛; 法二: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{1/n^2}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$ 知收敛; 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/n^2}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln n/n^2} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x/x^2} = 1$(洛必达);
5. $a_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$; $a_n = \ln\left(1 + 1/n^2\right) \sim 1/n^2$ 知收敛;
6. $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(1+1/n)^n} > 1$, 从而通项不趋于 0, 故发散。注意直接用比值判别法失效;
7. $a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$;

判断下列级数的敛散性 (续)

4. $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$; 法一: 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 对充分大的 n, $a_n < \frac{2}{2^n}$ 知原级数收敛; 法二: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{1/n^2}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$ 知收敛; 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/n^2}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln n/n^2} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x/x^2} = 1$(洛必达);
5. $a_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$; $a_n = \ln\left(1 + 1/n^2\right) \sim 1/n^2$ 知收敛;
6. $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(1+1/n)^n} > 1$, 从而通项不趋于 0, 故发散。注意直接用比值判别法失效;
7. $a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$; $a_n < \int_0^{1/n} \sqrt{x} dx < \frac{1}{n^{3/2}}$, $p = 3/2 > 1$ 级数收敛;

判断下列级数的敛散性 (续)

8. $a_n = \frac{1}{n(\ln\ln n)^q}, n \geq 3;$

判断下列级数的敛散性 (续)

8. $a_n = \frac{1}{n(\ln \ln n)^q}, n \geq 3;$

判断下列级数的敛散性 (续)

8. $a_n = \frac{1}{n(\ln\ln n)^q}, n \geq 3$; 令 $f(x) = \frac{1}{x(\ln\ln x)^q}$, 则

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x(\ln\ln x)^q} = \int_3^\infty \frac{d\ln x}{(\ln\ln x)^q} = \int_{\ln 3}^\infty \frac{dx}{\ln^q x}.$$

注意到利用洛必达法则知 $\frac{\ln^q x}{x} \to 0, x \to \infty$, 因此对充分大的 x, 有 $1/\ln^q x > 1/x$, 而后者在 $[N, +\infty)$ 的积分发散;

交错级数及其判别法

通项正负相间的级数称为交错级数. 关于交错级数的判别法主要是 Leibniz 判别法: 若 $|a_n|$ 单调递减趋于零, 则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛. 此外, 其余项 $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k < |a_{n+1}|$.

绝对收敛与条件收敛

回忆, 一个级数如果其通项的绝对值收敛, 则称该级数为绝对收敛的; 我们知道, 绝对收敛的级数一定收敛. 若一个级数本身收敛但不绝对收敛, 则称为条件收敛.

例子 18. 判断下列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性, 若收敛请指明是条件收敛还是绝对收敛:

1. $a_n = (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;
2. $a_n = (-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$;
3. $a_n = (-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$;

绝对收敛与条件收敛续

分析: 我们先判断绝对收敛性, 此时是正项级数.
对第一个级数, 容易看到 $\frac{|a_n|}{\frac{1}{n}} \to 2$, 因此不是绝对收敛的; 而由于原级数是交错级数, 注意到

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2n^2+3n}{2n^2+5n+2} < 1,$$

由此易知 $|a_n|$ 是单调递减趋于零的. 故原级数条件收敛;
对第二个级数, 注意到 n 充分大时, $|a_n| > 1/n$, 因此不是绝对收敛的; 而由于 $\ln x/x$ 时单调递减函数 $(x > e)$, 由此易知原级数条件收敛;
对第三个级数, $|a_n| = \sin \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \sim \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{4/3}}$, 由 p 判别法知原级数绝对收敛.

利用级数的基本性质判断敛散性

判断下列交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 是绝对收敛还是条件收敛:

1. $a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}, a_{2n} = \frac{1}{3^n};$
2. $a_{2n-1} = \frac{1}{3n-1}, a_{2n} = \frac{1}{3n-2};$
3. $a_n = \frac{-1}{\sqrt{n}+(-1)^n};$

利用级数的基本性质判断敛散性续

分析, 上述级数虽然都是交错级数但是并不满足单调递减性, 从而不能直接利用 Leibniz 判别法判断收敛性.

对第一个级数, 明显 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 是发散的, 从而原级数也是发散的.

利用级数的基本性质判断敛散性续

对第二个级数, 注意到

$$a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{1}{(3n-1)(3n-2)} \sim \frac{1}{9n^2},$$

故加括号后的级数收敛; 又由于 a_{2n-1} 与 a_{2n} 都趋于零, 从而原级数收敛; 最后注意到, 其绝对值的部分和 $S_{2n} > \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$, 而后者发散, 从而原级数不是绝对收敛的.

利用级数的基本性质判断敛散性续

对第三个级数, 通过分子有理化知

$$-a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1} - \frac{1}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{1}{n-1},$$

可见原级数发散.

幂级数及其基本性质

前面我们学习了数项级数, 即该级数的通项是一个数; 完全类似地, 我们可以定义函数项级数, 即通项为一个函数. 特别地, 当通项为幂函数 $a_n(x-x_0)^n$ 时, 我们称对应的级数为幂级数. 完全类似数项级数来定义收敛性余项以及和函数.

- 关于幂级数, 我们有重要的 Abel 定理: 它告诉我们, 函数项级数的收敛域要么是一个点 (收敛半径 $R=0$), 要么是整个实数轴 (收敛半径 $R=+\infty$), 要么是一个区间 $(-R,R)$(开闭待定), 此时收敛半径为 $R\in(0,+\infty)$. 且幂级数在 $(-R,R)$ 上是绝对收敛的.
- 求幂级数的收敛域, 一般我们是通过模比值/模根值法得到其收敛半径, 然后再判断端点处的敛散性.

幂级数及其基本性质续

- 两个幂级数在其公共的收敛开区间上可以作线性运算与乘法;
- 幂级数在其收敛半径所构成的开区间 $(-R, R)$ 内可以逐项求导/求积, 且新级数的收敛半径不变;
- 幂级数的和函数在其收敛点处是 (单侧) 连续的;
- 在求幂级数的收敛域时, 我们可以先通过模比值/根值 (缺项的话比值/根值) 判别法求得收敛半径, 然后再判断端点处的敛散性. 注意在端点处, 比值/根值判别法失效: 此时一般采用 1. 通项极限非零知发散; 2. 比较判别法 (等比/p 级数); 3. 交错级数的话 Leibniz 判别法; 4. 分解成更加简单的级数的和.

求幂级数的收敛域

例子 19. 求下列幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛域 I:

1. $a_n(x) = \frac{x^n}{n2^n}$;

求幂级数的收敛域

例子 19. 求下列幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛域 I:

1. $a_n(x) = \frac{x^n}{n2^n}$; 模比值知 $R = 2$, 然后判断端点处得 $I = [-2, 2)$;
2. $a_n(x) = \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$;

求幂级数的收敛域

例子 19. 求下列幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛域 I:

1. $a_n(x) = \frac{x^n}{n2^n}$; 模比值知 $R = 2$, 然后判断端点处得 $I = [-2, 2)$;
2. $a_n(x) = \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$; 模比值知 $R = 1/3$, 当 $x = -2/3$ 时, 和 $1/n$ 比较知发散; 当 $x = -4/3$ 时, $a_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 知收敛. $I = [-4/3, -2/3)$;

求幂级数的收敛域 (续)

3. $a_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

求幂级数的收敛域 (续)

3. $a_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; 是缺项幂级数, 不能直接应用模比值/根值法求收敛半径. 此时一般直接用比值判别法/根值判别法求收敛域; 注意到 $|a_{n+1}/a_n| \to |x|^2$, 由比值判别法知当 $|x| < 1$ 时, 幂级数绝对收敛, 而当 $|x| > 1$ 时原幂级数发散 (注意原级数当 $x < 0$ 时可以提出符号变成正项级数). 从而该幂级数的收敛半径为 1. 在判断端点处, 注意到 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 知原级数收敛; $I = [-1, 1]$.
4. $a_n(x) = 4^{n^2} x^{n^2}$;

求幂级数的收敛域 (续)

3. $a_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; 是缺项幂级数, 不能直接应用模比值/根值法求收敛半径. 此时一般直接用比值判别法/根值判别法求收敛域; 注意到 $|a_{n+1}/a_n| \to |x|^2$, 由比值判别法知当 $|x| < 1$ 时, 幂级数绝对收敛, 而当 $|x| > 1$ 时原幂级数发散 (注意原级数当 $x < 0$ 时可以提出符号变成正项级数). 从而该幂级数的收敛半径为 1. 在判断端点处, 注意到 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 知原级数收敛; $I = [-1, 1]$.
4. $a_n(x) = 4^{n^2}x^{n^2}$; 根值判别法 $\sqrt[n]{|a_n(x)|} = |4x|^n$; 可见 $|x| < 1/4$ 时绝对收敛; $|x| \geq 1/4$ 时, 由于通项不趋于零知原级数发散; 从而 $I = (-1/4, 1/4)$;

求幂级数的收敛域 (续)

5. $a_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{(3n-1)^{3n}(x-2)^n}{(2n-3)^{3n}}$;

求幂级数的收敛域 (续)

5. $a_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{(3n-1)^{3n}(x-2)^n}{(2n-3)^{3n}}$; 模根值求得
   $\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \frac{(3n-1)^3}{(2n-3)^3} \to \frac{27}{8}$; $R = 8/27$; 在端点处, 易见
   $|a_n| = \frac{(3n-1)^{3n}}{(2n-3)^{3n}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3n} = (1 + 7/(6n-9))^{6n/2} \to e^{7/2}$ 知发散;
6. $a_n(x) = (1 + 1/n)^{n^2}(x-1)^n$;

求幂级数的收敛域 (续)

5. $a_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{(3n-1)^{3n}(x-2)^n}{(2n-3)^{3n}}$; 模根值求得
   $\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \frac{(3n-1)^3}{(2n-3)^3} \to \frac{27}{8}$; $R = 8/27$; 在端点处, 易见
   $|a_n| = \frac{(3n-1)^{3n}}{(2n-3)^{3n}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3n} = (1 + 7/(6n-9))^{6n/2} \to e^{7/2}$ 知发散;
6. $a_n(x) = (1 + 1/n)^{n^2}(x-1)^n$; 模根值知
   $\sqrt[n]{|a_n(x)|} = (1 + 1/n)^n \to e$, 从而 $R = 1/e$; 在端点处,
   $|a_n| = (1 + 1/n)^{n^2}/e^n$; 注意到利用洛必达法则知,

$$\ln|a_n| = n^2 \ln(1 + 1/n) - n = \frac{\ln(1 + 1/n) - 1/n}{1/n^2} \to -\frac{1}{2};$$

   从而发散; $I = (1 - 1/e, 1 + 1/e)$.

求幂级数的收敛域

例子 20. 假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=3$, 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间 (即收敛域除去端点).
令 $y=x-1$, 则我们知道

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n y^{n+1} = y^2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n y^{n-1} = y^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \right)', \quad |y| < R = 3.$$

因此由逐项求导定理知, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n y^{n+1}$ 的收敛半径为 $R=3$. 变量代换知, 原级数的收敛区间为 $x-1 \in (-3,3)$, 即 $x \in (-2,4)$.

求幂级数的和函数

例子 21. 求下列幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的和函数:

1. $a_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;
2. $a_n(x) = \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$;
3. $a_n(x) = (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$;
4. $a_n(x) = \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$.

求幂级数的和函数续

对第一个幂级数, 利用比值判别法容易知道其收敛域为 $[-1,1]$;
从而在 $x \in (-1,1)$ 上, 利用逐项求积分得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-t^2)^{n-1}dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan x.$$

又由于原级数在端点处收敛, 从而其和函数在端点处单侧连续,
于是第一个级数的和函数就是 $\arctan x$, $x \in [-1,1]$.

求幂级数的和函数续

对第二个幂级数, 利用比值判别法容易知道其收敛域为 $(-1,1)$; 从而在 $x\in(-1,1)$ 上, 我们可以利用逐项积分得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}=\int_0^x\sum_{n=1}(t^4)^{n-1}dt=\int_0^x\frac{1}{1-t^4}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\arctan x-\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right),\quad |x|<1.$$

求幂级数的和函数续

对第三个幂级数, 利用比值判别法容易知道其收敛域为 $(-1,1)$;
从而利用逐项求导得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}\right)' \\
&= \left(x\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}\right)' \\
&= \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad |x|<1.
\end{aligned}
$$

求幂级数的和函数续

对第四个幂级数, 利用模比值判别法知其收敛域为 $x \in (-1, 1)$,
适当的利用逐项求导/求积得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n\right)' \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)'\right)' \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{1}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1.
\end{aligned}
$$

求级数的值

例子 22. 求级数的和

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}.$$

求级数的值续

我们将其转化为求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$ 在 $x = 1/\sqrt{2}$ 处的值.

利用模比值判别法易知上述幂级数在 $(-1, 1)$ 内绝对收敛; 从而可以利用逐项求积得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} = x \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-2} dt$$

$$= x \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

因此, $S = S(1/\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2}+1)/\sqrt{2}$.

求级数的值续

作业: 求级数的和

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$