

# 微积分授课讲义

艾万君

上海交通大学 • 数学科学学院

2018 年 10 月

# 授课教师基本信息

学院	数学科学学院
姓名	艾万君
联系方式	aiwanjun@sjtu.edu.cn
授课学期	秋
办公室	数学楼 1201
上课时间	每周二/四 18:00-20:20
上课地点	中院 213
课后时间	每周五下午 14:00-17:00



# 概要

- 可微、偏导与连续性
- 方向导数与梯度
- 复合函数的微分法
- 隐函数的微分法
- 雅可比行列式
- 空间曲线的切线与法平面
- 曲面的法线与切平面
- 多元函数的极值问题
- 多元函数的条件极值
- 二重积分的定义及其几何意义
- 二重积分的基本性质
- 直角坐标系下二重积分的计算

# 概要续

- 二重积分在直角坐标系下的计算
- 极坐标下二重积分的计算
- 二重积分的变量替换公式
- 三重积分的定义及其几何意义
- 三重积分在直角坐标系下的计算
- 三重积分在柱坐标系下的计算
- 三重积分在球坐标系下的计算
- 三重积分的变量替换公式
- 三重积分的区域对称性与函数对称性
- 课后习题

# 可微、偏导与连续性

回忆, 一个函数在某点可微可以推出可偏导以及连续. 但书上有例子表明可偏导不一定连续. 另一方面, 有定理表明偏导数都在某点连续则在该点可微. 在可微点处沿任意方向的方向导数都存在.

例子 1. 是判断函数

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x-y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

在原点  $(0, 0)$  处是否连续、可偏导、可微?

# 利用可微的定义求解

例子 2. 假设  $z = f(x, y)$  是连续函数, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) + ax + by + c}{x^2 + y^2} = 1,$$

求  $z$  在  $(0, 0)$  处的全微分.

# 利用可微的定义求解

例子 2. 假设  $z = f(x, y)$  是连续函数, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) + ax + by + c}{x^2 + y^2} = 1,$$

求  $z$  在  $(0, 0)$  处的全微分.

$f(0, 0) = -c$ , 而利用给定条件容易求得  $f_x(0, 0) = -a$ ,  
 $f_y(0, 0) = -b$ . 最后再次利用条件容易验证  $dz|_{(0,0)} = -adx - bdy$ .

# 方向导数与梯度

回忆, 二元函数  $f(x, y)$  在  $P_0(x_0, y_0)$  处的梯度定义为  $\nabla f(P_0) = (\partial_x f(P_0), \partial_y f(P_0))$ . 而给定方向  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ , 函数  $f$  沿着  $\vec{v}$  的梯度可以表示为  $\nabla f(P_0) \cdot \vec{v}$ . 我们称单位向量  $\nabla f(P_0)/|\nabla f(P_0)|$  为梯度方向, 容易知道, 沿着函数  $f$  的梯度方向, 函数  $f$  的方向导数取得极大值  $|\nabla f(P_0)|$ ; 沿着  $f$  的负梯度方向, 函数  $f$  的方向导数取得极小值  $-|\nabla f(P_0)|$ .

**例子 3.** 证明函数  $z = f(x, y) = y/x^2$  在椭圆  $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - c^2 = 0, c \neq 0$ , 上任意一点处沿着椭圆的法向的方向导数恒为零.

# 复合函数的微分法

回忆复合函数微分的链式法则: 假设  $f = f(u, v)$  在点  $Q_0(u_0, v_0)$  处可微, 而函数  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处可偏导. 若  $Q_0 = (u(P_0), v(P_0))$ , 则复合函数  $z = f(u(x, y), v(x, y))$  在  $P_0$  处可偏导, 且

$$\begin{aligned}z_x(P_0) &= f_u(Q_0)u_x(P_0) + f_v(Q_0)v_x(P_0), \\z_y(P_0) &= f_u(Q_0)u_y(P_0) + f_v(Q_0)v_y(P_0).\end{aligned}$$

若进一步假设  $f, u, v$  在对应点处具有连续偏导数 (从而可微), 则在  $P_0$  处有

$$dz = z_x dx + z_y dy = f_u du + f_v dv,$$

它称为一阶全微分的形式不变性.

# 链式法则的应用

例子 4. 假设定义在  $\mathbb{R}^2$  上的二元可微函数  $F(x, y)$  满足

$$F(x, y) = f(x) + g(y) = h(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

这里  $f, g, h$  都是可微函数. 证明

$$F(x, y) = c_1 (x^2 + y^2) + c_2,$$

其中  $c_1, c_2$  都是常数.

# 链式法则的应用

例子 4. 假设定义在  $\mathbb{R}^2$  上的二元可微函数  $F(x, y)$  满足

$$F(x, y) = f(x) + g(y) = h(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

这里  $f, g, h$  都是可微函数. 证明

$$F(x, y) = c_1 (x^2 + y^2) + c_2,$$

其中  $c_1, c_2$  都是常数.

提示: 改写成极坐标形式并利用函数的连续性.

# 隐函数的微分法

例子 5. 试分别用隐函数的微分法和一阶微分的形式不变性求解由  $z = f(xyz, z - y)$  确定的函数  $z = z(x, y)$  的全微分.

# 雅可比行列式

回忆, 参数变换  $T: (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$  的雅可比行列式定义为  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} := \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}$ .

**例子 6.** 假设  $u, v$  如上, 且它们都有连续的偏导数. 若在  $P_0(x_0, y_0)$  处, 雅可比行列式  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$  不为零, 则根据反函数(组)的存在性定理(它是隐函数组存在性定理的推论, 见书上 p. 86ff.), 我们知道此时在  $Q_0 = T(P_0)$  的某邻域内, 可确定反函数  $x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$ . 试证明

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1.$$

## 隐函数函数组存在性定理

回忆, 教材 p. 87 页的隐函数组定理: 假设  $F = F(x, y, u, v)$ ,  $G = G(x, y, u, v)$ , 在  $Q_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$  的一个邻域内具有连续的偏导数, 若

$$F(P_0) = 0 \quad G(P_0) = 0, \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}|_{P_0} \neq 0,$$

则存在  $P_0(x_0, y_0)$  的一个邻域  $U(P_0)$ , 使得方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0, \end{cases}$$

在该邻域内可以决定一个隐函数组  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ . 即, 对任意的  $(x, y) \in U(P_0)$ , 有

$$F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0, \quad G(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0$$

# 反函数组存在性定理

根据隐函数组的存在性定理, 我们可以证明如下的反函数组存在性定理: 假设  $T : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$  是  $\mathbb{R}^2$  中开邻域  $U(P_0)$  到  $\mathbb{R}^2$  的映射. 若  $u, v$  在  $U(P_0)$  上可微且

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \Big|_{P_0} \neq 0,$$

则存在  $Q_0 = T(P_0)$  的一个邻域  $U(Q_0)$ , 使得在  $U(Q_0)$  上  $T$  存在逆映射  $T^{-1} : (u, v) \mapsto (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ . 即, 对任意的  $(u, v) \in U(Q_0)$ , 我们有

$$u(x(u, v), y(u, v)) = u, \quad v(x(u, v), y(u, v)) = v.$$

# 空间曲线的切线与法平面

最简单的情形是空间曲线由参数方程  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  给出的  $C^1$  曲线, 则此时在  $P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$  处的切向量为  $\tau = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ . 故过  $P_0$  的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

法平面方程为

$$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

## 空间曲线的切线与法平面续

若空间曲线是由两个曲面的交线给出:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

则由复合函数的微分法知, 该空间曲线的切向量  $\tau := (x'(t), y'(t), z'(t))$ , 在  $P(x(t), y(t), z(t))$  处满足

$$\nabla F \cdot \tau = 0, \quad \nabla G \cdot \tau = 0. \implies \tau \parallel \nabla F \times \nabla G.$$

故在适当的参数化下, 我们得到切向量  $\tau$  由如下公式给出

$$\tau = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right).$$

# 求空间曲线的切线与法平面

例子 7. 求空间曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

在点  $P_0(1, -2, 1)$  处的切线与法平面.

# 曲面的法线与切平面

假设曲面  $S$  由方程  $F(x, y, z) = 0$  确定. 若  $\nabla F(P_0) = (F_x, F_y, F_z)(P_0) \neq 0$ , 则  $\nabla F(P_0)$  是曲面  $S$  在  $P_0$  处的法向量. 进而曲面  $S$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面为

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

例子 8. 求曲面  $z = 4 - x^2 - y^2$  与平面  $2x + 2y + z - 1 = 0$  平行的切平面方程以及过切点的曲面的法线方程.

**例子 8.** 求曲面  $z = 4 - x^2 - y^2$  与平面  $2x + 2y + z - 1 = 0$  平行的切平面方程以及过切点的曲面的法线方程.

提示: 切平面与已知平面平行故具有相同的法向. 求解得到切点为  $(1, 1, 2)$ . 然后根据曲面在该点处的法向写出切平面方程与法线方程.

例子 9. 证明曲面  $F(x, y, z) = z^2 - xy = 0$  与曲面  $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$  正交.

例子 9. 证明曲面  $F(x, y, z) = z^2 - xy = 0$  与曲面  $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$  正交.

提示: 即证明两曲面在交线处的法向量垂直.

例子 10. 证明曲面

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}, \quad a > 0$$

上任一点处的切平面在各坐标轴的截距之和等于常数.

# 平面束方程

例子 11 (p. 117:47). 过直线

$$\begin{cases} 4x + y - z - 3 = 0, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

作曲面  $3x^2 + y^2 - z^2 = 3$  的切平面, 求该切平面的方程.

# 平面束方程

例子 11 (p. 117:47). 过直线

$$\begin{cases} 4x + y - z - 3 = 0, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

作曲面  $3x^2 + y^2 - z^2 = 3$  的切平面, 求该切平面的方程.

注意过直线的平面束方程可以写成

$$4x + y - z - 3 + \lambda(x + y - z) = 0$$

假设该平面束与曲面相切于  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , 则

$$\begin{cases} 4x_0 + y_0 - z_0 - 3 + \lambda(x_0 + y_0 - z_0) = 0, & P_0 \text{ 在切平面上} \\ 3x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 3, & P_0 \text{ 在曲面上} \\ (4 - \lambda, 1 + \lambda, -(1 + \lambda)) \parallel (3x_0, y_0, -z_0), & \text{在 } P_0 \text{ 处具有相同的法向.} \end{cases}$$

# 多元函数的极值问题

二元函数  $f(x, y)$  在内点  $P_0 \in \Omega$  处取得极值的必要条件是: 当  $f$  在  $P_0$  可微时,  $\nabla f(P_0) = 0$ . 即  $P_0$  是  $f$  的驻点.

充分条件是: 当  $f$  在  $P_0$  的某邻域有连续二阶偏导数时, 二阶偏导数矩阵

$$J_2(f) := \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

在  $P_0$  处正定时取得极小值, 即

$$f_{xx}(P_0) > 0 \& \det J_2(f)(P_0) > 0.$$

在  $P_0$  处负定时取得极大值, 即

$$-f_{xx}(P_0) > 0 \& \det(-J_2(f)(P_0)) = \det(J_2(f)(P_0)) > 0.$$

注意, 在  $\det J_2(f) < 0$  的点处,  $f$  不可能取得极值; 而在  $\det J_2(f) = 0$  的点处, 不能判断  $f$  是否取得极值.

# 极值问题的几何意义

例子 12. 求点  $A(1, 1)$  到直线  $l: \frac{x}{2} + y = 1$  的最小值.

# 极值问题的几何意义

例子 12. 求点  $A(1, 1)$  到直线  $l: \frac{x}{2} + y = 1$  的最小值.

提示: 可以转换为条件极值

$F(x, y, \lambda) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \lambda(x/2 + y - 1)$ . 也可以按照几何意义, 即点到直线的距离. 取直线上一点  $B(0, 1)$ , 则点  $A$  到直线  $l$  的距离为  $|\vec{AB} \cdot \nu|$ , 其中  $\nu = (1/2, 1)$  为直线的法向.

# 多元函数的条件极值

条件极值解决的问题是二元函数  $z = f(x, y)$  在约束条件  $\varphi(x, y) = 0$  下的极值. 其方法是使用拉格朗日乘数法. 即构造辅助函数

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

将条件极值转化为无条件极值问题. 在具体求解过程中, 一般我们只需利用必要条件算出满足  $\nabla F = 0$  的驻点, 进而求得在这些驻点处的可能极值. 然后根据问题的实际意义知条件极值确实存在, 从而在这些可能极值中求得最大值或最小值.

# 条件极值的应用

例子 13. 利用条件极值证明

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \quad a_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

# 条件极值的应用

例子 13. 利用条件极值证明

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \quad a_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

提示: 相当于给定和求乘积的最大值.

## 二重积分的定义及其几何意义

重积分的定义和一元函数的定积分类似,也是通过分划、取点求和、取极限来定义的.

有界闭区域  $\Omega$  上函数  $z = f(x, y)$  的二重积分记作

$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

它的几何意义是,以  $\Omega$  为底,函数图像  $z = f(x, y)$  所成曲面为顶的曲顶柱体  $\tilde{\Omega}$  的体积 (试着用柱线法验证). 它也可看作平面区域  $\Omega$  上的一个在点  $(x, y)$  处密度为  $f(x, y)$  的薄板的质量.

# 二重积分的定义及其几何意义

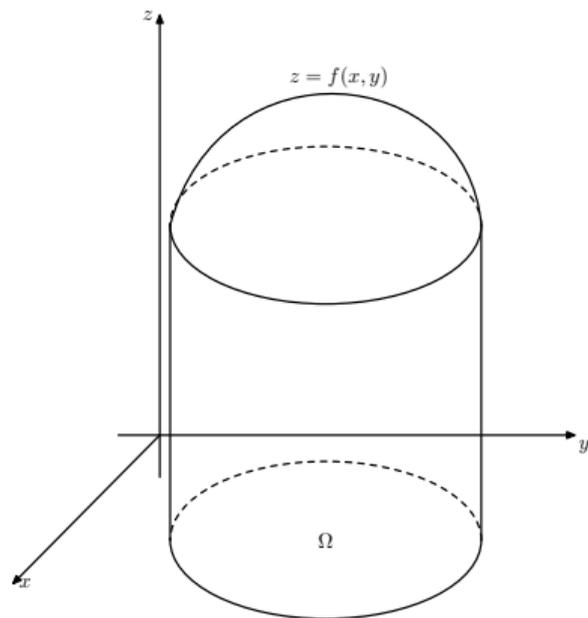


图 1: 二重积分

## 二重积分的基本性质

- ▶ 可积性: 有界闭区域上的连续函数或者分片连续函数在  $D$  上必可积. 事实上, 还可进一步减弱为在  $\Omega$  上有限条光滑曲线上间断的有界函数.
- ▶ 线性性: 若  $f, g \in R(\Omega)$ , 则

$$\iint_{\Omega} (f + \lambda g) d\sigma = \iint_{\Omega} f d\sigma + \lambda \iint_{\Omega} g d\sigma, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

- ▶ 若  $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ , 即可以写成两个不相交的区域之并集, 则当  $f \in R(\Omega)$  时,

$$\iint_{\Omega} f d\sigma = \iint_{\Omega_1} f d\sigma + \iint_{\Omega_2} f d\sigma.$$

## 二重积分的基本性质续

- ▶ 保序性: 若  $f, g \in R(\Omega)$ , 且  $f \leq g$ , 则

$$\iint_{\Omega} f d\sigma \leq \iint_{\Omega} g d\sigma.$$

- ▶ 绝对值性质: 假设  $f \in R(\Omega)$ , 则  $|f| \in R(\Omega)$ , 且

$$\left| \iint_{\Omega} f d\sigma \right| \leq \iint_{\Omega} |f| d\sigma.$$

- ▶ 积分中值定理: 若  $f$  在有界闭区域  $\Omega$  上连续, 则存在  $P_0(x_0, y_0) \in \Omega$ , 使得

$$\iint_{\Omega} f d\sigma = f(x_0, y_0)|\Omega|.$$

## 二重积分的基本性质续

- ▶ 积分中值定理: 假设  $f$  在有界闭区域  $\Omega$  上连续,  $g \in R(\Omega)$ . 若  $g$  在  $\Omega$  上不变号, 则存在  $P_0(x_0, y_0) \in \Omega$  使得

$$\iint_{\Omega} fg d\sigma = f(x_0, y_0) \iint_{\Omega} g d\sigma.$$

- ▶ 函数奇偶性与区域对称性:

- ▶ 若积分区域  $\Omega$  关于  $Ox$  轴对称, 则

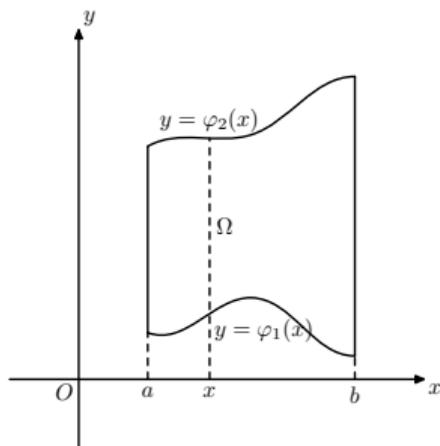
$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma = \iint_{\Omega_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{\Omega_1} f(x, -y) d\sigma.$$

因此, 当  $f(x, y) = -f(x, -y)$ , 即  $f(x, \cdot)$  关于  $y$  为奇函数时, 积分为零; 当  $f(x, y) = f(x, -y)$ , 即  $f(x, \cdot)$  关于  $y$  为偶函数时,

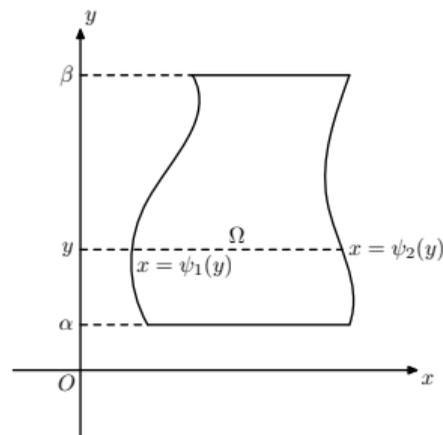
$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{\Omega_1} f(x, y) d\sigma.$$

- ▶ 完全类似得到积分区域  $\Omega$  关于  $Oy$  轴对称的情形.

# 直角坐标系下二重积分的计算



(a)  $x$ -型正则区域



(b)  $y$ -型正则区域

- ▶  $x$ -型区域:  $\iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy;$
- ▶  $y$ -型区域:  $\iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$

# 二重积分在直角坐标系下的计算

例子 14. 假设区域  $\Omega$  是由抛物线  $y^2 = x$ , 与直线  $x = 0, y = 1$  所围成的区域. 计算积分

$$\iint_{\Omega} e^{x/y} dx dy.$$

# 二重积分在直角坐标系下的计算续

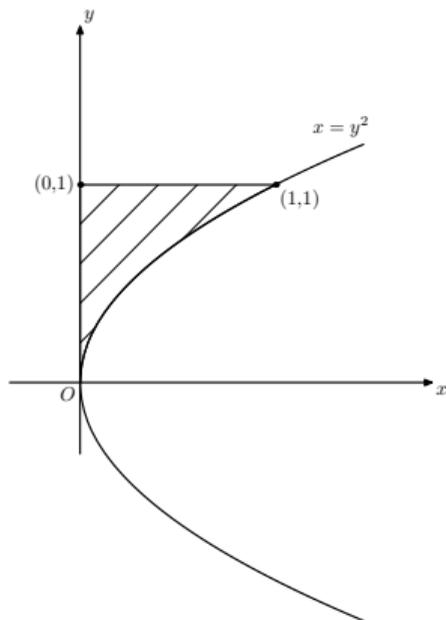


图 2: 积分区域

# 极坐标下二重积分的计算

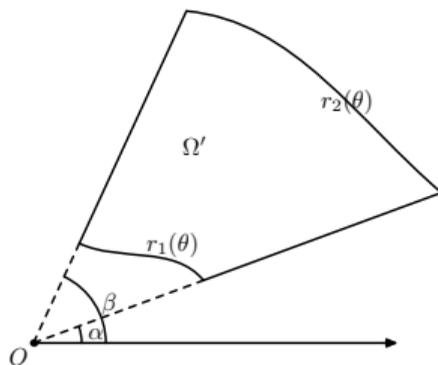


图 3:  $\theta$ -正则区域

对  $\theta$ -型正则区域:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma &= \iint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.\end{aligned}$$

# 利用极坐标求二重积分

例子 15. 求  $\Omega$  为双纽线的右半部分:  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ,  
 $a > 0, x \geq 0$  所围成时, 积分

$$\iint_{\Omega} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

# 利用极坐标求二重积分

例子 15. 求  $\Omega$  为双纽线的右半部分:  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ,  $a > 0, x \geq 0$  所围成时, 积分

$$\iint_{\Omega} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

提示: 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ . 容易知道  $\Omega$  为  $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ ,  $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ .

# 利用极坐标求二重积分续

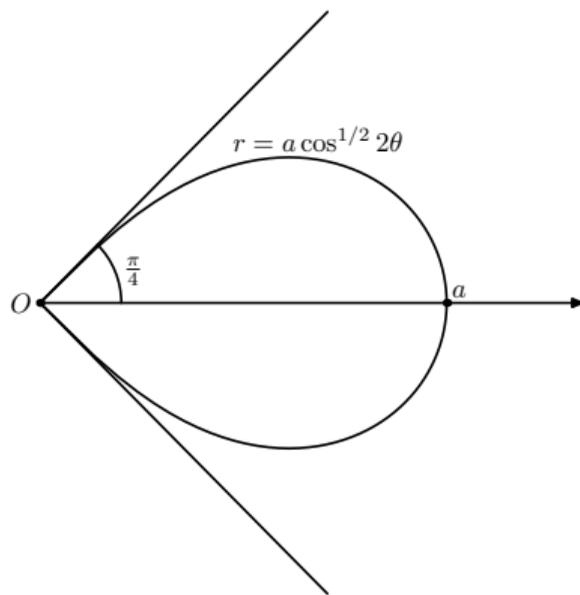


图 4: 双纽线的右半部分

例子 16. 利用适当的方法计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} |3x + 4y|.$$

例子 16. 利用适当的方法计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} |3x + 4y|.$$

提示: 如果直接采用直角坐标系则会涉及到比较复杂的区域划分. 这里采用极坐标系并注意周期函数的性质.

# 交换积分次序

例子 17. 交换积分次序

$$\int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy.$$

## 二重积分的变量替换公式

假设  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  是平面区域  $\Omega'$  到平面区域  $\Omega$  的一一对应, 且  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  在每点  $(u, v) \in \Omega'$  都可微. 若

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall (u, v) \in \Omega'.$$

则对区域  $\Omega$  上的连续函数  $f = f(x, y)$  有

$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma = \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

# 变量替换公式求积分

例子 18. 求积分

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

# 变量替换公式求积分

例子 18. 求积分

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

提示: 直接利用常规的极坐标计算  $r$  的范围不好求解. 利用广义极坐标系  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$  则比较容易.

# 三重积分的定义及其几何意义

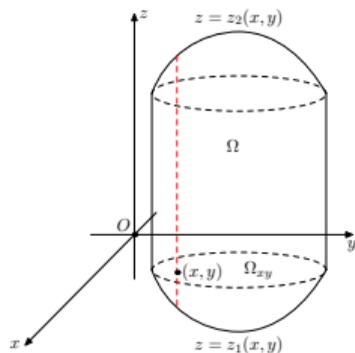
三重积分的定义和一元函数的定积分类似,也是通过分划、取点求和、取极限来定义的.我们将有界闭区域  $\Omega$  上函数  $f(x, y, z)$  的三重积分记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

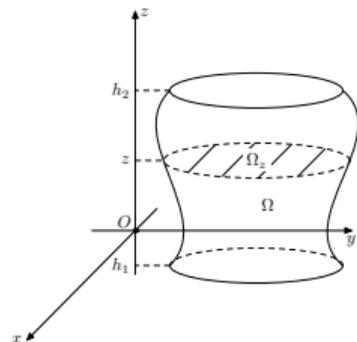
三重积分具有和二重积分类似的性质,例如保序性、线性性等.三重积分的几何意义是空间区域  $\Omega$  中在点  $P(x, y, z)$  处密度为  $f(x, y, z)$  的物体的质量.

# 三重积分在直角坐标系下的计算

三重积分也可根据空间区域  $\Omega$  的不同类型来计算.



(a)  $xy$ -型正则区域



(b)  $z$ -型正则区域

- ▶  $xy$ -型正则区域:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{\Omega_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz;$$

- ▶  $z$ -型正则区域:  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_{h_1}^{h_2} dz \iint_{\Omega_z} f(x, y, z) d\sigma;$

**例子 19.** 假设  $\Omega$  为曲面  $z = xy$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 1$  所围成的区域.  
求函数  $f(x, y, z) = xy$  在  $\Omega$  上的积分.

**例子 19.** 假设  $\Omega$  为曲面  $z = xy$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 1$  所围成的区域. 求函数  $f(x, y, z) = xy$  在  $\Omega$  上的积分.

提示: 本题不容易画出区域  $\Omega$  的图像, 但是容易观察出来,  $\Omega$  是由平面  $x + y = 1$  以及上下曲面分别为  $z = xy$ ,  $z = 0$  围成的图形.  $\Omega$  在  $Oxy$  平面的投影区域为

$$\Omega_{xy} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

# 三重积分在柱坐标系下的计算

一般而言, 三重积分的柱坐标系是对直角坐标系的扩充, 它适用于直角坐标系中的二维区域  $\Omega_{xy}$  或者  $\Omega_z$  比较方便地表示为极坐标的情形. 即为圆域或者扇形区域. 柱坐标的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r.$$

## 三重积分在柱坐标系下的计算续

- ▶  $xy$ -型正则区域: 此时还要求  $z_1(x, y)$ ,  $z_2(x, y)$  以及被积函数  $f(x, y, z)$  比较方便的用极坐标表示出来 (参考教材 p. 152: 例 9.25); 此时

$$\iiint_{\Omega} f dV = \iint_{\Omega_{r\theta}} r dr d\theta \int_{z_1(r, \theta)}^{z_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz.$$

- ▶  $z$ -型正则区域: 此时一般要求  $\Omega_z$  以及被积函数可以方便地用极坐标表示出来 (参考教材 p. 153: 例 9.26); 此时

$$\iiint_{\Omega} f dV = \int_{h_1}^{h_2} dz \iint_{\Omega_{r\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta.$$

# 利用柱坐标计算积分

例子 20. 计算积分

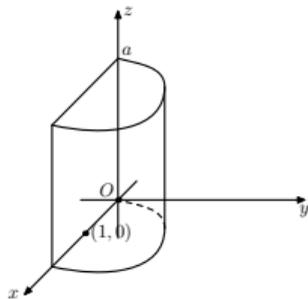
$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz.$$

# 利用柱坐标计算积分

## 例子 20. 计算积分

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz.$$

提示: 直接计算涉及到比较复杂的积分  $\int \sqrt{x^2 + y^2} dy$ . 利用柱坐标较为简单. 画图可知, 积分区域为半径为 1, 柱心为  $(1, 0)$ , 高为  $[0, a]$  的半圆柱面.

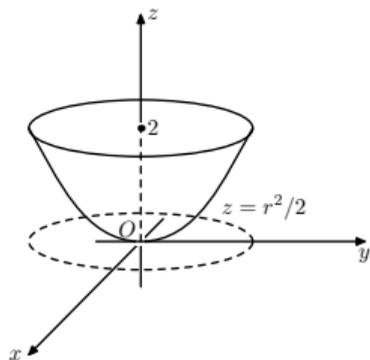


例子 21. 假设  $\Omega$  是椭圆抛物面  $2z = x^2 + y^2$  与  $z = 2$  围成的区域, 计算积分

$$I = \iiint_{\Omega} x^2 y^2 z dV.$$

例子 21. 假设  $\Omega$  是椭圆抛物面  $2z = x^2 + y^2$  与  $z = 2$  围成的区域, 计算积分

$$I = \iiint_{\Omega} x^2 y^2 z dV.$$



例子 22. 假设  $\Omega$  是由  $x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$  围成的区域 (标准圆柱体), 计算积分

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}} dV.$$

**例子 22.** 假设  $\Omega$  是由  $x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$  围成的区域 (标准圆柱体), 计算积分

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}} dV.$$

提示: 如果采用标准的柱线法, 则涉及到比较复杂的瑕积分计算:

$$\int_0^1 \ln(\sqrt{1+r^2}-1) dr = \frac{1}{2} \int_0^2 \ln(\sqrt{u}-1) du.$$

而采用截面法则比较简单: 只需注意

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

## 三重积分在球坐标系下的计算

一般而言, 三重积分的柱坐标系是对二重积分中极坐标系的推广, 它适用于空间区域  $\Omega$  比较方便表示为球坐标的情形, 即为球形域 (例如椭球) 或者锥面与球形域围成的区域. 球坐标的坐标变换公式是, 对  $\rho \in (0, +\infty)$ ,  $\phi \in [-\pi, \pi]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \phi, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \sin \phi.$$

此时计算公式为

$$\iiint_{\Omega} f dV = \iiint_{\Omega'} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$$

# 利用球坐标计算积分

例子 23. 计算积分

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}} dV.$$

# 利用球坐标计算积分

例子 23. 计算积分

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}} dV.$$

提示: 若先对  $\rho$  再  $\phi$  则计算较复杂, 交换积分次序则比较简单.

# 比较球坐标与柱坐标的计算

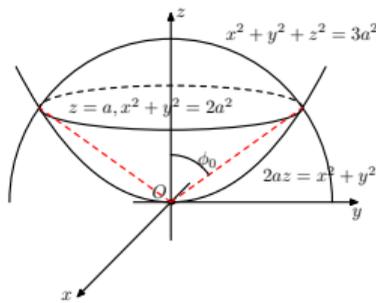
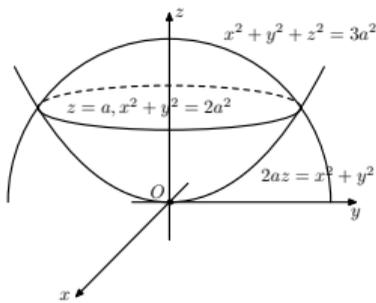
例子 24. 假设  $\Omega$  是由椭圆抛物面  $x^2 + y^2 = 2az$  以及球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$  ( $a > 0$ ) 围成的区域. 试分别用球坐标和柱坐标计算积分

$$I = \iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dV.$$

# 比较球坐标与柱坐标的计算

例子 24. 假设  $\Omega$  是由椭圆抛物面  $x^2 + y^2 = 2az$  以及球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$  ( $a > 0$ ) 围成的区域. 试分别用球坐标和柱坐标计算积分

$$I = \iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dV.$$



# 三重积分的变量替换公式

一般地, 假设变量替换  $T : \Omega' \rightarrow \Omega, (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ . 若

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0, \quad \forall (u, v, w) \in \Omega',$$

则我们有如下的变量替换公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(\cdot), z(\cdot)) |J| du dv dw.$$

## 三重积分的区域对称性与函数对称性

和二重积分类似, 当三重积分的积分区域  $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$  关于  $Oxy$  平面对称时 (即  $\Omega_1 = \Omega_2^*$ ,  $*$  表示关于  $Oxy$  的反射),

- ▶ 若被积函数  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是奇函数, 则  $f$  在  $\Omega$  上的积分为零;
- ▶ 若被积函数  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是偶函数, 则  $f$  在  $\Omega$  上的积分为

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} f dV &= \iiint_{\Omega_1} f dV + \iiint_{\Omega_2} f dV \\ &= \iiint_{\Omega_1} f dV + \iiint_{\Omega_2^*} f(x, y, -z) dV \\ &= 2 \iiint_{\Omega_1} f dV.\end{aligned}$$

# 利用奇偶性与对称性计算积分

例子 25. 计算积分

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (z + z^2) dV.$$

## 课后习题

1. 整理今天讲的习题, 特别地利用隐函数组的存在性定理证明反函数组的存在性定理.
2. p. 118:5, p. 119: 9;
3. 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

在  $P_0(0, 0)$  处可微, 偏导数存在但不连续.

## 课后习题续

4. 利用条件极值证明不等式

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \quad a_i > 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

5. 采用适当的方法计算积分

$$I = \iint_{\Omega} y dx dy,$$

其中  $\Omega$  由  $x = -2, y = 0, y = 2$  以及曲线  $x = -\sqrt{2y - y^2}$  围成.

## 课后习题续

### 6. 交换积分次序

$$\int_{-6}^2 dy \int_{y^2/4-1}^{2-y} f(x, y) dy.$$

7. 求  $\Omega$  为曲线  $x^2 = y$ ,  $x^2 = 4y$ ,  $x = y^2$  以及  $4x = y^2$  围成的区域上的积分

$$\iint_{\Omega} xy dx dy;$$

8. 用标准的柱线法通过瑕积分计算例子 22, 并比较它和用截面法的计算结果一致;
9. 利用柱坐标计算例子 24, 并比较它和球坐标下计算的结果一致;
10. 利用对称性计算例子 25.