



单位代码 10635
学 号 112009314001416

西南大学

硕士学位论文

平面中的 Poincaré 以及 Blaschke 平移
运动公式

论 文 作 者： 艾万君
指 导 教 师： 周家足
学 科 专 业： 基础数学
研 究 方 向： 积分几何与几何不等式
论文提交日期： 2012年5月7日
论文答辩日期： 2012年6月5日
学位授予单位： 西南大学

中国•重庆
2012年5月

Poincaré and Blaschke Translative Kinematic Formulae in the Plane

Wanjun Ai

Advisor:

Prof. Jiazuo Zhou

School of Mathematics and Statistics

May, 2012

*Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of M. Sc.
in Integral Geometry and Geometric Inequalities*

平面中的 Poincaré 以及 Blaschke 平移 运动公式

基础数学 专业 硕士研究生 艾万君

指导教师 周家足 教授

摘要

在本文中, 我们首先得到了欧氏平面积分几何关于平移运动群的 Poincaré 运动公式和 Blaschke 运动公式. 随后, 我们用周家足包含测度的方法导出了欧氏平面上一个凸体能够经由某个平移而包含于另一个凸体内的充分条件. 作为该充分条件的应用, 我们给出了经典的等周不等式、Bonnesen 等周不等式以及 Minkowski 不等式的简化证明.

关键词: Poincaré 平移运动公式, Blaschke 平移运动公式, 平移包含问题, 等周不等式, Minkowski 不等式

Poincaré and Blaschke Translative Kinematic Formulae in the Plane

Wanjun Ai

Directed by Prof. Jiazou Zhou

ABSTRACT

In this paper, we follow Zhou's method of containment measure and obtain the Poincaré kinematic formula and the Blaschke fundamental kinematical formulae for the planar translative group in integral geometry. Then drive a sufficient condition for a planer convex body to contain or to be contained in another convex body by a translation. As an application of this sufficient condition, we give the simplified proof of the classical isoperimetric inequality, Bonnesen's isoperimetric inequality and Minkowski's inequality by following the idea of containment measure of Zhou Jiazou.

Keywords: Poincaré translative kinematic formula, Blaschke kinematic translative formula, translative containment problem, classical isoperimetric inequality, Minkowski's inequality

目 录

摘要	i
ABSTRACT	ii
目录	iii
第一章 引言	1
第二章 预备知识	5
2.1 凸体的支持函数	5
2.2 两凸体的混合面积	6
2.3 凸体关于原点的反射	7
2.4 平移运动群的不变密度	9
第三章 平移运动公式	11
3.1 Poincaré 平移运动公式	11
3.2 Blaschke 平移运动公式	13
第四章 平移包含问题及其应用	15
4.1 一个凸体能够经由某个平移而包含于另一个凸体内的充分条件	15
4.2 经典的等周不等式	16
4.3 经典的 Minkowski 不等式	16
结语	18
参考文献	19
发表文章目录	22
致谢	23

第一章 引言

积分几何起源于 Wilhelm Blaschke 在 Hamburg 大学的数学讨论班. 数学大师陈省身(S.S. Chern)、吴大任、严志达、L. A. Santaló 都曾参加过该讨论班, 并为积分几何的发展作出了一系列奠基性工作[6, 7, 23]. 而 Santaló 自上世纪50年代以后一直是积分几何学的领袖, 他的积分几何与几何概率一书是上世纪80年代以前积分几何方面最全面而权威的参考书. 其中, 不断出现的是基本运动公式, 例如 Blaschke 运动公式、Santaló-Chern 运动公式. 运动公式仍是当今积分几何的研究主题之一[15].

经典的运动公式有欧氏平面 E^2 中的 Poincaré 公式以及 Blaschke 运动公式及其高维推广[23]. 其中, 平面 Poincaré 运动公式刻画的是两条可求长曲线的交点个数关于运动密度的测度. 它也可以看作当一条曲线固定时, 另一条(刚体)运动曲线与该曲线的交点个数的测度. 具体地, 由如下公式所刻画

$$\int_{\Gamma_0 \cap g\Gamma_1 \neq \emptyset} \# \{\Gamma_0 \cap g\Gamma_1\} dg = 4L_0L_1,$$

其中, Γ_0, Γ_1 是 E^2 中的可求长曲线, $g \in G_2$ 是 E^2 中的一个刚体运动, $\# \{\Gamma_0 \cap g\Gamma_1\}$ 是 Γ_0 与 $g\Gamma_1$ 的交点数, dg 是刚体运动群 G_2 的运动密度, L_0, L_1 分别是曲线 Γ_0, Γ_1 的周长.

与之类似, 关于两个平面区域 D_0, D_1 的欧拉示性数, 我们有如下的 Blaschke 运动公式,

$$\int_{D_0 \cap gD_1 \neq \emptyset} \chi(D_0 \cap gD_1) dg = 2\pi(\chi(D_0)F_0 + \chi(D_1)F_1) + L_0L_1,$$

其中, D_0, D_1 是欧氏平面中两个区域, 即连通开集. dg 是运动群 G_2 的运动密度, F_0, F_1 分别是 D_0, D_1 的面积, L_0, L_1 分别是 D_0, D_1 的边界曲线的周长.

周家足在文[31]中巧妙的运用这两个公式, 得到了两个凸体包含测度的一个下界估计, 该估计其实就是一个几何不等式. 利用该估计, 他得到了一系列 Bonnesen (型)不等式[31], 这些不等式的推广可以参考[19, 30, 34].

类似地, 通过考虑平移运动群下相应的平移型 Poincaré 与 Blaschke 运动公式, 周家足也得到了一系列不等式, 他称之为“**Bonnesen 型对称混合等似不等式(the Bonnesen style symmetric mixed isohomothetic inequality)**” (参见[32]). 例

如, 如下的经典 Minkowski 不等式的加强形式

$$F_{01} - F_0 F_1 \geq \frac{F_0}{4} (t_M - t_m)^2,$$

其中, F_{01} 是凸体 K_0, K_1 的混合面积. $t_M = \sup_{g \in G_2} \{t > 0 | g(tK_1) \subset K_0\}$, $t_m = \inf_{g \in G_2} \{t > 0 | g(tK_1) \supset K_0\}$. 该公式首先由 Bonnesen 得到[4], 而后 Blaschke [3] 和 Flanders [8] 分别独立给出了它的简化证明. 周家足利用包含测度的思想, 也给出了该不等式的一个新的简化证明[32], 此外他还获得了一系列的“Bonnesen 型对称混合等似不等式”[32].

可以看出, 运动公式不仅基本, 而且与几何不等式有着深刻的联系. 周家足提出的包含测度的方法——利用恰当的运动公式得出包含测度的估计进而得到几何不等式——在平面情形非常成功[16, 31]. 对高维的欧氏空间, 张高勇、周家足估计两凸体的“交流形”的“曲率”积分不变运动公式, 给出了空间一凸域包含另一凸域的充分条件[26]. 此外, 在常曲率流形的情形, 周家足也给出了常曲率平面和3维常曲率空间中一凸域包含另一凸域的充分条件[29, 31].

关于平移运动公式比较系统的研究可以参考[10, 24, 25]. 例如, 高维情形的 Blaschke 平移运动公式, 权且称之为 Santaló-Chern 平移运动公式, 为

$$\int_{\mathfrak{T}_n} \chi(K_0 \cap (TK_1)) dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} V_k(K_0, K_1^*),$$

其中 \mathfrak{T}_n 是欧氏平移运动群, dt 是 T 在 \mathfrak{T}_n 中的密度. K_1^* 是 K_1 关于原点反射而得到的凸体, $V_k(K_0, K_1^*)$ 是关于 k 个 K_0 以及 $n-k$ 个 K_1^* 的混合体积[15, 27]. 但是要得到 Poincaré 平移运动公式就困难得多了. 而且到目前为止, 我们没有看到一个纯积分几何的证明. 例如考虑两相交凸曲面的欧拉示性数的平移运动公式, Hug 和 Schä [14]得到了如下结果

$$\int_{\mathfrak{T}_n} \chi(\partial K_0 \cap \partial(TK_1)) dt = (1 + (-1)^n) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \{V_k(K_0, K_1^*) + (-1)^k V_k(K_0, K_1)\}.$$

他们所用的方法是首先考虑 K_0, K_1 的平行集 $K_0(r), K_1(r)$, 这时 $\partial K_0(r)$ 与 $\partial K_0(r) \cap \partial(TK_1(r))$ 相对于 Hausdorff 测度几乎都是正可达集(positive reach), 而后他们还用到了 Rataj 和 Zähle [21]关于曲率测度(curvature measure)的一个结果. 最后通过证明当 $K_0(r), K_1(r)$ 横截时它们的欧拉示性数不依赖于 r 而完成了上述平移运动公式的证明.

可以看出, Poincaré 平移运动公式的证明实际上是比较复杂的. 而本文就是希望对平面闭凸曲线的情形给出一个比较初等的证明, 进而对高维的情形有所启发.

我们首先利用支持函数这一基本而重要的工具, 得出了关于平移运动密度的一个密度公式. 即,

$$dt = da \wedge db = \{p_0(\theta_0) + p_0''(\theta_0)\} \{p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1)\} |\sin(\theta_0 - \theta_1)| d\theta_0 \wedge d\theta_1, \quad (3.1)$$

其中, dt 是平面平移运动群 \mathfrak{T} 的密度, a, b 是平移变换 $T \in \mathfrak{T}$ 的参数. p_0, p_1 分别是凸体 K_0, K_1 的支持函数. 由密度公式(3.1), 我们可以得到凸体 K_0, TK_1 的边界曲线 $\Gamma_0 = \partial K_0, \Gamma_1 = \partial TK_1$ 的交点数关于平移运动密度 dt 在全体平移运动所构成的李群 \mathfrak{T} 上的积分, 即平面闭凸曲线的 Poincaré 平移运动公式[23]

$$\int_{\Gamma_0 \cap T\Gamma_1 \neq \emptyset} \# \{\Gamma_0 \cap T\Gamma_1\} dt = 4(F_{01} + F_{01}^*). \quad (3.2)$$

其中, F_{01} 是 K_0 与 K_1 的混合面积, 而 F_{01}^* 是 K_0^* 与 K_1 的混合面积, 这里 K_0^* 是 K_0 关于欧氏平面 E^2 的原点的反射.

如果把凸体 K_1 和欧氏平面 E^2 的一个坐标系绑在一起, 那么欧氏平面中的关于 K_1 的平移运动可以由该坐标系的原点唯一决定. 于是平移运动群的运动密度又等于该点的运动密度. 因此, 为了求出两个凸体相交时的测度(关于运动密度的), 只需考察当两个凸体相交时, 该坐标原点的范围. 因为点的测度就是相应的面积. 而该点的轨迹实际上可以用两者的支持函数具体的表示出来. 从而, 我们可以求出两凸体相交时的测度, 这其实就是平面凸体的 Blaschke 平移运动公式[23], 即

$$\int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} dt = F_0 + F_1 + 2F_{10}^*, \quad (3.3)$$

其中, F_0, F_1 分别是 K_0, K_1 的面积, 而 F_{10}^* 是 K_1^* 与 K_0 的混合面积.

最后, 作为这两个平移运动公式的应用. 我们按照周家足包含测度的思想, 回顾了他对几个经典几何不等式简洁而优美的证明. 首先, 考虑平移包含问题, 即关于平移运动群, 考虑能使一个运动凸体和一个固定凸体之间有包含关系的全体平移运动的测度. 对该问题一个基本而重要的观察是: 对欧氏平面 E^2 中两个凸体 K_0, K_1 , 它们有真包含关系当且仅当它们相交且边界不相交. 同时注意到当它们的边界相交时, 交点个数必定大于等于2. 这就导出了包含测度的一个下界, 即(定理4.1)

$$m \{T \in \mathfrak{T} | TK_1 \subset K_0 \text{ or } TK_1 \supset K_0\} \geq F_0 + F_1 - 2F_{10}.$$

特殊化 K_1 我们可以使它们不能具有包含关系, 从而与之相应的包含测度必定为零. 由上面关于包含测度的估计, 可以得出相应的几何不等式. 沿着周家足的这个思路, 我们给出了下列经典几何不等式的“包含测度”式的证明:

$$(\text{Bonnesen 不等式}) \quad \pi r^2 - L_0 r + F_0 \leq 0, \quad r_i \leq r \leq r_e, \quad (4.1)$$

这里, L_0, F_0 分别是凸体 K_0 的周长和面积, r_i, r_e 分别是 K_0 的最大内切圆半径与最小外接圆半径.

作为上述 Bonnesen 不等式的推论, 可以得到如下的等周不等式以及 Bonnesen 等周不等式,

$$\text{(等周不等式)} \quad L_0^2 - 4\pi F_0 \geq 0, \quad (4.3)$$

$$\text{(Bonnesen 等周不等式)} \quad L_0^2 - 4\pi F_0 \geq \pi^2(r_e - r_i)^2, \quad (4.5)$$

且其等号成立的充要条件都是 K_0 为一半径为 $L_0/2\pi$ 的圆盘.

这些等周不等式的证明, 与利用刚体运动群下的包含测度来证明并无实质差别[31]. 但是如下的 Minkowski 不等式, 就不可能用刚体运动群下的包含测度的方法来证明了, 从而它确实是由包含测度导出的一个平移型不等式[28]:

$$\text{(Minkowski 不等式)} \quad F_{01}^2 - F_0 F_1 \geq 0, \quad (4.6)$$

这里, F_{01} 是凸体 K_0 与凸体 K_1 的混合面积, 而 F_0, F_1 分别是它们的面积. 等号成立, 当且仅当 K_1 与 K_0 位似, 即存在 $x \in E^2$, 以及 $\lambda > 0$, 使得 $K_0 = x + \lambda K_1$.

第二章 预备知识

2.1 凸体的支持函数

欧氏平面 E^2 的一个集合称为是凸的, 如果连接该集合中任意两点的直线段仍包含在该集合中. 进一步地, 若还假设该集合是紧致的且具有非空内部, 则称其为一个凸体. 两个凸体 K, L 的 *Minkowski* 加法定义为

$$K + L = \{x + y | x \in K, y \in L\}.$$

一个非负数 λ 与凸体 K 的 *Minkowski* 数乘定义为

$$\lambda K = \{\lambda x | x \in K, \lambda \geq 0\}.$$

凸体 L 与凸体 K 称为是位似的, 如果存在 $x \in E^2$ 以及 $\lambda \geq 0$ 使得 $K = x + \lambda L$.

对凸体的研究, 一个基本而重要的工具是其支持函数. 它定义为该凸体沿着给定方向投影的最大值, 记为 $p_K(\theta)$. 当凸体 K 明确时, 也简记为 $p(\theta)$ (如图 2.1 所示).

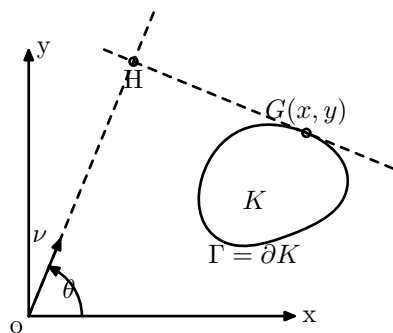


图 2.1: 凸体的支持函数

利用支持函数, 我们可以给出凸体边界曲线 $\Gamma = \partial K$ 的一个参数化, 即

$$\begin{cases} x &= p \cos \theta - p' \sin \theta \\ y &= p \sin \theta + p' \cos \theta \end{cases} \quad (2.1)$$

于是, 边界曲线的弧长微元为

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = (p + p'')d\theta.$$

这样, 边界曲线 Γ 的周长以及围成的面积分别为

$$L = \int_{\Gamma} ds = \int_0^{2\pi} p d\theta, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(p + p'') d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) d\theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2 两凸体的混合面积

由于边界曲线 Γ 是凸的, 可以证明 $p + p'' > 0$. 事实上, 这也是一个以 2π 为周期的函数 $p(\theta)$ 可以作为某个凸体的支持函数的充分条件 [5].

假设 p_0, p_1 分别是凸体 K_0, K_1 的支持函数. 考虑函数 $p(\theta) = p_0(\theta) + p_1(\theta)$. 注意到

$$p + p'' = (p_0 + p_0'') + (p_1 + p_1'') > 0,$$

因此 $p(\theta)$ 是某个凸体 K 的支持函数. 由(2.2)与(2.3), K 的周长和面积分别是

$$\begin{aligned} L_K &= \int_0^{2\pi} p d\theta = \int_0^{2\pi} p_0 d\theta + \int_0^{2\pi} p_1 d\theta = L_0 + L_1, \\ F_K &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ (p_0^2 - p_0'^2) + (p_1^2 - p_1'^2) + 2(p_0 p_1 - p_0' p_1') \} d\theta \\ &= F_0 + F_1 + 2F_{01}, \end{aligned}$$

其中,

$$F_{01} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p_0 p_1 - p_0' p_1') d\theta$$

称为凸体 K_0, K_1 的混合面积.

命题 2.1. 凸体 K_0, K_1 的混合面积 F_{01} 具有对称性, 即 $F_{01} = F_{10}$.

证明. 直接按照 F_{01} 的定义, 有

$$\begin{aligned} F_{01} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p_0 p_1 - p_0' p_1') d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_0 (p_1 + p_1'') d\theta = \frac{1}{2} \int_{\partial K_1} p_0 ds_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_1 (p_0 + p_0'') d\theta = \frac{1}{2} \int_{\partial K_0} p_1 ds_0, \end{aligned}$$

这表明 $F_{01} = F_{10}$. □

从上述证明我们顺便得到如下

推论 2.2. 关于凸体 K_0, K_1 的混合面积有下列等式

$$F_{01} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_0(p_1 + p_1'')d\theta = \frac{1}{2} \int_{\partial K_1} p_0 ds_1.$$

2.3 凸体关于原点的反射

假设 K 是一个凸体, $p(\theta)$ 是其支持函数. 令 K^* 是 K 关于原点反射后得到的凸体, 其支持函数记为 $p^*(\theta)$. 下面我们来讨论 p 与 p^* 的关系. 假设 P_1 是凸体 K 边

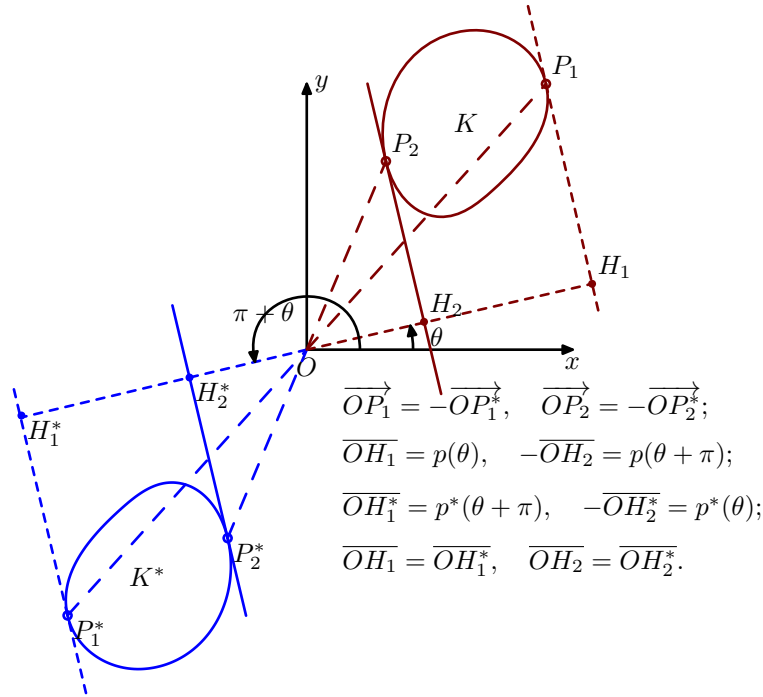


图 2.2: 凸体关于原点的反射

界上关于方向 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 的切点, 则

$$P_1 = (p \cos \theta - p' \sin \theta, p \sin \theta + p' \cos \theta).$$

另一方面, 在 K^* 上, 与方向 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 相对应的切点记为 P_2^* , 如图 2.2所示. 注意到 P_2^* 与 P_2 关于原点是中心对称的, 即 $P_2^* = -P_2$. 将这一关系改写为如下的矩阵形式,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^*(\theta) \\ p'^*(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\theta + \pi) \\ p'(\theta + \pi) \end{pmatrix},$$

由此, 立即得出

$$p^*(\theta) = p(\theta + \pi).$$

于是, 我们有如下

命题 2.3. 假设 K 是一个凸体, 其支持函数为 $p(\theta)$. 又设 K^* 是 K 关于原点反射而得的几何体, 那么它是一个凸体. 而且其支持函数 p^* 满足

$$p^*(\theta) = p(\theta + \pi), \quad \theta \in \mathbf{R}. \quad (2.4)$$

特别地, 当 K 是中心对称的凸体时, 如果我们选取其对称中心作为原点, 那么

$$K^* = K,$$

因而

$$p(\theta + \pi) = p^*(\theta) = p(\theta), \quad \theta \in \mathbf{R}. \quad (2.5)$$

我们进一步考察反射凸体的混合面积. 假设 K_0, K_1 是两个凸体, 用 $*$ 来区分凸体与其关于原点反射后得到的凸体. 若分别用 F_{01}^* 和 F_{10}^* 来记 K_0^* 与 K_1 以及 K_1^* 与 K_0 的混合面积. 那么关于 F_{01}^* 与 F_{10}^* 有如下重要关系

命题 2.4. 假设 F_{01}^* 与 F_{10}^* 定义如上所述, 那么

$$F_{01}^* = F_{10}^*.$$

证明. 直接根据混合面积的定义, 我们有

$$\begin{aligned} 2F_{01}^* &= \int_{\partial K_1} p_0^* ds_1 = \int_0^{2\pi} p_0(\theta + \pi)(p_1(\theta) + p_1''(\theta))d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} p_0(\theta + \pi + \pi)(p_1(\theta + \pi) + p_1''(\theta + \pi))d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} p_0(\theta)(p_1(\theta + \pi) + p_1''(\theta + \pi))d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} p_0(\theta)(p_1(\theta + \pi) + p_1''(\theta + \pi))d\theta \\ &= \int_{\partial K_1^*} p_0 ds_1^* \\ &= 2F_{10}^*. \end{aligned}$$

□

2.4 平移运动群的不变密度

欧氏空间 E^2 中的一个平移 $T_{a,b}$ 可以表示为

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + a, \\ y_1 = y_0 + b, \end{cases} \quad -\infty < a, b < \infty. \quad (2.6)$$

记欧氏平面中平移运动全体所构成的群为 \mathfrak{T} . 将(2.6)改写为齐次坐标的形式,

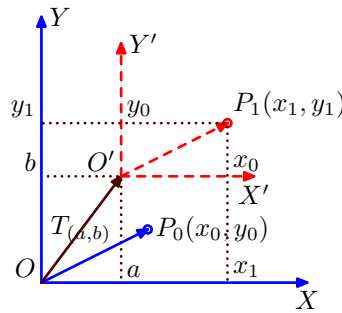


图 2.3: 欧氏平面中的一个平移

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

那么每个平移 $T_{a,b}$ 可以看成如下形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

这样, 就建立了一个从 \mathfrak{T} 到 $M(\mathfrak{T})$ 的同构, 其中 $M(\mathfrak{T})$ 表示形如 (2.7) 的矩阵全体. 实际上, 这给出了 \mathfrak{T} 的一个微分结构, 其局部坐标为 (a, b) . 不难验证, \mathfrak{T} 在这个光滑结构下还是一个李群, 当然也是一个齐性空间.

每个平移 $T_{a,b} \in \mathfrak{T}$ 都定义了 \mathfrak{T} 的两个自同构, 即左推移 $L_{T_{a,b}}: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T}$, $T_{c,d} \mapsto T_{a,b} \cdot T_{c,d}$, 这里群的乘法就是矩阵的乘法; 以及类似定义的右推移 $R_{T_{a,b}}$. 易见它们都是光滑的而且其逆也光滑, 从而是微分同胚. 我们来考察如下的由1-形式所组成的矩阵

$$\Omega = T_{(a,b)}^{-1} dT_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & da \\ 0 & 0 & db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据积分几何中关于矩阵群的运动密度的推导过程, 我们知道 Ω 中的1-形式都是左不变的. 因此, 如下的2-形式

$$dt = da \wedge db \tag{2.8}$$

是左不变的2-形式. 由于 \mathfrak{T} 是可交换的, dt 也是右不变的. 这样的一个双不变的2-形式精确到常数是唯一的, 称为 \mathfrak{T} 的不变体积元或者运动密度[22, 23].

第三章 平移运动公式

3.1 Poincaré 平移运动公式

假设 K_0 是一个固定定的凸体, Γ_0 是其边界曲线. 又设 K 是一运动凸体, 其边界曲线设为 Γ_1 . 我们将计算 Γ_0 与 Γ_1 相交的测度. 直接计算这个测度一般来说是很困难的, 我们取而代之的是加一个适当的由几何不变量构成的权. 首先来考察这个不变量是两曲线的交点数这一情形, 即考虑如下积分

$$\int_{\partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset} \# \{ \partial K_0 \cap \partial(TK_1) \} dt,$$

其中 $\# \{ \partial K_0 \cap \partial(TK_1) \}$ 表示 ∂K_0 与 $\partial(TK_1)$ 的交点数.

注意, 上述积分的积分区域本质上是 $\{T \in \mathfrak{T} | \partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset\}$, 但习惯上将其简记为 $\partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset$, 我们也将遵循这一传统.

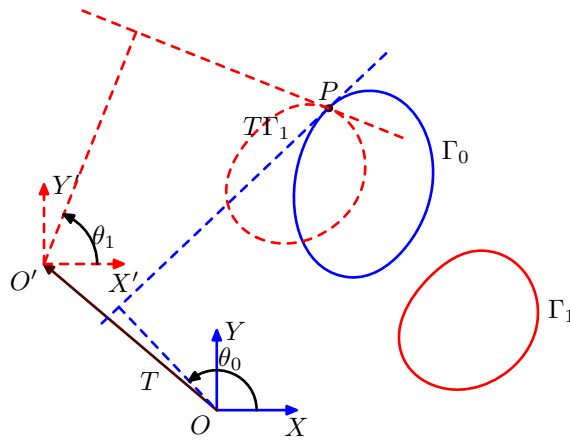


图 3.1: 交点处的支持函数

假设 $P_0(\theta_0)$ 与 $p_1(\theta_1)$ 分别是 K_0 与 K_1 的支持函数. 由(2.1), 我们有

$$\begin{cases} x_0 = p_0 \cos \theta_0 - p'_0 \sin \theta_0 \\ y_0 = p_0 \sin \theta_0 + p'_0 \cos \theta_0, \end{cases}$$

其中 (x_0, y_0) 是 Γ_0 在直角坐标系 OXY 下的坐标. 类似地, Γ_1 在直角坐标系 $O'X'Y'$ 下的坐标 (x_1, y_1) 满足

$$\begin{cases} x_1 = p_1 \cos \theta_1 - p'_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = p_1 \sin \theta_1 + p'_1 \cos \theta_1. \end{cases}$$

于是, 在 Γ_0 与 $T\Gamma_1$ 的交点 P 处, 我们有

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P},$$

如图 3.1 所示. 也即,

$$(x_0, y_0) = (a, b) + (x_1, y_1).$$

因而, 运动密度可以用支持函数表示为

$$dt = da \wedge db = \{p_0(\theta_0) + p_0''(\theta_0)\} \{p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1)\} |\sin(\theta_0 - \theta_1)| d\theta_0 \wedge d\theta_1, \quad (3.1)$$

其中我们对 $\sin(\theta_0 - \theta_1)$ 加了绝对值, 因为运动密度总是假定为正的.

现在, 将上述密度公式在 $\{\partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset\}$ 上积分. 同时注意到, 对 Γ_1 的每个由上述密度公式右边参数决定的位置, 公式左边对应的位置实际上有交点个数那么多个. 于是我们有

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset} \# \{\partial K_0 \cap \partial(TK_1)\} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} (p_0(\theta_0) + p_0''(\theta_0)) |\sin(\theta_0 - \theta_1)| d\theta_0 \right\} \{p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1)\} d\theta_1 \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} (p_0(\theta_0) + p_0''(\theta_0)) \sin(\theta_0 - \theta_1) d\theta_0 \right. \\ & \quad \left. - \int_{\theta_1+\pi}^{\theta_1+2\pi} (p_0(\theta_0) + p_0''(\theta_0)) \sin(\theta_0 - \theta_1) d\theta_0 \right\} \{p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1)\} d\theta_1 \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \{p_0(\theta_1) + p_0(\theta_1 + \pi)\} \right. \\ & \quad \left. - \{ - [p_0(\theta_1 + 2\pi) + p_0(\theta_1 + \pi)] \} \right\} \{p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1)\} d\theta_1 \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left\{ p_0(\theta_1) + p_0(\theta_1 + \pi) \right\} \{p_1(\theta_1) + p_1''(\theta_1)\} d\theta_1 \\ &= 2 \int_{\partial K_1} \left\{ p_0(\theta_1) + p_0(\theta_1 + \pi) \right\} ds_1 \\ &= 4(F_{01} + F_{01}^*), \end{aligned}$$

其中, F_{01} 是凸体 K_0, K_1 的混合面积, 而 F_{01}^* 是凸体 K_0^* 与凸体 K_1 的混合面积. K_0^* 如前定义, 是 K_0 关于原点反射后得到的凸体.

总结以上讨论, 我们得到如下

定理 3.1. 假设 Γ_0 与 Γ_1 分别是凸体 K_0 与 K_1 的边界. Γ_0 与 $T\Gamma_1$ 的交点数记为 $\#\{\Gamma_0 \cap T\Gamma_1\}$, 这里 $T \in \mathfrak{T}$ 是一个平移. 那么, 相对于经典的 Poincaré 运动公式, 我们有如下的平移 Poincaré 运动公式

$$\int_{\Gamma_0 \cap T\Gamma_1 \neq \emptyset} \#\{\Gamma_0 \cap T\Gamma_1\} dt = 4(F_{01} + F_{01}^*). \quad (3.2)$$

3.2 Blaschke 平移运动公式

事实上, 我们也可以直接利用运动密度公式(2.8)来计算使得 TK_1 与 K_0 相交的所有 T 的测度. 为此, 考虑如下积分

$$\int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} dt = \int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} da \wedge db.$$

为了计算这个积分, 我们需要以下基本事实(参考图 3.2)

- 平移运动密度等于点 O' 的密度, 其中 O' 是运动标架 $O'X'Y'$ 的原点.
- 所有使得 K_1 与 K_0 相交的 K_1 的位置, 在平移运动下它由原点 O' 所确定, 一定包含在 O' 所成轨迹 Γ_{01} 内. 其中 Γ_{01} 是 K_1 保持与 K_0 外切时 O' 的轨迹.

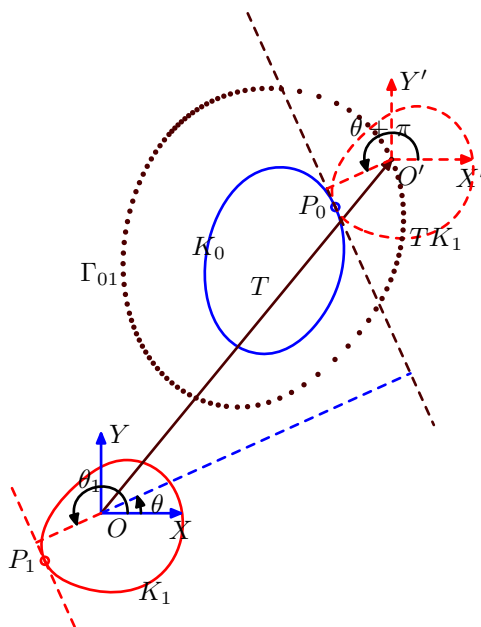


图 3.2: 平移下 O' 的轨迹

基于以上事实, 我们有

$$\int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} dt = \Gamma_{01} \text{ 围成的面积.}$$

由于 Γ_{01} 的支持函数是 $p_0(\theta) + p_1(\theta + \pi)$, 于是 Γ_{01} 围成的面积为

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Gamma_{01}) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ (p_0(\theta) + p_1(\theta + \pi))^2 - (p'_0(\theta) + p'_1(\theta + \pi))^2 \right\} d\theta \\ &= F_0 + F_1 + 2F_{10}^*. \end{aligned}$$

总结以上讨论, 我们得到如下的平移运动公式, 它可以看成是 Blaschke 运动公式在平移时的情形.

定理 3.2. 假设 K_0, K_1 是欧氏平面 E^2 中的两个凸体, 欧氏运动群的平移运动密度记为 dt , 那么

$$\int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} dt = F_0 + F_1 + 2F_{10}^*, \quad (3.3)$$

其中, F_0, F_1 分别是 K_0, K_1 的面积, 而 F_{10}^* 是 K_1^* 与 K_0 的混合面积.

第四章 平移包含问题及其应用

本章将利用本文得到的 Poincaré 平移运动公式以及 Blaschke 平移运动公式, 按照周家足包含测度的方法, 导出了欧氏平面上一个凸体能够经由某个平移而包含于另一个凸体内的充分条件, 即定理 4.1. 作为该充分条件的应用, 我们给出了经典的等周不等式(4.3)、Bonnesen 等周不等式(4.5)以及 Minkowski 不等式(4.6)的另一证明. (周家足在[16, 28]中已经给出包括这几个经典的几何不等式在内的一系列 Bonnesen 型对称混合等似不等式).

4.1 一个凸体能够经由某个平移而包含于另一个凸体内的充分条件

给定欧氏平面 E^2 中两个凸体 K_0, K_1 , 当 $\partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset$ 时, 交集 $\partial(K_0 \cap TK_1)$ 至少由 ∂K_0 与 $\partial(TK_1)$ 各自的一段弧组成. 因此, $\#\{\partial K_0 \cap \partial(TK_1)\} \geq 2$. 于是, 利用 Poincaré 平移运动公式(3.2)和 Blaschke 平移运动公式(3.3), 可得

$$\begin{aligned}
 & m\{T \in \mathfrak{T} | TK_1 \subset K_0 \text{ or } TK_1 \supset K_0\} \\
 &= m\{T \in \mathfrak{T} | TK_1 \cap K_0 \neq \emptyset\} - m\{T \in \mathfrak{T} | \partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset\} \\
 &= \int_{K_0 \cap TK_1 \neq \emptyset} dt - \int_{\partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset} dt \\
 &\geq F_0 + F_1 + 2F_{10}^* - \frac{1}{2} \int_{\partial K_0 \cap \partial(TK_1) \neq \emptyset} \#\{\partial K_0 \cap \partial(TK_1)\} dt \\
 &= F_0 + F_1 + 2F_{10}^* - 2(F_{10} + F_{01}^*) \\
 &= F_0 + F_1 - 2F_{10}.
 \end{aligned}$$

其中, 最后一个等号我们利用了命题 2.4, 即 $F_{01}^* = F_{10}^*$.

因此我们立即得到了两个凸体能够平移包含的一个充分条件[28]:

定理 4.1. 假设 K_0, K_1 是欧氏平面的两个凸体, F_0, F_1 分别是它们的面积. K_1 和 K_0 的混合面积记为 F_{01} , 则 K_1 能够经由一个平移 T 使得, TK_1 包含 K_0 或者被包含于 K_0 内的一个充分条件是

$$F_0 + F_1 - 2F_{10} > 0.$$

4.2 经典的等周不等式

令 r_i, r_e 分别为 K_0 的最大内切圆半径和最小外截圆半径. 现若取 $K_1 \equiv B(r)$ 为半径为 r 的圆盘, 其中 $r_i \leq r \leq r_e$, 由于这时 K_0 和 $B(r)$ 不能有真包含关系, 故此时包含测度为零. 于是得到如下的 *Bonnesen* 不等式,

$$\pi r^2 - L_0 r + F_0 \leq 0, \quad r_i \leq r \leq r_e. \quad (4.1)$$

它表明, 如下的 *Bonnesen* 二次多项式

$$f(r) = \pi r^2 - L_0 r + F_0 \quad (4.2)$$

有实根. 因此 *Bonnesen* 二次多项式关于根的判别式 $\Delta(f(t)) = L_0^2 - 4\pi F_0$ 非负, 此即经典的等周不等式:

$$L_0^2 - 4\pi F_0 \geq 0, \quad (4.3)$$

而且, 等号成立时 $r_i = r_e$, 这表明此时 K_0 必为半径为 $r = r_i = r_e = L_0/2\pi$ 的一个圆盘.

由 *Bonnesen* 不等式(4.1), 我们有

$$\pi r_i^2 - L_0 r_i + F_0 \leq 0, \quad \pi r_e^2 - L_0 r_e + F_0 \leq 0.$$

如果记 r_1, r_2 为二次多项式 $f(r)$ 的根, 那么容易导出周家足得到的如下不等式序列[16, 28]

$$\frac{L_0 - \sqrt{L_0^2 - 4\pi F_0}}{2\pi} = r_1 \leq r_i \leq \frac{L_0}{2\pi} \leq r_e \leq r_2 = \frac{L_0 + \sqrt{L_0^2 - 4\pi F_0}}{2\pi}. \quad (4.4)$$

由此可容易得出如下 *Bonnesen* 等周不等式[11]

$$L_0^2 - 4\pi F_0 \geq \pi^2 (r_e - r_i)^2. \quad (4.5)$$

关于 *Bonnesen* 等周不等式等号成立的条件, 并不是显而易见的, 秦超在[20]给出了一个证明.

4.3 经典的 Minkowski 不等式

对给定的 $t \in \mathbf{R}, t > 0$, 当 K 为凸集时, 考察集合 $tK = \{tx | x \in K\}$. 因

$$F(tK_1) = t^2 F_1, \quad F(tK_1, K_0) = t F_{10},$$

这里, $F(\cdot)$ 表示面积, 而 $F(\cdot, \cdot)$ 表示 K_0, K_1 的混合面积.

现在, 用 tK_1 代替原来的 K_1 , 其中 $t_M < t < t_m$, 这里 $t_m = \inf_{T \in \mathfrak{X}} \{t > 0 | t(TK_1) \supset K_0\}$, $t_M = \sup_{T \in \mathfrak{X}} \{t > 0 | t(TK_1) \subset K_0\}$. 需要注意的是, 关于 K_1 的缩放与原点的选取无关. 与上节讨论的情形类似, 此时 $t(TK_1)$ 和 K_0 也不能有真包含关系. 由包含的充分条件(定理 4.1), 有

$$F_0 + t^2 F_1 - 2t F_{10} \leq 0, \quad t_M \leq t \leq t_m.$$

由判别式非负得到

$$F_{01}^2 - F_0 F_1 \geq 0. \quad (4.6)$$

这就是经典的 *Minkowski* 不等式.

同样地, 当等号成立时, 我们有 $t_m = t_M$, 从而 K_1 和 K_0 位似.

注 1: 经典的 *Minkowski* 不等式首先由 Minkowski 给出, 而后 Blaschke, Bonnesen, Santaló, Flanders, Zhou 等分别给出了很多优美的证明. 用平移包含测度理论证明的是周家足(参见[3, 4, 8, 16]).

注 2: 事实上, 设 $K_1 \equiv B$ 为单位圆盘, 则(4.6)即是经典的等周不等式(4.3).

注 3: 经典的等周不等式也可由刚体运动的包含测度的下界估计而得到, 但 Minkowski 不等式则不能. 其实, Minkowski 不等式本质上可以推出等周不等式. 这不仅在平面中成立, 在高维的欧氏空间中亦是如此. 这从另一个侧面也反映了平移型运动公式其实更加精细.

结 语

本文利用支持函数表式出平移运动群的运动密度, 而得到两条凸曲线相交的 Poincaré 公式. 而通过考察平移运动密度的几何意义而得到两个凸体相交的 Blaschke 公式. 在这两个公式的基础上, 按照周家足包含测度的思想方法, 讨论了平面中两个凸体能够通过平移而有真包含关系的包含问题. 给出了两个凸体能经由某个平移而真包含的充分条件. 利用该充分条件, 获得了经典的等周不等式以及 Minkowski 不等式的证明.

一个自然的问题是这种方法能否推广到欧氏空间 E^3 , 甚至 E^n 中? 容易看出, Blaschke 平移运动公式比较容易推广, 而 Poincaré 运动公式就比较复杂了. 这有待进一步的研究.

参考文献

- [1] L. Berwald and O. Varga. Integralgeometrie 24. Über die schiebungen im raum. *Mathematische Zeitschrift*, 42(1):710–736, 1937.
- [2] W. Blaschke. Integralgeometrie 21. Über schiebungen. *Mathematische Zeitschrift*, 42(1):399–410, 1937.
- [3] W. Blaschke. *Vorlesungen uber integralgeometrie*. Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1955.
- [4] T. Bonnesen. *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*. Paris, 1929.
- [5] T. Bonnesen and W. Fenchel. *Theory of convex bodies*. BCS Associates, Moscow - Idaho, 1987. Tranlated into English with the assistance of W. Fenchel from the 1974 revised German edition published by Springer-Verlag.
- [6] S. S. Chern. On integral geometry in klein spaces. *The Annals of Mathematics*, 43(1):178–189, 1942.
- [7] S. S. Chern. On the kinematic formula in integral geometry. *A mathematician and his mathematical work: selected papers of SS Chern*, 4(1):314, 1996.
- [8] H. Flanders. A proof of minkowski's inequality for convex curves. *The American Mathematical Monthly*, 75(6):581–593, 1968.
- [9] P. Goodey and W. Weil. Translative integral formulae for convex bodies. *Aequationes Mathematicae*, 34(1):64–77, 1987.
- [10] H. Groemer. On translative integral geometry. *Archiv der Mathematik*, 29(1):324–330, 1977.
- [11] T.H. Gronwall. Review: T. bonnesen, les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 36(9):617–617, 1930.
- [12] H. Hadwiger. Gegenseitige Bedeckbarkeit zweier Eibereiche und Isoperimetrie. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 86:152–156, 1941.

- [13] H. Hadwiger. Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate. *Comment. Math. Helv.*, 13:195–200, 1941.
- [14] D. Hug and R. Schätzle. Intersections and translative integral formulas for boundaries of convex bodies. *Mathematische Nachrichten*, 226:99–128, 2001.
- [15] D. Hug and R. Schneider. Kinematic and crofton formulae of integral geometry: recent variants and extensions. *Homenatge al professor Lluís Santaló i Sors (C. Barceló i Vidal, ed.)*, Universitat de Girona, pages 51–80, 2002.
- [16] Zhou J. and Ren D. Geometric inequalities from integral geometry point of view. *Acta Mathematica Scientia*, 30(5):1322–1339, 2010.
- [17] M. Li and J. Zhou. An isoperimetric deficit upper bound of the convex domain in a surface of constant curvature. *SCIENCE CHINA Mathematics*, pages 1–6, 2010.
- [18] R. Osserman. The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc*, 84(6):1182–1238, 1978.
- [19] R. Osserman. Bonnesen-style isoperimetric inequalities. *The American Mathematical Monthly*, 86(1):1–29, 1979.
- [20] C. Qin and W.X. Xu. The quasi Bol-Fujiwara theorem and its applicaiton. *to appear*.
- [21] J. Rataj and M. Zähle. Mixed curvature measures for sets of positive reach and a translative integral formula. *Geometriae Dedicata*, 57(3):259–283, 1995.
- [22] D.L. Ren. *Topics in integral geometry*. World Scientific, Singapore, 1994.
- [23] L.A. Santaló. *Integral geometry and geometric probability*. Cambridge Univ. Pr., 2004.
- [24] R. Schneider and W. Weil. Translative and kinematic integral formulae for curvature measures. *Mathematische Nachrichten*, 129(1):67–80, 1986.
- [25] W. Weil. Translative integral geometry. *Geobild*, 89:75–86, 1989.

- [26] G. Zhang and J. Zhou. Containment measures in integral geometry. In *Proceedings of the International Conference Integral Geometry and Convexity: Wuhan, China, 18-23 October 2004*, page 153. World Scientific Pub Co Inc, 2006.
- [27] G.Y. Zhang. Convex geometry analysis. 2008.
- [28] J. Zhou. On Bonnesen-style symmetric mixed isohomothetic inequalities. *to appear*.
- [29] J. Zhou. Sufficient conditions for one domain to contain another in a space of constant curvature. *PROCEEDINGS-AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY*, 126:2797–2804, 1998.
- [30] J. Zhou. On Bonnesen-type isoperimetric inequalities. In *Proceedings of the Tenth International Workshop on Differential Geometry*, pages 57–71, Taegu, 2006. Kyungpook Nat. Univ.
- [31] J. Zhou. Plan Bonnesen-type inequalities. *Acta Math. Sinica (Chinese Series)*, 50(6):1397–1402, 2007.
- [32] J. Zhou. On the isohomothetic inequalities. *preprint*, 2009.
- [33] J. Zhou and F. Chen. The Bonnesen-type inequalities in a plane of constant curvature. *J. Korean Math. Soc*, 44(6):1363–1372, 2007.
- [34] J. Zhou, Y. Xia, and C. Zeng. Some new Bonnesen-style inequalities. *J. Korean Math. Soc*, 48(2):421–430, 2011.

发表文章目录

- [1] 艾万君. 常曲率平面上的 *Crofton* 公式的一个统一证明. 西南大学学报(自然科学版), preprint
- [2] Ai, W.J. & Zhou, J.. *Poincaré and Blaschke Translative Formulae in the Plane*. a draft
- [3] J. Zhou, S. Yue & W. Ai. *On the Isohomothetic Inequalities*. preprint
- [4] 魏杰 & 艾万君, 关于球体体积与表面积的一些注记. 黔东南民族职业技术学院学报(综合版). 2011

致 谢

三年的硕士阶段学习转眼就要结束了,这本应是一个丰收的季节,那么我究竟收获了些什么?

刚开始入学时的我是激动的,因为以为自己可以大展手脚,在数学这片沃土上耕耘处自己的一片天地.是的,我也曾经被伍洪熙老先生的黎曼几何引论中那段至读者的话深深的打动.兹引于此

“你们的事业的成长,应该像一颗树的成长一样.应该是顺其自然的、无间断和全面的.我希望你们的根能够在这个学院的肥沃的土地下面尽量深入,以使你们的树干既粗且壮.这样,将来无论树叶多么茂盛丰满,也永不会有水分供应不暇的毛病.在上空将不时会有狂风大雨,也会有行雷闪电.所以切勿长得太高太快.”

这是他引用当代英国演员罗伦士奥利维亚在1947年 Old Vic 戏剧学院开幕典礼中的一段话,作为他至读者的话的开场白.

而后,他对初学者提出如下两点要求:

- ... 初学者应该致力于探求为什么所学的是有用的和必须的,否则不可能对所学的有一个全面的了解.
- ... 希望读者能够把握全书的要点,同时也把握每个定理,每个证明和概念的要点.

我认为这两点都是至关重要的.首先,学习数学不能够只是看作者怎么写,而是要多思考几个为什么,只有这样才能说你在开始理解数学了.检验这一点很容易,你打开书的目录,你会回忆起来那些主要的东西就表明你过关了.很明显这是需要一个过程的,做习题就是一个必不可缺而又易于被忽视的环节.其次,读书一定要读出作者的思想.由于篇幅的限制,作者往往不会直接呈现他原始的思想,这就需要读者自己去挖掘.在这一点上,我们很像那些寻宝者.我们有的只是一些断断续续的线索,而真正需要的是把这些线索串起来以获得埋藏在其中的宝藏.也只有这样,我们才能够学会作者的技巧和方法,明其中的原理,进而才能把握住要点.

在此,我想特别感谢姚纯青老师,他明显地有着这方面的要求,即把一个东西的要点与想法弄懂.我是比较欣赏他的授课方式的.我更要感谢我的导师——周家

足教授,是他把我带入积分几何这个美丽迷人的几何领域.在近三年的时间里,除给我们讲授积分几何基础知识外,还鼓励我们拓宽其它数学知识.他督促我们去重庆理工大学听陈新跃老师讲授的 Finsler 几何以及冯慧涛老师讲授的微分几何和指标理论,这些课程对我们增加知识的广度上大有裨益.他邀请了包括张高勇教授在内的许多世界著名几何学家莅临西南大学作积分几何前沿报告,除使我们有幸目睹这些几何大家的风采外,也让我们了解了当今世界积分几何分析前沿动态.他给我创造机会并支持我参加了全国研究生暑期学校的学习.他重视培养我们“作学问先学做人”及一丝不苟的治学精神.在我的论文写作过程中以及他给我们开设的“专题研讨”中,他都给予了我详尽的指导.特别是,在这次毕业论文的写作过程中,我更是体会到他的细致与关心.是他带着我一步一步的学习如何改文章,如何写文章.

此外,我还要感谢我的同门师兄姐妹们,他们耐心的解答我学习中的疑惑以及激烈的讨论都让我受益匪浅.

最后,我要感谢我的父母,是他们的辛勤劳动给予了我这次读研的机会,是他们的支持使我能够做自己喜欢的事.

艾万君
于重庆•西南大学
杏园•E栋234室
2012年5月7日