解析几何　授课讲义

艾万君

西南大学 • 数学与统计学院

2022 年 11 月

授课教师基本信息

学院	数学与统计学院
姓名	艾万君
联系方式	wanjunai@swu.edu.cn
授课学期	秋
办公室	25-1504

第一章・向量与坐标

- 向量的基本概念以及性质
  - 向量的基本概念
  - 向量的基本运算
    - 向量的加法
    - 向量的数乘
  - 向量的线性关系
- 课后习题
- 向量的坐标以及运算
  - 向量的坐标与点的坐标
  - 向量在一个轴上的射影
  - 两向量的数量积
  - 两向量的外积
  - 三向量的混合积
  - 三向量的双重外积
- 课后习题

- 解析几何几何是利用线性代数来研究几何的一门学科

- 解析几何几何是利用线性代数来研究几何的一门学科
- 几何的观念最初源于人们对自然空间的直观感受和经验 (形状、长度等)

- 解析几何几何是利用线性代数来研究几何的一门学科
- 几何的观念最初源于人们对自然空间的直观感受和经验 (形状、长度等)
- 欧几里得的几何原本 (公元前 300 年左右) 给出了直观几何的条理化结构, 并基于一些公理来研究几何. 他采用了演绎推理的方法.

欧氏空间中的线性几何

欧氏平面 E^2 和欧氏空间 E^3 正是几何原本研究的几何对象所处的空间. 我们观察欧氏平面和欧氏空间中的对象, 自然地有观察方向 $v \in S^1$ 或者 $v \in S^2$, 以及观察者与对象之间的连线: 直线 (段).
点、直线 (平面) 和方向可以视为欧氏几何最基本的元素, 它们是不加定义的. 我们可以利用这些基本元素定义更加复杂的几何对象, 例如 (有向) 线段, 三角形, 平行四边形, 四面体等. 进而研究它们的基本几何性质 (例如, 长度, 面积, 角度, 体积等).
为了利用代数的方法来研究线性几何, 我们有必要将空间的几何结构与线性代数联系起来. 这里用到的基本工具就是向量.

向量的概念

定义 1.1.

- 空间中既有大小又有方向的量就叫做向量.
- 我们一般用 $\overrightarrow{AB}$ 来表示以 A 为起点, B 为终点的向量. 有时为了简单, 也将向量记为 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ 等.
- 向量的大小叫做向量的模长, 用 $|\cdot|$ 来表示. 模长等于 1 的向量叫做单位向量, 模长等于 0 的向量叫做零向量. 零向量没有方向.
- 一个向量与另一个向量 (直线、平面) 平行指的是该向量所在直线与另一个向量所在直线 (直线、平面) 平行.
- 两个向量如果具有相同的模长和方向, 则称两个向量相等. 所有零向量都相等.
- 如果两个向量模长相等, 方向相反, 则称它们互为相反向量. 向量 $\vec{a}$ 的相反向量记为 $-\vec{a}$.
- 平行于同一直线 (平面) 的一组向量称为是共线向量 (共面向量).

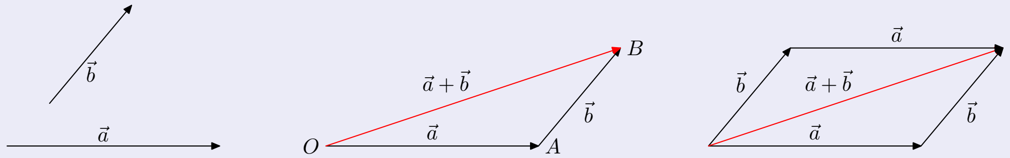
向量的概念 (续)

思考. 判断下列说法的正确性:

- 两个向量相等, 则必有他们的起点和终点重合.
- 两个模长相同的向量必相等?

向量的加法

定义 1.2. 给定向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 定义 $\vec{a}+\vec{b}$ 如下: 以空间中任一点 O 为起点, 作向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, 以 A 为起点, 作向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, 则向量 $\overrightarrow{OB}$ 即为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和. 记作 $\vec{a}+\vec{b}$.

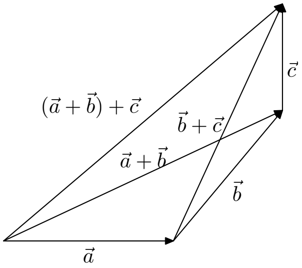


若两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线，根据定义容易求得 $\vec{a}+\vec{b}$.

向量加法的基本性质

空间中两个向量的加法满足如下基本性质:

- 交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
- 结合律: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
- 存在零元: $\vec{a}+0=\vec{a}$;
- 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=0$.

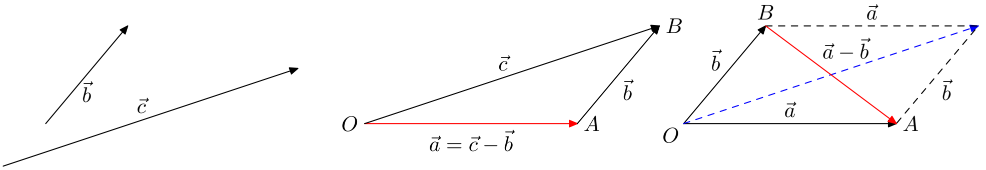


由交换律, 我们可以将 n 个向量的和简单记为 $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$, 而且关于两个向量和的三角形法则可以很容易的推广到 n 个向量的和的情形 (称为多边形法则)。

两个向量的差

前面, 我们知道若给定向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 使得 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, 则由于负元存在我们有 $\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{c}-\vec{b}$, 从而 $\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$. 这表明, 关于向量的加法我们可以移项.

由两向量加法的作图方法, 我们知道 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB}$, 从而得到两向量的差的作图方法:



向量的基本不等式

利用两向量加法的三角形法则, 容易得到如下的不等式

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

利用归纳法, 容易将这个不等式推广到任意有限多个向量的加法的情况:

$$|\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n| \le |\vec{a}_1| + |\vec{a}_2| + \cdots + |\vec{a}_n|.$$

向量数乘的定义

我们从向量的加法知道, $\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\cdots+\vec{a}}_{n\text{ 个}}=n\vec{a}$, 一般地我们对任意实数 λ 可以定义 $\lambda\vec{a}$.

定义 1.3. 假设 $\lambda\in\mathbb{R}$, $\vec{a}$ 是一个向量. 定义 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积为一个向量 $\lambda\vec{a}$, 其模长为 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$; 方向为: $\lambda>0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向, $\lambda<0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反方向. 我们将这种数与向量的乘法运算称为数乘.

注记.

- 从定义可知, 若 $\lambda=0$ 或者 $\vec{a}=0$, 则 $|\lambda\vec{a}|=0$, 此时 $\lambda\vec{a}=0$. 因此这时我们不必指定 $\lambda\vec{a}$ 的方向.
- 当 $\lambda=-1$ 时, 按照定义 $(-1)\vec{a}$ 就是 $\vec{a}$ 的相反向量 $-\vec{a}$. 因此, 我们常常将 $(-\lambda)\vec{a}$ 简单写成 $-\lambda a$.

数乘的基本性质

向量的数乘满足如下的基本运算规律:

定理 1.4. 假设 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{a}, \vec{b}$ 是向量. 则

1. 单位元存在: $1\vec{a} = \vec{a}$;
2. 结合律: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;
3. 分配律 I: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
4. 分配律 II: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

注记. 总结起来, 我们给出了三维空间中向量的定义以及向量的加法和数乘两种运算, 而且它们满足八条基本性质. 事实上, 在更加一般的抽象集合上, 如果也能定义加法和数乘运算, 而且它们也满足这八条性质, 则定义了抽象集合上的一个线性空间的结构.

线性表示

利用向量的加法和数乘, 可以刻画有限个向量的关系: 线性相关性与线性无关性.

定义 1.5. 假设 $\vec{a}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ 是向量.

- 若存在实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 使得
$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n,$$
则称 $\vec{a}$ 可由向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ 线性表示.
- 若零向量 0 可由向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ 线性表示, 且系数不全为零, 则称向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ 是线性相关的; 否则称为是线性无关的.

命题 1.6. 假设 $\vec{a}$ 可由向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ 线性表示. 若 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ 是线性无关的, 则表示系数是唯一的.

线性表示 (续)

证明. 事实上, 若 $\vec{a}$ 有两种表示

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\lambda_1'\vec{a}_1+\lambda_2'\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n'\vec{a}_n,$$

则

$$\left(\lambda_1-\lambda_1'\right)\vec{a}_1+\left(\lambda_2-\lambda_2'\right)\vec{a}_2+\cdots+\left(\lambda_n'-\lambda_n\right)\vec{a}_n=0,$$

由于向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ 是线性无关的, 从而系数必全为零. 即 $\lambda_1=\lambda_1', \lambda_2=\lambda_2', \ldots,$ $\lambda_n=\lambda_n'$. □

线性关系的几何意义

几何上来看, 线性相关性其实就是共线或者共面.

定理 1.7. 两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 是线性相关的当且仅当 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线.

证明. 回忆, 两个向量共线指的是它们所在直线平行. 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 其中一个为零向量, 结论显然成立. 因此, 不妨假设 $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$.
必要性: 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 线性相关, 即存在不全为零的实数 λ, μ 使得

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = 0 \implies \vec{b} = -\frac{\lambda}{\mu}\vec{a}.$$

因此 $\vec{a}, \vec{b}$ 具有相同或相反的方向, 从而它们是共线的.
充分性: 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 是共线的, 则它们必然具有相同或相反的方向, 从而若令 $\vec{e} = \vec{a}/|\vec{a}|$, 则存在实数 λ 使得

$$\vec{b} = \lambda\vec{e} = \frac{\lambda}{|\vec{a}|}\vec{a} \implies \frac{\lambda}{|\vec{a}|}\vec{a} - \vec{b} = 0.$$

线性关系的几何意义 (续)

可见 $\vec{a}, \vec{b}$ 是线性相关的. □

定理 1.8. 三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 线性相关的充要条件是它们共面.

证明. 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 中至少有一个向量为零向量, 此时结论显然成立. 因此不妨假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都不是零向量.
必要性: 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 线性相关, 则存在不全为零的实数 λ, μ, ν 使得

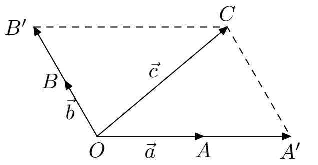
$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = 0.$$

不妨假设 $\nu \neq 0$, 则

$$\vec{c} = -\frac{\lambda}{\nu}\vec{a} - \frac{\mu}{\nu}\vec{b}.$$

若 λ, μ 至少有一个为零, 则上式表明两向量线性相关, 因此这两个向量共线, 从而三向量共面. 因此, 不妨假设 λ, μ 都非零. 由向量的加法和数乘可知: $\vec{c}$ 是以 $\vec{a}' := -\frac{\lambda}{\nu}\vec{a}$ 以及 $\vec{b}' := -\frac{\mu}{\nu}\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线. 故 $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}$ 共面, 从而 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面.

线性关系的几何意义 (续)



充分性: 根据共面的定义, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 所在的直线平行于同一个平面. 在该平面上取定点 O, 分别作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. 且过 C 作 $\vec{b}$ 的平行线交直线 OA 于 A', 过 C 作 $\vec{a}$ 的平行线交直线 OB 于 B', 则可设

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda\vec{a}, \quad \overrightarrow{OB'} = \mu\vec{b}.$$

于是根据构造, 知道

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

即

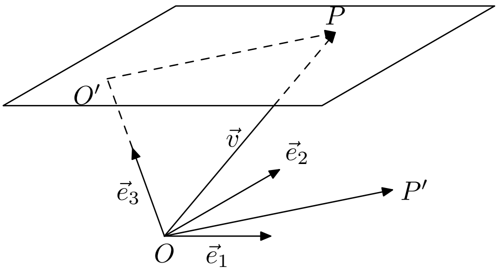
$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} - \vec{c} = 0,$$

可见 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是线性相关的. □

线性关系的几何意义 (续)

利用完全类似的分解思想, 可以证明

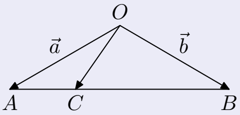
定理 1.9. 若向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 线性无关 (不共面), 那么空间中任意向量 $\vec{u}$ 可由向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 线性表示而且表示方式是唯一的.



注记. 线性无关的三向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 称为空间向量的基.

一些例子

例子 1.1. 如图, 假设 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}$, 若线段 AB 上一点 C 满足 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$, 试将 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ 表示为 $\vec{a},\vec{b}$ 的线性组合.



解. 注意到

$$\vec{c}=\vec{a}+\overrightarrow{AC}, \quad \vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=(1+1/\lambda)\overrightarrow{AC}.$$

因此

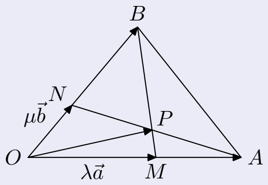
$$\vec{c}=\vec{a}+\frac{1}{1+1/\lambda}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{\vec{a}+\lambda\vec{b}}{1+\lambda}.$$

□

注记. 上述公式称为定比分点公式. 特别地, 若 C 为 AB 的中点, 则 $\lambda=1, \vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$.

一些例子 (续)

例子 1.2. 如图, 假设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$. 若 M, N 分别是 OA, OB 上两点, 使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{ON}=\mu\vec{b}$. $\overrightarrow{OP}$ 表示成 $\vec{a}, \vec{b}$ 的线性组合之表达式, 其中 P 为 AN 与 BM 之交点.



解. 假设 $\overrightarrow{OP}=\vec{c}, \overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{PA}$. 则根据定比分点的公式

$$\vec{c}=\frac{\lambda\vec{a}+m\vec{b}}{1+m}=\frac{\mu\vec{b}+n\vec{a}}{1+n} \Longrightarrow \frac{\lambda}{1+m}=\frac{n}{1+n}, \quad \frac{m}{1+m}=\frac{\mu}{1+n}.$$

从而

$$\frac{\lambda}{n}=\frac{1+m}{1+n}=\frac{m}{\mu} \Longrightarrow \frac{1+m-\lambda}{1}=\frac{m}{\mu},$$

一些例子 (续)

由此, 容易求得

$$m = \frac{\mu(\lambda-1)}{\mu-1}, \quad 1+m = \frac{m}{\mu} + \lambda = \frac{\lambda\mu-1}{\mu-1}.$$

带入得到

$$\vec{c} = \frac{(1-\mu)\lambda\vec{a}}{1-\lambda\mu} + \frac{(1-\lambda)\mu\vec{b}}{1-\lambda\mu}.$$

□

注记. 特别地, 若 M, N 都是中点时, $\lambda = \mu = 1/2$, 则 P 为三角形 OAB 的重心, 其表达式为 $\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

关于线性相关性的一些命题

根据线性相关、线性无关的定义，容易得到如下命题.

命题 1.10.

- 一个向量线性相关 (无关) 的充要条件是它为零 (非零) 向量;
- 向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ 线性相关的充要条件是其中一个向量可由其余向量线性表示;
- 若向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ 中一部分向量线性相关，则该向量组本身也线性相关;
- 若向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ 线性无关，则该向量组中一部分向量也线性无关.

课后习题

1. 假设 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}, \vec{c}=\overrightarrow{OC}$, 且 $\vec{a}, \vec{b}$ 线性无关. 利用线段的定比分点公式证明
   1.1 点 C 在直线 AB 上当且仅当 $\vec{c}$ 表示为 $\vec{a}, \vec{b}$ 的线性组合式 $\vec{c}=t_1\vec{a}+t_2\vec{b}$ 满足
   $$t_1+t_2=1.$$
   1.2 点 C 在线段 AB 上当且仅当 $\vec{c}$ 表示为 $\vec{a}, \vec{b}$ 的线性组合式 $\vec{c}=t_1\vec{a}+t_2\vec{b}$ 满足
   $$t_1+t_2=1, \quad t_1 \geq 0,\, t_2 \geq 0.$$
2. 利用例 1.2, 证明三角形 ABC 的内心 I, 可表示为
   $$\overrightarrow{OI}=\frac{a\vec{p}+b\vec{q}+c\vec{r}}{a+b+c},$$
   其中 a, b, c 分别是三角形 ABC 中角所对边的长度, $\vec{p}=\overrightarrow{OA}, \vec{q}=\overrightarrow{OB}, \vec{r}=\overrightarrow{OC}$.
3. P10: 8, 10, 12; P16: 5; P17: 6, 8, 9.

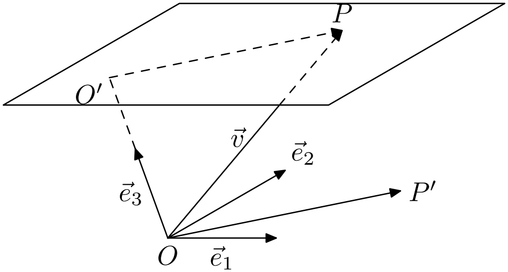
空间中的标架与坐标

前面, 我们看到给定空间中三个线性无关 (不共面) 的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, 它们可将任意空间中的向量 $\vec{v}$ 线性表示出来,

$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3,$$

其中 x, y, z 是实数, 而且这种表示方式是唯一的.

其想法是, 过 P 作平行于 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 张成的平面, 交 $\vec{e}_3$ 所在直线于点 O'. 然后注意到我们可假设 $\overrightarrow{OO'} = z\vec{e}_3$, 以及



$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = z\vec{e}_3 + \overrightarrow{O'P}.$$

而 $\overrightarrow{O'P}$ 与 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 共面, 从而存在 x, y 使得

$$\overrightarrow{O'P} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

即

$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

标架与坐标的定义

定义 3.1. 空间中一个定点 O 连同三个不共面的有序向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, 称为空间的一个 (仿射) 标架, 记作 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. 其中 O 称为该标架的原点, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 称为该标架的基向量.

基向量都为单位向量的标架称为笛卡尔标架, 基向量为相互垂直的单位向量的标架称为直角标架. 我们一般用 $\left\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ 来表示直角标架.

从前面的讨论我们知道, 给定空间中一个仿射标架 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, 则空间中任一向量都有唯一分解

$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

而且, 对任意空间中的点 P, 向量 $\overrightarrow{OP}$ 也可唯一分解为基向量的线性组合. 这种分解建立了空间中的点 P 与三元有序实数对 (x, y, z) 之间的一一对应.

定义 3.2. 假设 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 是空间中一个仿射标架.

- 上述分解中的分解系数 x, y, z 称为向量 $\vec{v}$ 关于该标架的坐标, 记作 $\{x, y, z\}$.
- 若 $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, 则称向量 $\overrightarrow{OP}$ 的关于该标架的坐标为 P 点的坐标, 记为 (x, y, z).

向量运算的坐标表示

有了向量以及点的坐标, 我们可以将前面关于向量的运算转化为坐标的运算. 在下面的讨论中, 我们固定仿射标架 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.

命题 3.3 (向量的坐标与点的坐标之间的关系). 假设向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的起点和终点坐标分别为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$. 则向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标为 $\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$. 即向量的坐标等于终点坐标减去起点坐标.

证明. 事实上, 按照点的坐标的定义

$$\overrightarrow{OP_1}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3,\quad \overrightarrow{OP_2}=x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3.$$

从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}&=(x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3)-(x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3)\\&=(x_2-x_1)\vec{e}_1+(y_2-y_1)\vec{e}_2+(z_2-z_1)\vec{e}_3.\end{aligned}$$

由此可见结论成立. □

向量运算的坐标表示 (续)

根据向量的运算法则, 容易得到

命题 3.4 (向量的和与数乘之坐标表示). 假设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的坐标分别为 $\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\{X_2, Y_2, Z_2\}$, 则

$$\vec{a} + \vec{b} = \{X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2\}, \quad \lambda\vec{a} = \{\lambda X_1, \lambda Y_1, \lambda Z_1\}.$$

向量运算的坐标表示 (续)

由于两向量共线、三向量共面的充要条件都是它们线性相关. 从而我们得到

命题 3.5 (两向量共线的坐标表示). 假设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的坐标分别为 $\{X_1, Y_1, Z_1\}, \{X_2, Y_2, Z_2\}$, 则 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ, μ 使得

$$\lambda X_1 + \mu X_2 = \lambda Y_1 + \mu Y_2 = \lambda Z_1 + \mu Z_2 = 0.$$

注记. 有时, 我们将上述条件改写为更加便于记忆的形式

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

注意, 当分母有一个为零时, 要么分母全为零, 要么对应的分子必也为零. (例如, $X_2 = 0$, 则 $\lambda X_1 = 0$, 若 X_1 不为零, 则 $\lambda = 0$, 从而 $\mu \neq 0$. 故 $Y_2 = 0 = Z_2$.

向量运算的坐标表示 (续)

命题 3.6 (三向量共面的坐标表示). 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的坐标分别为 $\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\{X_3, Y_3, Z_3\}$. 则它们共面当且仅当行列式

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

证明. 由于三向量共面当且仅当它们线性相关, 即存在不全为零的实数 λ, μ, ν 使得

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = 0.$$

这表明

$$\begin{cases} \lambda X_1 + \mu Y_1 + \nu Z_1 = 0 \\ \lambda X_2 + \mu Y_2 + \nu Z_2 = 0 \\ \lambda X_3 + \mu Y_3 + \nu Z_3 = 0 \end{cases}$$

上述齐次线性方程组有非零解 (λ, μ, ν) 从而其系数行列式为零. □

向量运算的坐标表示 (续)

推论 3.7 (三点共线的坐标表示). 假设 $A_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$ 是空间中三个点, 则它们共线的充要条件是 $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}$ 共线, 即

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}.$$

推论 3.8 (四点共面的坐标表示). 假设 $A_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3, 4$ 是空间中四个点, 则它们共线的充要条件是 $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ 共面, 即

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

一些例子

利用坐标表示, 我们可以将前面推导的线段的定比分点公式用坐标表达式给出.
在下面两个例子中, 我们假设 A, B, C 三点的坐标分别为 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$.

例子 3.1. 若 C 分线段 AB 的定比为 λ, 即 $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, 则 C 点的坐标满足

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

证明. 回忆若 C 为直线 AB 上一点, 满足 $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, 则 $\vec{c} = \frac{\vec{a}+\lambda\vec{b}}{1+\lambda}$, 其中 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. 利用向量的坐标, 此即

$$\{x_3, y_3, z_3\} = \left\{\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right\}.$$

可见结论成立. □

一些例子 (续)

根据上面的例子, 特别地, 我们得到线段 A, B 中点 C 的坐标表示

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

一些例子 (续)

例子 3.2. 回忆, 利用定比分点的公式, 前面我们推导过三角形 ABC 重心 G 的表达式为

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

因此若用字母来表示点的坐标, 则

$$G - A = \frac{1}{3}(B - A + C - A) \implies G = \frac{1}{3}(A + B + C),$$

即重心 G 的坐标为

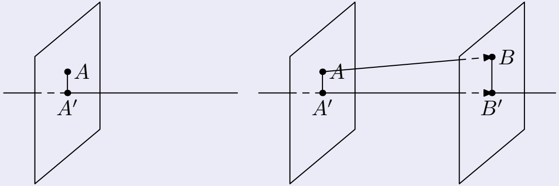
$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right).$$

向量在一个轴上的射影的定义

为了在接下来讨论两向量的内积的几何意义, 我们首先来看向量沿着一直线的投影.

定义 3.9. 假设 P, A, B 是空间中的点, l 是空间中一直线.

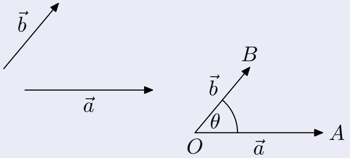
- 点 P 在直线 l(称为轴) 上的射影P' 定义为过点 P 且和该直线垂直的平面与该直线的交点, 记作 $P' = \pi_l(P)$.
- 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在直线 l 上的射影向量$\overrightarrow{A'B'}$ 就是分别以 A, B 在轴 l 上的投影为起点和终点的向量, 即 $A' = \pi_l(A), B' = \pi_l(B)$. 我们将 $\overrightarrow{AB}$ 的射影向量记为 $\pi_l(\overrightarrow{AB})$. 若取与轴 l 平行的单位向量 $\vec{e}$, 则 $\pi_l(\overrightarrow{AB})$ 表示为 $\vec{e}$ 的系数称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的射影, 记作 $\bar{\pi}_l(\overrightarrow{AB})$.



两向量的夹角

为了讨论向量射影的几何意义, 我们需要定义两向量的夹角.

定义 3.10. 假设 $\vec{a},\vec{b}$ 是两非零向量. 任意固定空间中的点 O, 并作图使得 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 则规定向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为射线 OA, OB 所成的角. 记作 $\angle(\vec{a},\vec{b})$.



注记. 明显地, 当 $\vec{a},\vec{b}$ 方向相同时, 夹角为零. 当 $\vec{a},\vec{b}$ 方向相反时, 夹角为 π. 其余情形有 $0<\angle(\vec{a},\vec{b})<\pi$.

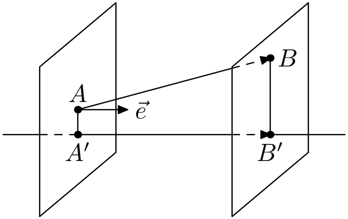
向量射影的几何意义

定理 3.11. 假设 $\vec{a}$ 是空间中一向量, l 是空间中一直线. 则 $\vec{a}$ 在直线 l 上的投影 $\bar{\pi}_l(\vec{a})$ 满足

$$\bar{\pi}_l(\vec{a}) = |\vec{a}|\cos\theta, \quad \theta = \angle(\vec{e}, \vec{a}),$$

其中 $\vec{e}$ 为平行于直线 l 的一个单位向量.

证明. 如图, 若夹角 θ 为 $\pi/2$. 则结论自然成立.
若 $\theta < \pi/2$, 则根据三角形的余弦以及一个向量的投影的定义, 我们知道 $\bar{\pi}_l(\vec{a})\vec{e} = \pi_l(\vec{a}) = \overrightarrow{A'B'} = |\overrightarrow{A'B'}|\vec{e}$. 注意到 $|\overrightarrow{A'B'}| = |AB|\cos\theta = |\vec{a}|\cos\theta$. 可见结论成立.
若 $\theta > \pi/2$, 则完全类似地, 我们知道 $\bar{\pi}_l(\vec{a})\vec{e} = \pi_l(\vec{a}) = \overrightarrow{A'B'} = |\overrightarrow{A'B'}|(-\vec{e})$. 注意到 $|\overrightarrow{A'B'}| = |AB|(-\cos\theta) = -|\vec{a}|\cos\theta$. 可见结论仍然成立.



□

向量射影的基本性质

根据上述定义, 我们还容易知道向量的射影具有线性性.

定理 3.12. 假设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是空间中两个向量, λ 为实数. l 是空间中一直线. 则

$$\pi_l(\vec{a}+\vec{b}) = \pi_l(\vec{a}) + \pi_l(\vec{b}), \quad \pi_l(\lambda\vec{a}) = \lambda\pi_l(\vec{a}).$$

两向量数量积的定义

前面我们通过建立标架, 将空间中的点 P 或者向量 $\overrightarrow{OP}$ 与三元有序实数对 (x, y, z) 一一对应起来. 并证明了下面, 我们将通过坐标来研究两个向量的运算. 我们总是假设取定空间中的直角标架 $\left\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

定义 3.13. 假设 $\vec{a}\{X_1, Y_1, Z_1\}, \vec{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$ 是空间中两向量. 定义 $\vec{a}, \vec{b}$ 的内积为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle := X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$$

注记. 这样定义表面上看起来依赖于直角标架的选取, 事实上我们将证明这样定义的内积不依赖于直角标架的选取, 从而是定义良好的.

内积的基本运算性质

两向量的内积满足如下运算性质:

定理 3.14. 假设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是空间中的向量, λ,μ 是实数. 则有

- 交换律: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
- 数乘结合律: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$;
- 分配律: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;
- 正定性: $\vec{a}^2:=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0$, 而且等号成立当且仅当 $\vec{a}=0$.

注记. 有时, 我们将数乘结合性和分配律写成如下的形式

$$(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\cdot\vec{c}=\lambda\vec{a}\cdot\vec{c}+\mu\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

称为内积的线性性. 事实上, 根据交换律 (对称性), 内积关于后一分量也是线性的, 从而称内积为双线性的二元函数.

内积的几何意义

假设与非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 同方向的单位向量分别记为 $\vec{a}^o,\vec{b}^o$, 则根据内积的线性性, 我们有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(|\vec{a}|\vec{a}^o)\cdot(|\vec{b}|\vec{b}^o)=|\vec{a}||\vec{b}|\vec{a}^o\cdot\vec{b}^o.$$

为了研究内积的几何意义, 我们只需研究 $\vec{a}^o\cdot\vec{b}^o$ 的几何意义. 注意到 $\vec{a}^o,\vec{b}^o$ 都为单位向量, 不妨假设它们位于 $\vec{i},\vec{j}$ 决定的平面上, 若设 θ_a,θ_b 分别为 $\vec{i}$ 旋转到 $\vec{a},\vec{b}$ 所成的角度 (逆时针为正), 则

$$\vec{a}^o=\{\cos\theta_a,\sin\theta_a,0\}\,,\quad \vec{b}^o=\{\cos\theta_b,\sin\theta_b,0\}\,,$$

故

$$\vec{a}^o\cdot\vec{b}^o=\cos\theta_a\cos\theta_b+\sin\theta_a\sin\theta_b=\cos(\theta_a-\theta_b).$$

注意到 $\theta_a-\theta_b=\pm\angle(\vec{a},\vec{b})$ 或者 $\pm(2\pi-\angle(\vec{a},\vec{b}))$, 从而我们得到 $\vec{a}^o\cdot\vec{b}^o=\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$. 因此

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}).$$

结合向量射影的几何意义: $\pi_{\vec{b}}(\vec{a})=|\vec{a}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$, 故

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\pi_{\vec{b}}(\vec{a})|\vec{b}|=\pi_{\vec{a}}(\vec{b})|\vec{a}|,$$

即两非零向量的内积等于其中一个向量的模长乘上另一个向量在其上的投影.

向量内积的一些应用

注记.

- 根据两向量内积的几何意义, 我们知道, 其定义不依赖于直角标架的选取 (但其定义不能是一般的仿射标架);
- 教材上将两向量的内积定义为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}),$$

与这里的定义是等价的.

两向量垂直当且仅当其夹角为 $\pi/2$, 即 $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=0$, 从而我们得到

定理 3.15. 两向量相互垂直的充要条件是其内积为零.

向量内积的一些应用 (续)

例子 3.3. 证明四边形的对角线平方和等于它个边的平方和的充要条件是该四边形为平行四边形.

证明. 假设四边形 $ABCD$ 中 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{BC}, \vec{c}=\overrightarrow{CD}, \vec{d}=\overrightarrow{DA}$. 则明显地有

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0, \quad \vec{e}=\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\vec{c}, \quad \vec{f}=\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}.$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-\left(|\vec{e}|^2+|\vec{f}|^2\right)\\ &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2-|\vec{b}+\vec{c}|^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2\\ &= |\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}+\vec{c}|^2.\end{aligned}$$

由此可见 $\Delta=0$ 当且仅当 $\vec{a}+\vec{c}=0, \vec{b}+\vec{d}=0$, 即当且仅当四边形 $ABCD$ 是平行四边形. □

向量内积的一些应用 (续)

例子 3.4. 证明三角形 ABC 的三条高线交于一点.

证明. 假设三角形 ABC 中 AB, AC 边上的高交于点 P, 令 $\vec{a} = \overrightarrow{PA}, \vec{b} = \overrightarrow{PB}, \vec{c} = \overrightarrow{PC}$. 则只需证明 $\vec{a} \perp \overrightarrow{BC}$. 事实上, 注意到

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB} = \vec{c} - \vec{b},$$

从而

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

而由已知条件, 有 $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{AC}$, 因此

$$\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 = \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \implies \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

由此可见结论成立. □

注记. 在向量法解题过程中, 我们应该根据问题恰当的选取向量将题设条件用向量表示出来.

向量内积的一些应用 (续)

- 利用内积, 容易求得一个向量 $\vec{a}=\{X,Y,Z\}$ 的模长

$$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=X^2+Y^2+Z^2.$$

即

$$|\vec{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

- 由此, 还可得到两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离公式

$$d(P_1,P_2)=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

向量内积的一些应用 (续)

- 根据内积的几何意义, 容易求得两向量 $\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\},\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$ 的夹角

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

一个向量在另一个向量的投影

$$\bar{\pi}_{\vec{b}}(\vec{a})=|\vec{a}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

向量内积的一些应用 (续)

- 向量与直角坐标 $\left\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ 的各个基向量 (坐标轴) 之间的夹角称为该向量的方向角. 假设向量 $\vec{a}=\{X,Y,Z\}$ 与 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 的夹角分别为 α,β,γ, 则

$$\cos\alpha=\cos\angle(\vec{a},\vec{i})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

同理求得

$$\cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

向量内积的一些应用 (续)

例子 3.5. 利用空间中两向量的内积证明如下的 *Cauchy-Schwarz* 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{3} a_i^2 \sum_{i=1}^{3} b_i^2.$$

而且等号成立当且仅当

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

证明. 事实上, 在直角标架下, 若令 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$\sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

向量内积的一些应用 (续)

因为 $|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})| \le 1$, 而且等号成立当且仅当 $\vec{a},\vec{b}$ 共线, 故有

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\angle(\vec{a},\vec{b}) \le |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i^2 \sum_{i=1}^{3} b_i^2,$$

而且等号成立当且仅当 $\vec{a},\vec{b}$ 共线, 即

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

$\square$

两向量的外积的定义

为了用坐标来定义两个向量的外积, 我们需要先回忆行列式的基本性质. 引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

上式左边称为二阶行列式. 类似地, 引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

有时为了方便叙述行列式的性质, 我们将行列式的每一行或者列用希腊字母表示, 例如用行和列表示上述三阶行列式分别为

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}.$$

两向量的外积的定义 (续)

命题 3.16. 二阶行列式和三阶行列式具有如下性质

- 反交换律: 交换行列式的两行 (或两列), 行列式改变符号; 例如: $|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3| = -|\alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_3|$.
  特别地, 若行列式两行或者两列相同, 则行列式为零;
- 数乘法则: 将行列式的某一行或者列乘以一个常数, 等于该常数乘以原来的行列式; 例如

$$|\lambda\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3| = \lambda|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3|.$$

- 和法则: 若行列式的某一行或列可以写成 $\alpha+\beta$ 的形式, 则该行列式可以拆成两个行列式的和, 它们分别是将对应的行或列分别用 α 和 β 替换而得的. 例如,

$$|\alpha_1+\beta_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3| = |\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3| + |\beta_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3|.$$

- 高斯消元法则: 结合以上三条, 我们得到将行列式的任意行 (列) 的一个常数倍加到另一行 (列) 而不改变行列式. 例如 $|\alpha_1+\lambda\alpha_2 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3| = |\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3|$.

两向量的外积的定义 (续)

有了这些准备, 我们可以在直角标架下来定义两向量的外积. 我们始终假设标架为直角标架 $\left\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$, 而且向量 $\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\},\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$ 是在该标架下的两个向量.

定义 3.17. 假设 $\vec{a},\vec{b}$ 是空间中两个向量. 定义它们的外积 (也称为向量积) 为

$$\vec{a}\wedge\vec{b}:=\vec{a}\times\vec{b}:=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}:=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

注记. 这里同样有良定性的问题, 我们也将通过外积的几何意义来说明.

外积的基本性质

利用行列式的基本性质, 我们可以得到外积的基本性质.

定理 3.18. 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是空间中两个向量, λ 是一个实数. 则

- 反交换律: $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$.
- 数乘结合律: $\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\lambda\vec{b})$.
- 分配律: $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$.
- $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

证明. 上述基本性质是行列式相应性质的直接推论. □

推论 3.19. 向量的外积具有 (双) 线性性:

$$(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \wedge \vec{c} = \lambda\vec{a} \wedge \vec{c} + \mu\vec{b} \wedge \vec{c}.$$

补充作业 3.1. 请自行验证行列式的相应法则, 并给出上述向量外积基本性质的证明.

外积的几何意义

为了研究两非零向量外积的几何意义, 我们不妨通过恰当的选取直接标架, 假设 $\vec{a}, \vec{b}$ 位于 $\vec{i}, \vec{j}$ 平面内. 注意到

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (|\vec{a}|\vec{a}^o) \wedge (|\vec{b}|\vec{b}^o) = |\vec{a}||\vec{b}|\vec{a}^o \wedge \vec{b}^o.$$

现在, 由于 $\vec{a}^o, \vec{b}^o$ 都是 $\vec{i}, \vec{j}$ 平面内的单位向量, 若设 θ_a, θ_b 分别为 $\vec{i}$ 旋转到 $\vec{a}, \vec{b}$ 所成的角度 (逆时针为正). 则

$$\vec{a}^o = \{\cos\theta_a, \sin\theta_a, 0\}, \quad \vec{b}^o = \{\cos\theta_b, \sin\theta_b, 0\}.$$

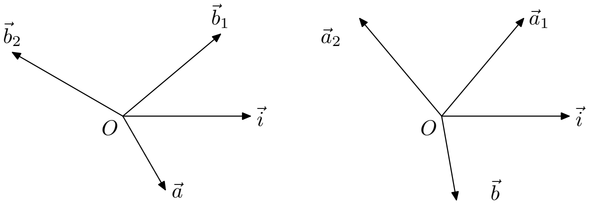
从而

$$\vec{a}^o \wedge \vec{b}^o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta_a & \sin\theta_a & 0 \\ \cos\theta_b & \sin\theta_b & 0 \end{vmatrix} = (\sin\theta_b \cos\theta_a - \cos\theta_b \sin\theta_a)\vec{k} = \sin(\theta_b - \theta_a)\vec{k}.$$

注意到 $\theta_b - \theta_a = \pm\angle(\vec{a}, \vec{b})$ 或者 $\pm(2\pi - \angle(\vec{a}, \vec{b}))$, 我们得到

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})\vec{k}.$$

外积的几何意义 (续)



$$\theta_{b_1} - \theta_a = \angle(\vec{a}, \vec{b}_1) \qquad \theta_b - \theta_{a_1} = -\angle(\vec{a}, \vec{b}_1)$$

$$\theta_{b_2} - \theta_a = 2\pi - \angle(\vec{a}, \vec{b}_2) \qquad \theta_b - \theta_{a_2} = -(2\pi - \angle(\vec{a}, \vec{b}_2))$$

稍微仔细分析符号, 得到外积的几何意义为:

命题 3.20. 两非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 外积是一个向量, 其大小为 $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$, 即为 $\vec{a}, \vec{b}$ 张成的平行四边形的面积; 方向为: 垂直于 $\vec{a}, \vec{b}$ 所在平面, 且 $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}\right\}$ 成右手系.

推论 3.21. 两向量共线的充要条件是它们的外积为零.

两向量外积的应用

利用外积的几何意义, 我们容易求得: 假设三角形 OAB 中, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}$, 则

- 三角形 OAB 的面积: $S=\frac{1}{2}|\vec{a}\wedge\vec{b}|=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$;
- 三角形 OAB 中, OA 边上的高

$$h_{\vec{a}}=\frac{2S}{|\vec{a}|}=\frac{|\vec{a}\wedge\vec{b}|}{|\vec{a}|}=|\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b});$$

命题 3.22 (正弦定理). 假设三角形 ABC 中其角 A,B,C 对应的边长分别为 a,b,c. 则

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

证明. 假设 $\vec{a}=\overrightarrow{BC}, \vec{b}=\overrightarrow{CA}, \vec{c}=\overrightarrow{AB}$, 则 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. 从而

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge(-\vec{a}-\vec{c})=-\vec{a}\wedge\vec{c},\quad \vec{b}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge(-\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\wedge\vec{b}.$$

两向量外积的应用 (续)

由此可见

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a} \wedge \vec{c}| = |\vec{b} \wedge \vec{c}|,$$

从而

$$|\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{c}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{c}) = |\vec{b}||\vec{c}| \sin \angle(\vec{b}, \vec{c}).$$

由于 $\angle A = \pi - \angle(\vec{b}, \vec{c})$, 故 $\sin A = \sin \angle(\vec{b}, \vec{c})$. 对角 B, C 有类似公式. 于是我们得到

$$ab \sin C = ac \sin B = bc \sin A,$$

等式两边同除 abc, 变形即得结论. □

两向量外积的应用 (续)

例子 3.6. 假设三角形 ABC 中, $\vec{a}=\overrightarrow{BC}, \vec{b}=\overrightarrow{CA}, \vec{c}=\overrightarrow{AB}$. 证明

- $|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2$;
- 若 $|\vec{a}|=a, |\vec{b}|=b, |\vec{c}|=c$, 则

$$S_{\triangle ABC}^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

其中 $2p=a+b+c$. 上述公式称为三角形的 Heron 公式.

证明. 第一条根据两向量外积或内积的公式容易得到. 仅证明第二条.
由第一条, 我们知道

$$(2S_{\triangle ABC})^2=|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2=a^2b^2-|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2.$$

注意到 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, 即 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$, 从而

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2 \implies 2\vec{a}\cdot\vec{b}=c^2-a^2-b^2.$$

两向量外积的应用 (续)

因此

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ABC}^2 &= \frac{1}{4}\left(a^2b^2 - \frac{1}{4}(c^2-a^2-b^2)^2\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(4a^2b^2 - (c^2-a^2-b^2)^2\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(2ab+c^2-a^2-b^2\right)\left(2ab-c^2+a^2+b^2\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(c^2-(a-b)^2\right)\left((a+b)^2-c^2\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(c+a-b\right)\left(c-a+b\right)\left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(2p-2b\right)\left(2p-2a\right)\left(2p\right)\left(2p-2c\right) \\
&= p(p-a)(p-b)(p-c).
\end{aligned}
$$

□

三向量的混合积的定义

利用向量的内积和外积, 我们可以定义三个向量的混合积.

定义 3.23. 空间三向量向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的混合积定义为

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

混合积的几何意义

根据内积和外积的几何意义, 容易得到混合积的几何意义.

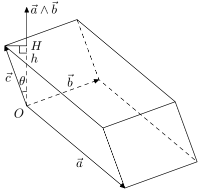
定理 3.24. 三个不共面的向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的混合积等于以它们为棱长的平行六面体的有向体积. 即当 $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ 为右手系时取正号, 左手系时取负号.

证明. 如图, 假设 $\theta = \angle(\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c})$, 平行六面体中由 $\vec{a}, \vec{b}$ 张成的平行四边形面积为 S, 对应的高为 h. 则其体积为 $V = Sh$.

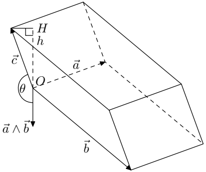
现在, 由于

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \wedge \vec{b}||\vec{c}| \cos\theta = S|\vec{c}| \cos\theta.$$

由图可知, 当 $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ 成右手系时, $h = |\vec{c}| \cos\theta$; 成左手系时, $h = -|\vec{c}| \cos\theta$, 代入上式知结论成立.



$h = |\vec{c}| \cos\theta$



$h = |\vec{c}| \cos(\pi - \theta) = -|\vec{c}| \cos\theta$

□

推论 3.25. 三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件是 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

三向量混合积的坐标计算公式

命题 3.26. 假设在直角标架下, $\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\},\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\},\vec{c}=\{X_3,Y_3,Z_3\}$, 则

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\X_1&Y_1&Z_1\\X_2&Y_2&Z_2\end{vmatrix}\cdot\left(X_3\vec{i}+Y_3\vec{j}+Z_3\vec{k}\right)=\begin{vmatrix}X_3&Y_3&Z_3\\X_1&Y_1&Z_1\\X_2&Y_2&Z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X_1&Y_1&Z_1\\X_2&Y_2&Z_2\\X_3&Y_3&Z_3\end{vmatrix}.$$

这就是混合积在直角坐标下的计算公式.

由行列式的基本性质, 我们得到

命题 3.27. 假设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是空间中三个向量. 则轮换混合积的三个因子, 其值不改变:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b}).$$

对调混合积中任意两个因子, 其值改变符号:

$$(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c},\vec{b})=(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

一些推论和例子

推论 3.28. 混合积的定义可以改为

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}).$$

事实上, 因为

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

例子 3.7. 假设 $\vec{u} = a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 + c_1\vec{e}_3$, $\vec{v} = a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + c_2\vec{e}_3$, $\vec{w} = a_3\vec{e}_1 + b_3\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$, 则

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

一些推论和例子 (续)

法一. 注意到 $f(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) := (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ 是关于 $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ 的三重线性函数, 而欲证等式的右边也是关于 $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ 的坐标的三重线性函数. 即, 若令 $g(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, 则 f 满足

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{u}_1+\mu\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}) &= \lambda f(\vec{u}_1,\vec{v},\vec{w})+\mu f(\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}),\\ f(\vec{u},\lambda\vec{v}_1+\mu\vec{v}_2,\vec{w}) &= \lambda f(\vec{u},\vec{v}_1,\vec{w})+\mu f(\vec{u},\vec{v}_2,\vec{w}),\\ f(\vec{u},\vec{v},\lambda\vec{w}_1+\mu\vec{w}_2) &= \lambda f(\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1)+\mu f(\vec{u},\vec{v},\vec{w}_2), \end{aligned}$$

满足这样性质的函数 f 就称为三重线性的. 根据行列式列的和性质, 容易证明 g 也是三重线性函数.

对三重线性函数, 利用线性性, 容易知道

$$\begin{aligned} f(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) &= f(a_1\vec{e}_1+b_1\vec{e}_2+c_1\vec{e}_3,\vec{v},\vec{w})\\ &= a_1 f(\vec{e}_1,\vec{v},\vec{w})+b_1 f(\vec{e}_2,\vec{v},\vec{w})+c_1 f(\vec{e}_3,\vec{v},\vec{w}). \end{aligned}$$

一些推论和例子 (续)

完全类似地进一步将 $\vec{v},\vec{w}$ 按照系数展开, 最终我们得到 $f(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ 的函数值由 $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ 表示成 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 的系数以及 f 在 $\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k$ 上的值决定. 由于 g 也具有三重线性性, 故 $g(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ 的函数值也是由 $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ 表示成 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 的系数以及 g 在 $\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k$ 上的值决定的. 但是, 容易看出来, f,g 展开后的这些系数是对应相等的. 故欲证 $f=g$, 只需说明

$$f(\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k)=g(\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k),\quad \forall i,j,k=1,2,3. \tag{3.1}$$

上述事情是可以逐一验证的. 例如

$$f(\vec{e}_3,\vec{e}_2,\vec{e}_1)=(\vec{e}_3,\vec{e}_2,\vec{e}_1)=-(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3),$$

$$g(\vec{e}_3,\vec{e}_2,\vec{e}_1)=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=-(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3),$$

一些推论和例子 (续)

又如

$$f(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_2)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_2)=0,$$

$$g(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_2)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{vmatrix}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=0.$$

这样, 我们利用欲证不等式左右两边的多重线性性, 将问题化为验证(3.1)成立, 而它可以逐个验证即可. □

注记. 上述利用对称性和线性性的方法在研究张量的性质时常用.

法二. 我们采用分块矩阵的写法:

$$\vec{u}=[\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix},\quad \vec{v}=[\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix},\quad \vec{w}=[\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]\begin{bmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{bmatrix}.$$

一些推论和例子 (续)

若还假设

$$\vec{e}_i = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

则

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

注意到,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

一些推论和例子 (续)

故

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \det\left(\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3).$$

□

三向量双重外积的定义

定义 3.29. 给定空间中三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. 先作其中两个向量的外积, 再与另一个向量作外积所得的向量称为这三个向量一个的双重外积.
例如, $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}$ 就是 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的一个双重外积.

注记. 根据外积的几何意义, 容易知道 $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}$ 是一个向量, 它与 $\vec{c}$ 垂直; 而且也与 $\vec{a}\wedge\vec{b}$ 垂直. 但是 $\vec{a},\vec{b}$ 都与 $\vec{a}\wedge\vec{b}$ 垂直, 故 $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c},\vec{a},\vec{b}$ 都垂直于同一个向量 $\vec{a}\wedge\vec{b}$, 从而它们共面, 于是利用外积的线性性, 我们可以假设

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=\lambda|\vec{c}|\vec{a}+\mu|\vec{c}|\vec{b}.$$

为了求出具体的 λ,μ, 不妨假设 $\vec{a},\vec{b}$ 线性无关且 $\vec{c}$ 为单位向量 $\vec{e}$. 此时

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{e}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}.$$

三向量双重外积的定义 (续)

为此, 我们先做一个准备. 假设在直角标架下 $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\vec{k} = \{0, 0, 1\}$, 那么

$$(\vec{a} \wedge \vec{k}) \cdot (\vec{b} \wedge \vec{k}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{k})(\vec{b} \cdot \vec{k}).$$

事实上, 直接计算得到

$$(\vec{a} \wedge \vec{k}) = Y_1\vec{i} - X_1\vec{j}, \quad (\vec{b} \wedge \vec{k}) = Y_2\vec{i} - X_2\vec{j}, \quad (\vec{a} \cdot \vec{k})(\vec{b} \cdot \vec{k}) = Z_1 Z_2,$$

代入即得到上述等式.

- 当 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 时: 通过选取恰当的直角标架, 不妨假设 $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{k}$, 则

$$\begin{aligned}
\lambda &= \Big((\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{e}\Big) \cdot \vec{a}/|\vec{a}|^2 = (\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{e}, \vec{a})/|\vec{a}|^2 \\
&= -(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{a} \wedge \vec{e})/|\vec{a}|^2 = -(\vec{b} \wedge \vec{k}) \cdot (\vec{e} \wedge \vec{k}) \\
&= -(\vec{b} \cdot \vec{e} - (\vec{b} \cdot \vec{k})(\vec{e} \cdot \vec{k})) = -\vec{b} \cdot \vec{e},
\end{aligned}$$

  这是因为我们假设了 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = \vec{b} \cdot \vec{k}$.

三向量双重外积的定义 (续)

总结起来, 我们得到了

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{e} = -(\vec{b} \cdot \vec{e})\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

因此, 通过交换 $\vec{a}, \vec{b}$ 的地位, 我们得到

$$(\vec{b} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{e} = -(\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{b} + \tilde{\mu}\vec{a}.$$

然而

$$(\vec{b} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{e} = -(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{e},$$

因此

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{e} = -(\vec{b} \cdot \vec{e})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{b}.$$

三向量双重外积的定义 (续)

- 一般地, 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$, 则不妨假设 $\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{a}^{\perp}$, 这里 $\vec{a}^{\perp}$ 是 $\vec{a},\vec{b}$ 张成的平面中垂直于 $\vec{a}$ 的一个单位向量, 则

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{e}=(\vec{a}\wedge(m\vec{a}+n\vec{a}^{\perp}))\wedge\vec{e}=(\vec{a}\wedge(n\vec{a}^{\perp}))\wedge\vec{e}.$$

利用前面已经证明的垂直的情形, 我们得到

$$\begin{aligned}
n(\vec{a}\wedge\vec{a}^{\perp})\wedge\vec{e}&=(\vec{a}\cdot\vec{e})n\vec{a}^{\perp}-(n\vec{a}^{\perp}\cdot\vec{e})\vec{a}\\
&=(\vec{a}\cdot\vec{e})(\vec{b}-m\vec{a})-\left((\vec{b}-m\vec{a})\cdot\vec{e}\right)\vec{a}\\
&=(\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{e})\vec{a}.
\end{aligned}$$

可见, 仍然有

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{e}=(\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{e})\vec{a}.$$

最后, 将 $\vec{e}$ 还原为 $\vec{c}/|\vec{c}|$, 我们得到,

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

三重向量积的计算公式

定理 3.30. 假设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是是空间中三个向量, 则

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c} &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a},\\
\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.
\end{aligned}
$$

作为应用, 我们有

推论 3.31 (Lagrange 恒等式). 假设 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ 是空间中四个向量, 则

$$
(\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2)\cdot(\vec{a}_3\wedge\vec{a}_4)=(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3)(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_4)-(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_4)(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3).
$$

证明. 事实上, 利用双重向量积的计算公式, 得到

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2)\cdot(\vec{a}_3\wedge\vec{a}_4) &= (\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)=((\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2)\wedge\vec{a}_3)\cdot\vec{a}_4\\
&= \big((\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3)\vec{a}_2-(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)\cdot\vec{a}_1\big)\cdot\vec{a}_4,
\end{aligned}
$$

展开即得欲证之结论. □

课后习题

1. P22: 1; P23: 4,8,9,10;
2. P26: 1;
3. P33: 1 (2), (3); 3 (2), (3), (4); 5, 6;
4. P38: 1, 3, 5, 7;
5. P42: 2, 3, 4 (1), 5 (1);
6. P44: 4, 6.

第二章 · 轨迹与方程

- 平面曲线的方程
- 曲面的方程
- 空间曲线的方程
- 课后习题

曲线方程的定义

通过建立标架,我们将空间中的点与其坐标一一对应起来. 因此研究空间中点构成的曲线或者曲面的几何性质,就可以转化为研究这些点所满足的代数方程的性质.

例子 5.1. 求圆心在原点,半径为 R 的圆的方程.

解. 因为圆上一点 $M(x, y)$ 所满足的几何性质为 $d(O, M) = R$, 即 $|\overrightarrow{OM}| = R$. 故

$$R = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \iff x^2 + y^2 = R^2.$$

□

从上面的例子可以看到,任何满足方程的点 (x, y) 都在圆上;任何圆上的点都满足方程. 一般地,我们有如下定义.

曲线方程的定义 (续)

定义 5.1. 当建立坐标系后, 如果一个方程与一条平面曲线或一个曲面有着如下关系:

- 满足该方程的 (x, y)(或者 (x, y, z)) 必是曲线 (或者曲面) 上某一点的坐标;
- 曲线 (或者曲面) 上任何一点的坐标都满足该方程;

则这个方程就叫做这条曲线 (或者这个曲面) 的方程, 这条曲线 (或者这个曲面) 就叫做这个方程的图形.

注记. 除非特别说明, 我们采用的坐标系都是直角坐标系.

一般地, 我们将 (x, y) 或者 (x, y, z) 满足的方程写成

$$F(x, y) = 0 \text{ 或者} y = f(x)$$

或者

$$F(x, y, z) = 0 \text{ 或者} z = f(x, y)$$

的形式, 它们称为平面曲线或者曲面的一般方程.

平面曲线方程的例子

例子 5.2. 求满足 $|\overrightarrow{MA}| - |\overrightarrow{MB}| = 4$ 的动点 $M(x, y)$ 的方程, 其中 $A(-2, -2), B(2, 2)$ 为定点.

解. 根据条件, 直接得到

$$\sqrt{(-2-x)^2+(-2-y)^2} - \sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2} = 4,$$

即

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2} = 4 + \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}.$$

由于两边都是非负数, 从而同时平方得到

$$(x+2)^2+(y+2)^2 = 16 + (x-2)^2+(y-2)^2 + 8\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2},$$

整理得到

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} = x+y-2. \tag{5.1}$$

平面曲线方程的例子 (续)

两边再次平方, 并化简得到

$$xy = 2. \tag{5.2}$$

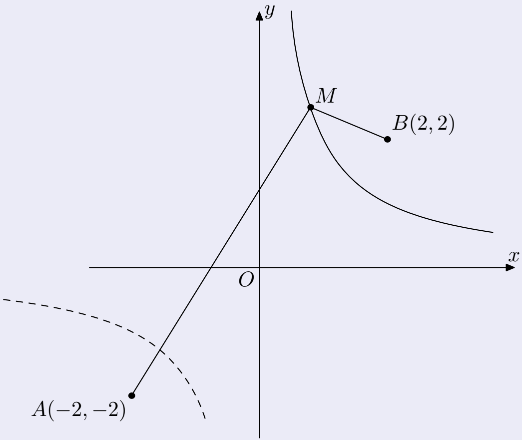
注意到, 从(5.1)变形到(5.2)的过程并不是等价变形. 为此, 我们要求 $x + y - 2 \geq 0$.
因此, 所求动点的方程为

$$xy = 2, \quad (x + y \geq 2).$$

□

平面曲线方程的例子 (续)

注记. 所求曲线方程的图形如图所示, 它是双曲线的一支. 从图形上看, 双曲线的下半支不满足条件, 这正是曲线方程中要求 $x + y \geq 2$ 的几何直观.



平面曲线的参数方程

除了前面涉及的平面曲线用显示方程 $y = f(x)$ 或者隐式方程 $F(x, y) = 0$ 来表示, 在实际应用中, 我们往往还可以通过参数方程

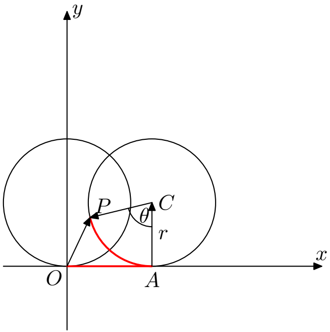
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad a \leq t \leq b.$$

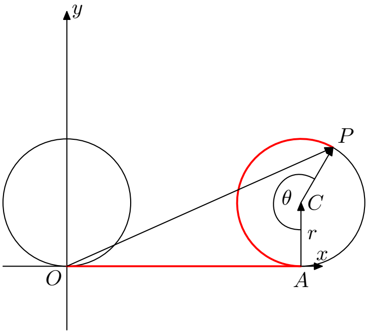
来表示平面曲线. 它的几何意义也是非常直观的, 即在 t 时刻, 动点的坐标为 $(x(t), y(t))$. 我们把上述参数方程称为平面曲线的坐标式参数方程.

平面曲线参数方程的一些例子

例子 5.3. 一个半径为 r 的圆在一直线上无滑动的滚动, 圆上一定点所成的轨迹称为摆线 (cycloid), 试求其参数方程.

解.





平面曲线参数方程的一些例子 (续)

如图, 我们注意到 $\overrightarrow{OA} = (r\theta, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, r)$. 注意到 $\overrightarrow{CP}$ 与 x 轴所成的有向角 (即将 x 轴逆时针旋转到 $\overrightarrow{CP}$ 所需的角度) 为 $2\pi - (2k\pi + \theta + \pi/2)$. 因此我们得到

$$\overrightarrow{CP} = r(\cos(-\theta - \pi/2), \sin(-\theta - \pi/2)) = r(-\sin\theta, -\cos\theta).$$

故

$$\begin{aligned}(x, y) = \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} \\ &= (r\theta, 0) + (0, r) + r(-\sin\theta, -\cos\theta) \\ &= (r\theta - r\sin\theta, r - r\cos\theta).\end{aligned}$$

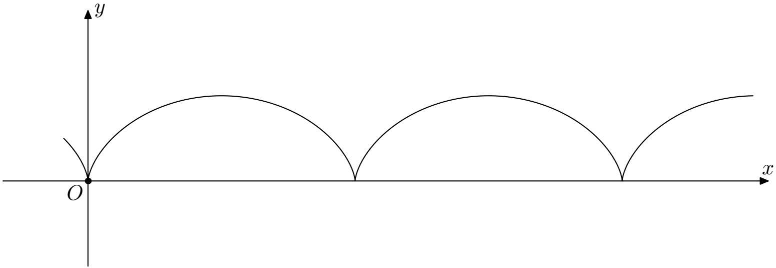
因此所求的参数方程为

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta), \\ y = r(1 - \cos\theta), \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

□

平面曲线参数方程的一些例子 (续)

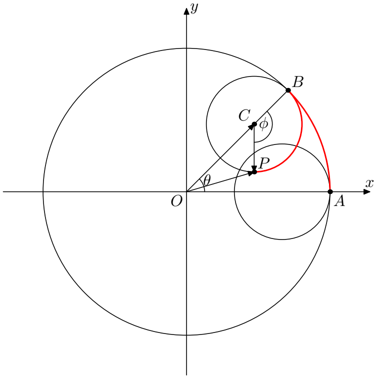
当圆在直线上每转动一周时, 点 P 在一周前后的运动情况总是相同的. 因此, 曲线是由一些列完全相同的拱形曲线组成, 如下图所示.

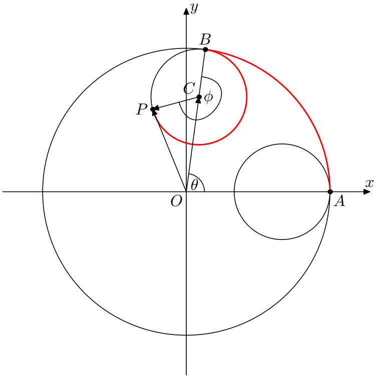


平面曲线参数方程的一些例子 (续)

例子 5.4. 假设有半径分别为 r, R 的两个圆, $r < R$. 当小圆绕着大圆内无滚动的滑动时, 求其上一个定点的方程 (称为内摆线).

解. 如图, 假设在开始运动时, 小圆与大圆相切于 A. 经过一段时间的运动, 切点变为 B 时, 定点 A 运动到 P.





平面曲线参数方程的一些例子 (续)

则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$. $\overrightarrow{OC}=(R-r)(\cos\theta,\sin\theta)$, $\overrightarrow{CP}=r(\cos(\theta-\phi),\sin(\theta-\phi))$, 从而

$$(x,y)=\overrightarrow{OP}=(R-r)(\cos\theta,\sin\theta)+r(\cos(\theta-\phi),\sin(\theta-\phi)).$$

现在, 注意到弧长相等, 我们知道 $r\phi=R\theta$, 从而 $\theta-\phi=\theta-R/r\theta=(r-R)\theta/r$. 故, 代入得到参数方程

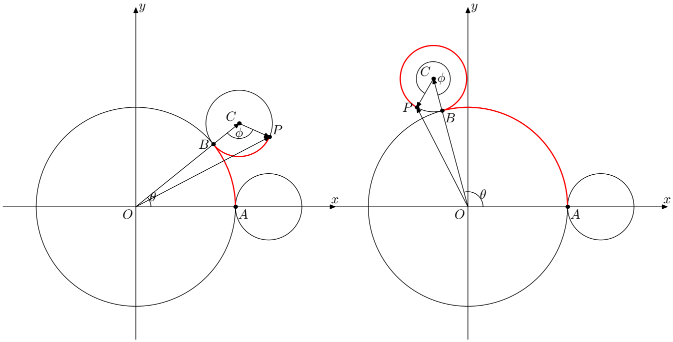
$$\begin{cases} x=(R-r)\cos\theta+r\cos\frac{R-r}{r}\theta, \\ y=(R-r)\sin\theta-r\sin\frac{R-r}{r}\theta, \end{cases}\qquad \theta\in\mathbb{R}.$$

$\square$

思考. 特别地, 当 $R=kr$ 时, k 为整数, 则内摆线的图像为具有 k 个尖点的星形曲线. 试着探索 k 为有理数、无理数的情形下, 函数图像的规律. 尖点个数、对称性等如何?

平面曲线参数方程的一些例子 (续)

完全类似地, 我们可以定义外摆线, 如图



平面曲线参数方程的一些例子 (续)

容易得到, x 轴旋转到 $\overrightarrow{CP}$ 的角度为 $2k\pi+\phi-(\pi-\theta)$, 而且 $\phi r=\theta R$ 从而

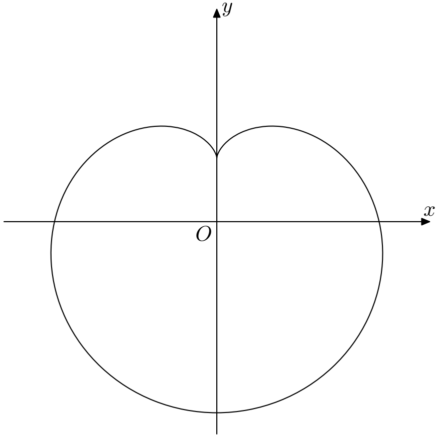
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}&=(R+r)(\cos\theta,\sin\theta)+r(\cos(\phi+\theta-\pi),\sin(\phi+\theta-\pi))\\&=(R+r)(\cos\theta,\sin\theta)+r(\cos((1+R/r)\theta-\pi),\sin((1+R/r)\theta-\pi))\\&=(R+r)(\cos\theta,\sin\theta)+r(-\cos(1+R/r)\theta,-\sin(1+R/r)\theta),\end{aligned}$$

故, 参数方程为

$$\begin{cases}x=(R+r)\cos\theta-r\cos\frac{R+r}{r}\theta,\\ y=(R+r)\sin\theta-r\sin\frac{R+r}{r}\theta,\end{cases}\qquad \theta\in\mathbb{R}.$$

平面曲线参数方程的一些例子 (续)

特别地, 当 $r = R$ 时, 得到所谓的心脏线 (Cardioid). 如图 (逆时针旋转 90 度后的图像):



平面曲线参数方程的一些例子 (续)

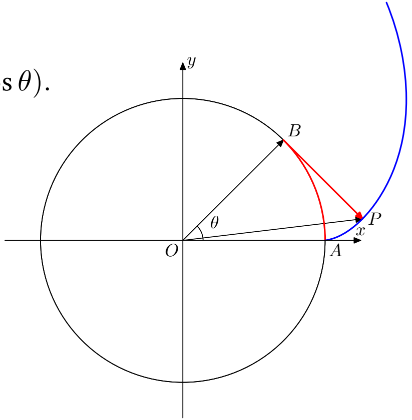
例子 5.5. 将线绕在一个固定半径为 r 的圆周上, 若将线解开, 使得解开后的线段始终是与圆周相切的, 则线的端点形成的轨迹曲线称为渐伸线. 试求其轨迹的参数方程.

解. 如图, 我们知道 $\overrightarrow{OB} = r(\cos\theta, \sin\theta)$, $\overrightarrow{BP} = r\theta\,(\cos(\theta-\pi/2), \sin(\theta-\pi/2))$, 从而 □

$$(x, y) = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = r(\cos\theta, \sin\theta) + r\theta(-\sin\theta, \cos\theta).$$

从而所求的参数方程为

$$\begin{cases} x = r(\cos\theta - \theta\sin\theta), \\ y = r(\sin\theta + \theta\cos\theta), \end{cases} \qquad \theta \geq 0.$$



平面曲线参数方程的一些例子 (续)

注记.

- 曲线的参数方程一般而言不是唯一的, 同一条曲线可能有不同的参数化方式;
- 可以通过消去参数, 将曲线的参数方程变为普通的显示方程或者隐式方程. 但是并不是所有的参数方程都可以通过消去参数变为用 x, y 的初等函数来表示.

曲面的方程的定义

完全类似曲线的情形, 只是我们现在不再限制点在平面上. 例如, 前面关于平面上到定点距离为正常数 r 的点的方程为 $x^2+y^2=r^2$. 现在, 若不限制点在平面上, 则当假设定点为原点 O 时, 动点 $P(x,y,z)$ 满足的方程为

$$d(P,O)=r \iff r=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2},$$

即

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

例子 6.1. 求连接两点 $A(1,2,3)$ 与点 $B(2,-1,4)$ 所成线段的垂直平分面的方程.

解. 根据垂直平分面的定义, 其上的点到 A,B 的距离相等. 故

$$d(P,A)=d(P,B) \iff \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}.$$

化简得到

$$-2x+6y-2z+7=0.$$

□

曲面的参数方程的定义

回忆, 曲线的参数方程可以看作时刻 t 时, 点在平面上的位置的坐标 $x = x(t), y = y(t)$. 形象地, 我们可以认为曲线是通过直线或者直线段, 通过变形得到的.
现在, 设想平面或者平面上一块区域通过形变得到一张曲面, 由于刻画平面上的点需要两个坐标 (u, v), 因此为了刻画曲面, 我们一般而言可将曲面上的坐标 $P(x, y, z)$ 表示为

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

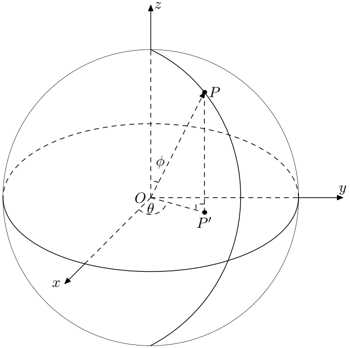
其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是平面上一个区域. 将上述方程称为曲面的参数方程.

曲面的参数方程的定义 (续)

例子 6.2 (球面). 求半径为 r 的球面的参数方程.

解. 如图, 我们假设 z 轴沿着大圆弧旋转到 $\overrightarrow{OP}$ 所成的有向角为 ϕ, P 点向 xy-平面投影得到 P', x 轴旋转到 $\overrightarrow{OP'}$ 所成到角度为 θ. 则

$$z = r\cos\phi, \quad |\overrightarrow{OP'}| = r\sin\phi$$
$$x = r\sin\phi\cos\theta, \quad y = r\sin\phi\sin\theta.$$



故, 参数方程为

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta, \\ y = r\sin\phi\sin\theta, \\ z = r\cos\phi, \end{cases} \qquad \phi\in[0,\pi], \quad \theta\in[0,2\pi).$$

□

曲面的参数方程的定义 (续)

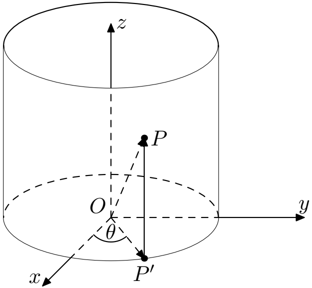
例子 6.3 (柱面). 求半径为 r 的柱面的参数方程.

证明. 建立如图所示的直角标架. 假设 P 为圆柱上一点, 它向 xy 平面投影得到 P', x 正半轴逆时针旋转到 $\overrightarrow{OP'}$ 所成到角度为 θ, 则
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P}$, 从而

$$(x, y, z) = r(\cos\theta, \sin\theta, 0) + (0, 0, u),$$

其中 u 为线段 $P'P$ 的有向长度, 即当 $\overrightarrow{P'P}$ 与 z 轴正向同向时取正数, 否则取负数. 因此, 所求的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = u, \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi).$$



□

球坐标与柱坐标

如果将球面或柱面的参数方程中，让半径 r 变动起来，那么球面或柱面上的点可以刻画空间中任意一点. 因此，它们也建立了空间中点的坐标. 我们将相应的坐标系称为球坐标系或者柱坐标系. 球坐标 (r,ϕ,θ) 或柱坐标 (r,u,θ) 与直角坐标 (x,y,z) 的转化关系如下:

$$\text{球坐标:}\quad \begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta, \\ y = r\sin\phi\sin\theta, \\ z = r\cos\phi, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \phi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \phi\in[0,\pi], \\ \theta\in[0,2\pi). \end{array}$$

$$\text{柱坐标:}\quad \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = u, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ u = z, \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{cases} \qquad u\in\mathbb{R}, \quad \theta\in[0,2\pi).$$

从几何意义容易知道，球坐标与柱坐标中某个参数为常数所表示的曲面: 例如，球坐标中 ϕ 为常数表示的是一个圆锥，θ 为常数表示的是一个半平面，r 为常数表示的是一个球面; 柱坐标中，r 为常数表示的是一个柱面，u 为常数表示的是一个平面，θ 为常数表示的是一个半平面.

一些例子

下面, 我们来研究物理中单摆在柱坐标系下的方程. 假设线的长度为 l, 初始时刻的角度为 $-\theta_0$, 则利用能量守恒我们得到单摆的位置 $\theta=\theta(t)$ 与角速度 $\omega=\dot{\theta}$ 的关系:

$$mgl(\cos\theta-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2.$$

故

$$\dot{\theta}^2=\frac{2g}{l}\left(\cos\theta-\cos\theta_0\right), \quad |\theta|\le\theta_0.$$

为了数学上的方便, 我们不妨取 l, 使得上述方程变成

$$\dot{\theta}^2=\cos\theta-\cos\theta_0, \quad |\theta|\le\theta_0.$$

注意, 角速度是有正负的. 根据物理意义, 我们规定上述方程刻画的是周期为 $4\theta_0$ 的运动:

$$\dot{\theta}=\begin{cases}\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}, & -\theta_0\le\theta\le\theta_0,\\ -\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}, & -\theta_0\le\theta\le\theta_0,\end{cases}$$

一些例子 (续)

如果, 我们建立如下的柱坐标: 假设单摆与竖直方向所成角度 θ(逆时针为正) 对应着柱坐标 (r,θ,u) 中的参数 θ, 角速度 $\dot{\theta}$ 对应着柱坐标中的参数 u. 由于位置、角速度所构成的空间中的图像是一张曲面, 故我们不妨假设 $r=1$, 即该曲面在柱面上表示出来. 那么, 我们得到位置、角速度的图像 (也称为相图):

$$\begin{cases} r=1, \\ \theta=\theta, \\ u=\dot{\theta}=\begin{cases} \sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}, & -\theta_0\le\theta\le\theta_0, \\ -\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}, & -\theta_0\le\theta\le\theta_0, \end{cases} \end{cases}$$

空间曲线的定义

考虑空间中到定点的距离为定长的点所满足的方程: 假设我们现在依然限制点在坐标平面 $O-xy$ 上运动, 则此时它的运动方程作为空间曲线可以看作是柱面 $x^2+y^2=r^2$ 与 $O-xy$ 坐标平面 $z=0$ 的交, 即所求的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2, \\ z=0. \end{cases}$$

一般地, 我们有如下定义:

定义 7.1. 假设 $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$ 是两个曲面的方程, l 是一条空间曲线. 如果空间中的点 $P(x,y,z)$ 在 l 上当且仅当 (x,y,z) 同时满足方程

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

则称该方程组为空间曲线 l 的一般方程.

空间曲线的定义 (续)

完全类似平面曲线或者曲面的情形, 我们也可以将空间曲线视为时刻 t 时, 点在空间的位置 $P(x, y, z)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, 这样我们得到空间曲线的参数方程,

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad a \leq t \leq b.$$

空间曲线的参数方程的一些例子

例子 7.1 (圆柱螺旋线). 假设空间中一质点绕一条轴做圆周运动的同时还沿着平行与该轴的方向做匀速直线运动, 试求其轨迹方程.

解. 不妨取该轴为 z 轴, 并假设圆周运动的半径为 r, 角速度为 ω, 沿着 z 轴正方向运动的速度为常数 v, 初始时质点位于 $(r,0,0)$ 处, 则 t 时刻转过的角度为 $\theta(t)=\omega t$, 从而

$$\begin{cases} x(t)=r\cos\theta(t)=r\cos\omega t, \\ y(t)=r\sin\theta(t)=r\sin\omega t, \\ z(t)=vt. \end{cases}$$

从而我们得到该质点的运动轨迹为 $\begin{cases} x=r\cos\omega t, \\ y=r\sin\omega t, \\ z=vt, \end{cases}\qquad t\in[0+\infty)$, 其中 r,v,ω 为正常数. □

课后习题

1. P54: 2, 4;
2. P55: 9, 10;
3. P61: 2(2), (4); 3 (3), (4);
4. P62: 8;
5. P65: 7,8;

第三章 · 平面与空间直线

- 平面方程
- 平面与点的位置关系
- 两平面的位置关系
- 空间直线的方程
- 直线与平面的位置关系
- 空间点与直线的位置关系
- 空间两直线的位置关系
- 平面束
- 课后习题

平面的点位式方程

空间中决定一个平面的一种方式如下: 给定空间中给一个点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 以及两个不共线的向量 (即线性无关)$\vec{a}, \vec{b}$, 则过 M_0 且与 $\vec{a}, \vec{b}$ 都平行的平面 π 是唯一确定的. 我们称 $\vec{a}, \vec{b}$ 是平面 π 的一个方位向量. 明显地, 一个平面的方位向量不是唯一的.

明显, 该平面 π 上任何一个点 $M(x, y, z)$ 都满足如下性质: $\vec{r} = \overrightarrow{M_0M}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面, 即它们是线性相关的, 故

$$0 = (\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \tag{9.1}$$

其中 $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$.

定义 9.1. 上述方程(9.1)称为平面 π 的点位式方程.

注记. 在本节中, 我们除非特别说明, 取得标架都是仿射标架, 即不一定非得取直角标架.

平面的点位式方程 (续)

事实上, 我们根据线性相关性, 容易得到平面 π 的参数方程

$$\vec{r} = u\vec{a} + v\vec{b}, \quad u, v \in \mathbb{R},$$

即

$$\begin{cases} x = x_0 + uX_1 + vX_2, \\ y = y_0 + uY_1 + vY_2, \\ z = z_0 + uZ_1 + vZ_2, \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

平面的点位式方程 (续)

作为推论, 我们知道空间中三个不共线的点 M_1, M_2, M_3 可以决定一个平面. 这是因为我们可令 $M_0 = M_1, \vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$, 而且由于这三点不共线, 我们知道 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 故得到

$$0 = \left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}. \tag{9.2}$$

这里 M_i 的坐标为 (x_i, y_i, z_i). 利用行列式的基本性质, 上述方程可以转化为

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{9.3}$$

定义 9.2. 上述两个方程(9.2)、(9.3)都称为平面的三点式方程.

平面的点位式方程 (续)

特别地, 当 $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$ 为平面与三个坐标轴的交点时, 则三点式方程变为:

$$0=\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} \Longrightarrow (x-a)bc-y(-ac)+z(ab)=0,$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{9.4}$$

定义 9.3. 上述方程(9.4)称为平面的截距式方程, 其中 a,b,c 分别称为平面在三坐标轴上的截距. 注意截距不一定非负.

平面的一般方程

注意, 将平面的点位式方程(9.1)按照第一行展开, 我们得到

$$0=(x-x_0)\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}-(y-y_0)\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}+(z-z_0)\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}.$$

即

$$0=x\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}+y\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & z_0\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

故任一平面一定可以写成如下形式的方程

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中

$$A=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix},\quad D=-\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & z_0\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

平面的一般方程 (续)

由于方位向量 $\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$ 与 $\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$ 不共线, 从而其外积非零, 即

$$0\neq\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\vec{k}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}.$$

故上述平面方程中一次项的系数 A,B,C 不能全为零. 反过来, 可以证明一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$, 其中一次项系数 A,B,C 不全为零, 则它表示空间中一个平面. 这样, 我们得到

定义 9.4. 空间中任一平面在仿射坐标系下的方程可以表示成

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{9.5}$$

其中 A,B,C 不全为零. 反过来, 满足上述条件的一次方程表示一个平面. 方程(9.5)连同条件 A,B,C 不全为零称为平面的一般方程.

平面的一般方程 (续)

容易知道, 当 A, B, C, D 中有部分为零时, 我们得到如下特殊平面的方程:

- 若 $D = 0$, 则平面过原点; 反之, 过原点的平面的一般方程必有 $D = 0$;
- 若 A, B, C 中有且只有一个为零, 例如 $A = 0$, 则表示方程与 x 无关, 从而当 $D \neq 0$ 时, 平面平行于 x 轴; 当 $D = 0$ 时, 平面过 x 轴; 反之也对;
- 若 A, B, C 中有且只有两个为零, 例如 $A = 0$, $B = 0$, 则表示方程与 x, y 都无关, 从而当 $D \neq 0$ 时, 平面平行与 $O - xy$ 坐标平面; 当 $D = 0$ 时, 平面就是 $O - xy$ 坐标平面.

平面的点法式方程

现在, 假设仿射标架为直角标架. 则平面的一般方程仍然可以表示为

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

的形式, 其中 A, B, C 不全为零. 若该平面过 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 则

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

两式相减得到

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{9.6}$$

若令 $\vec{n} = (A, B, C)$, 则上式表明平面中任一向量 $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ 必然垂直于 $\vec{n}$. 即 $\vec{n}$ 是平面的一个法向量. 注意到 A, B, C 不全为零, 故 $\vec{n}$ 不是零向量.

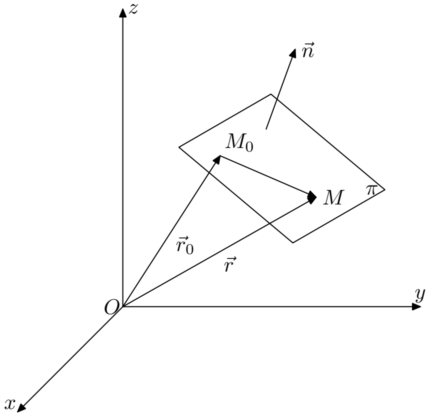
注记. 注意上述解释只在直角标架下才成立, 因为只有在直角标架下两向量对应坐标的乘积才定义为这两个向量的内积.

平面的点法式方程 (续)

直观地来看, 上述方程(9.6)的几何意义如下: 取位置向量 $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = \{x_0, y_0, z_0\}$, 则(9.6)等价于

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \tag{9.7}$$

定义 9.5. 上述方程(9.6)以及(9.7)都称为平面的点法式方程.



平面的点法式方程 (续)

容易知道, (9.6)中的系数 $D=-\vec{n}\cdot\vec{r}_0$. 为了进一步探寻 D 的几何意义, 我们将 $\vec{n}$ 单位化为 $\lambda\vec{n}=\vec{n}^0$, 其中 $\vec{n}^0$ 为单位向量,

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

其中符号的规定如下:

- 首先假设平面 π 不通过原点. 若取 M_0 为过原点的且垂直于平面 π 的直线于平面的交点 (即垂足), 此时向量 $\vec{r}_0$ 就是平面的一个法向量, 我们始终取 $\vec{n}^0$ 使得它与 $\vec{r}_0$ 同向 (见上图), 则此时
$$\lambda D=-\lambda\vec{n}\cdot\vec{r}_0=-\vec{n}^0\cdot\vec{r}_0=-p.$$
注意到, 根据上述符号的取法, 我们知道 $p=\vec{n}^0\cdot\vec{r}_0$ 为原点到平面 π 的距离. 故 $\lambda D=-p\leq 0$.
- 若 π 通过原点, 则 $D=0$, λ 的符号可以任意取.

平面的点法式方程 (续)

定义 9.6. 给定平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$, 其中 A,B,C 不全为零. 若令 $\lambda=\pm\frac{1}{A^2+B^2+C^2}$, 其中符号取法如下: 取 λ 使得 $\lambda D\le 0$. 则我们将平面的一般方程改为

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0 \iff \vec{n}^0\cdot\vec{r}-p=0 \tag{9.8}$$

其中 $\vec{r}_0$ 为原点在平面 π 上的垂足的位置向量, $\vec{n}^0=\lambda\vec{n}$ 为单位法向量. (9.8)称为向量式法式方程, $p=-\lambda D$ 为原点到平面的距离.
若我们还假设 $\vec{n}^0$ 与三个坐标轴正向的夹角为 α,β,γ, 则 $\vec{n}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, 从而由(9.8)得到平面的 (坐标式) 法式方程:

$$\cos\alpha x+\cos\beta y+\cos\gamma z-p=0. \tag{9.9}$$

平面的点法式方程 (续)

注记. 我们可以将平面的一般方程法式化为平面的法式方程: 因为方程(9.8)等价于

$$\lambda \vec{n}^0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0,$$

也即

$$\pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (Ax + By + Cz + D) = 0, \tag{9.10}$$

其中符号的取法为 $\lambda D \leq 0$. 这样的 λ 称为平面的法式化因子.

平面的点法式方程 (续)

例子 9.1. 假设坐标原点到平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的距离为 p, 求证 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$.

证明. 将该平面的截距式方程改写为一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$, 其中

$$A=\frac{1}{a},\quad B=\frac{1}{b},\quad C=\frac{1}{c},\quad D=-1.$$

根据平面一般方程下原点到平面的距离为 $-\lambda D=p\geq 0$, 其中 $\lambda>0$, 故

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

代入, 得到

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{\lambda^2D^2}=A^2+B^2+C^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

□

平面与点的位置关系

点与平面的位置关系只有两种: 要么点在平面上、要么点不在平面上. 这两种位置关系都可以通过点到平面的距离来刻画. 即距离分别对应着距离等于零和距离大于零.

为了更进一步地刻画点与平面的位置关系, 我们根据平面单位法向量 $\vec{n}^0=\lambda\vec{n}$, 引入有向距离的概念. 首先注意到, 若 M_0 为空间中一定点, M 为给定平面上一动点, M_1 为给定平面上一定点, 则

$$0=\vec{n}^0\cdot\overrightarrow{MM_1}=\vec{n}^0\cdot\left(\overrightarrow{MM_0}-\overrightarrow{M_1M_0}\right),$$

这表明数量 $\pi_{\vec{n}^0}\overrightarrow{MM_0}=\vec{n}^0\cdot\overrightarrow{MM_0}$ 与点 M 的选择无关, 从而我们可以引入如下定义:

定义 10.1. 假设 M_0 为空间中的点, 我们定义点 M_0 到平面的有向距离

$$\delta:=\pi_{\vec{n}^0}\overrightarrow{MM_0},$$

其中 M 为该平面上任一点. 我们称 δ 为点 M_0 到平面的离差.

明显地, 点 M_0 到平面的距离 d 就等于 $|\delta|$, 因此离差其实就是点到平面的有向距离.

平面与点的位置关系 (续)

若给定平面的一般方程 $Ax + By + Cz + D = 0$, 其中 A, B, C 不全为零, 则

$$\vec{n}^0 = \lambda\vec{n}, \quad \vec{n} = (A, B, C), \quad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

符号的取法使得 $-p = \lambda D \leq 0$. 从而在直角坐标系下, 一定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面的离差为

$$\begin{aligned}\delta &= \pi_{\vec{n}^0}\overrightarrow{MM_0} = \vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{MM_0} = \lambda\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0} = \lambda(A, B, C) \cdot (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \\ &= \lambda(A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z)) = \lambda(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D),\end{aligned}$$

即点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面的离差为

$$\delta = \lambda(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D).$$

特别地, 它到平面的距离为

$$d = |\delta| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

两平面的位置关系

从几何上看, 两平面的位置关系只有三种: 相交 (于一条直线)、平行、重合.
下面, 我们利用平面的一般方程来从代数角度刻画这三种关系.
假设两平面的一般方程分别为

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

则它们的一个法向量分别为

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

两平面的位置关系 (续)

- 若 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 线性相关, 由于它们都是非零向量, 从而存在常数 $k \neq 0$, 使得

$$\vec{n}_2 = k\vec{n}_1 \iff \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = k.$$

此时, 平面方程 π_2 可以化简为:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_2/k = 0.$$

因此,

  - 当 $D_1 = D_2/k$ 时, 两平面重合;
  - 当 $D_1 \neq D_2/k$ 时, 两平面平行.

- 若 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 线性无关, 即 $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \neq 0$, 或者更加简洁地,

$$A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2,$$

则此时两平面相交.

两平面的位置关系 (续)

总结起来, 我们得到

定理 11.1. 假设空间中两平面的方程分别为

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

则它们平行而不重合的充要条件是 (注意这里的比值应该理解为: 若分母为零, 则分子为零)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

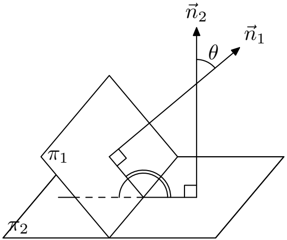
重合的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

相交的充要条件是

$$A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2.$$

两平面的位置关系 (续)



若两平面相交, 则我们可以求出其二面角. 如图所示, 两平面的二面角 $\angle(\pi_1, \pi_2)$ 与它们法向量的夹角 θ 之间存在关系 $\angle(\pi_1, \pi_2) = \theta$ 或者 $\pi - \theta$. 从而我们得到

$$\cos\angle(\pi_1, \pi_2) = \pm\cos\theta = \pm\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

具体的符号需要根据所求的二面角为钝角还是锐角来取.

空间直线的参数方程

我们知道, 给定空间中一个定点 M_0 以及一个非零向量 $\vec{v}_0$, 那么通过 M_0 且与 $\vec{v}_0$ 平行的直线是唯一确定的. 向量 $\vec{v}_0$ 叫做直线的方向向量. 因此我们有如下定义:

定义 12.1. 在仿射标架下, 假设直线上一动点 M, 其位置向量 $\vec{r} := \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_0 := \overrightarrow{OM_0}$, 则

$$t\vec{v}_0 = \overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0,$$

称为直线的向量式参数方程. 若假设仿射坐标为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$、$M(x, y, z)$, $\vec{v}_0\,\{X, Y, Z\}$, 则我们得到直线的参数方程: $\begin{cases} x = x_0 + tX, \\ y = y_0 + tY, \\ z = z_0 + tZ, \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$, 称为直线的坐标式参数方程. 消去上述参数方程中的 t, 我们得到直线的标准方程.

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}.$$

空间直线的参数方程 (续)

给定直线上两点 M_1, M_2, 则直线的方向向量可取为 $\vec{v}_0 = \overrightarrow{M_1M_2}$. 若假设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 则由直线的标准方程得到

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

称为直线的两点式方程.

空间直线的参数方程 (续)

特别地, 在直角标架下, 我们往往将直线的方向向量取为单位向量

$$\vec{v}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

其中 α, β, γ 就是直线方向向量的方向角, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为直线方向向量的方向余弦. 它们也分别称为直线的方向角与方向余弦.
明显地, 直线的方向角与方向余弦取法只有两种: α, β, γ 与 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$; 以及 $\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma, -\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma$.
由于任何与方向向量平行的非零向量 $\{l, m, n\}$ 都是直线的方向向量, 这组数 $\{l, m, n\}$ 称为直线的方向数. 明显地, 方向数与方向余弦之间的关系为:

$$\cos\alpha = \frac{l}{l^2+m^2+n^2}, \quad \cos\beta = \frac{m}{l^2+m^2+n^2}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{l^2+m^2+n^2},$$

或者

$$\cos\alpha = -\frac{l}{l^2+m^2+n^2}, \quad \cos\beta = -\frac{m}{l^2+m^2+n^2}, \quad \cos\gamma = -\frac{n}{l^2+m^2+n^2}.$$

空间直线的一般方程

我们知道, 两平面若相交但不重合, 则交线是一直线. 这样, 我们可以得到直线的一般方程. 假设两平面的一般方程分别为

$$\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{12.1}$$

其中 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 都是非零向量, 分别是它们的法向量. 根据前面关于平面位置关系的讨论, 直线相交但不重合的充要条件是

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \neq 0. \tag{12.2}$$

定义 12.2. 我们将满足条件(12.2)的两平面方程(12.1)称为直线的一般方程.

空间直线的一般方程与标准方程的互化

直线的一般方程和标准方程可以互化, 我们通过例子来说明.

例子 12.1. 将直线 l 的如下一般方程化为标准方程:

$$\begin{cases} 2x+y+z-5=0, \\ 2x+y-3z-1=0. \end{cases}$$

解. 注意到, 直线的标准方程需要一定点 $M_0(0,4,1)$ 以及一个方向向量 $\vec{v}_0$, 它可以由标准方程中的两个法向量外积得到.

$$\vec{v}_0=\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=(2,1,1)\wedge(2,1,-3)=(-4,8,0)=-4(1,-2,0),$$

因此直线的标准方程可写为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-1}{0}.$$

□

空间直线的一般方程与标准方程的互化 (续)

例子 12.2. 将直线 l 如下的标准方程化为一般方程:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

解. 由于直线的方向向量为 $\vec{v}_0 = (2,1,0)$, 它的第一个分量非零, 故我们可将直线的标准方程改写为如下的等价形式:

$$\begin{cases} \frac{y}{1} = \frac{x-1}{2}, \\ \frac{z-1}{0} = \frac{x-1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{2}(x-1), \\ z = 1. \end{cases}$$

这就是直线的一个标准方程. □

注记. 注意, 直线的标准方程不是唯一的;
上述解得的标准方程有时也称之为直线的射影式方程. 它是由过直线且平行于 z 轴的平面和过直线且平行于 y 轴的两平面相交而得. 这两个平面的方程就是它们分别在 $O-xy$ 坐标面、$O-xz$ 坐标面上的射影直线之方程.

直线与平面的位置关系

为了方便, 我们在直角标架下来考虑.

- 决定一条空间直线需要一个定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 以及一个 (非零的) 方向向量 $\vec{v}_0 = (X, Y, Z)$. 决定空间中一张平面需要一个定点 $M_0'(x_0', y_0', z_0')$, 以及一个 (非零的) 法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$.

直线与平面的位置关系

为了方便, 我们在直角标架下来考虑.

- 决定一条空间直线需要一个定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 以及一个 (非零的) 方向向量 $\vec{v}_0 = (X, Y, Z)$. 决定空间中一张平面需要一个定点 $M_0'(x_0', y_0', z_0')$, 以及一个 (非零的) 法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$.
- 空间中的一直线与一个平面的位置关系有三种情形: 相交、平行、直线在平面上.

直线与平面的位置关系

为了方便, 我们在直角标架下来考虑.

- 决定一条空间直线需要一个定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 以及一个 (非零的) 方向向量 $\vec{v}_0 = (X, Y, Z)$. 决定空间中一张平面需要一个定点 $M_0'(x_0', y_0', z_0')$, 以及一个 (非零的) 法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$.
- 空间中的一直线与一个平面的位置关系有三种情形: 相交、平行、直线在平面上.
- 明显地, 相交当且仅当 $\vec{v}_0 \cdot \vec{n} \neq 0$, 即 $AX + BY + CZ \neq 0$;

直线与平面的位置关系

为了方便, 我们在直角标架下来考虑.

- 决定一条空间直线需要一个定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 以及一个 (非零的) 方向向量 $\vec{v}_0 = (X, Y, Z)$. 决定空间中一张平面需要一个定点 $M_0'(x_0', y_0', z_0')$, 以及一个 (非零的) 法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$.
- 空间中的一直线与一个平面的位置关系有三种情形: 相交、平行、直线在平面上.
- 明显地, 相交当且仅当 $\vec{v}_0 \cdot \vec{n} \neq 0$, 即 $AX + BY + CZ \neq 0$;
- 若直线在平面上, 则必有 $\vec{v}_0 \cdot \vec{n} = 0$, 即 $AX + BY + CZ = 0$, 而且 M_0 还在平面上;

直线与平面的位置关系

为了方便, 我们在直角标架下来考虑.

- 决定一条空间直线需要一个定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 以及一个 (非零的) 方向向量 $\vec{v}_0 = (X, Y, Z)$. 决定空间中一张平面需要一个定点 $M_0'(x_0', y_0', z_0')$, 以及一个 (非零的) 法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$.
- 空间中的一直线与一个平面的位置关系有三种情形: 相交、平行、直线在平面上.
- 明显地, 相交当且仅当 $\vec{v}_0 \cdot \vec{n} \neq 0$, 即 $AX + BY + CZ \neq 0$;
- 若直线在平面上, 则必有 $\vec{v}_0 \cdot \vec{n} = 0$, 即 $AX + BY + CZ = 0$, 而且 M_0 还在平面上;
- 若直线与平面平行, 则必有 $\vec{v}_0 \cdot \vec{n} = 0$, 即 $AX + BY + CZ = 0$, 而且 M_0 必不在平面上.

直线与平面的位置关系(续)

综上, 我们得到如下的判断法则:

定理 13.1. 假设有空间中直线 $l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$ 以及平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$. 则

- 直线与平面相交当且仅当 $AX + BY + CZ \neq 0$;
- 直线与平面平行当且仅当 $AX + BY + CZ = 0$ 而且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$;
- 直线在平面上当且仅当 $AX + BY + CZ = 0$ 而且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

证明. 在上述讨论中, 我们对直角标架下证明了定理成立. 事实上, 上述结论只涉及到点与直线或者平面的结合关系 (点在直线或平面上), 它是一种仿射性质, 从而与仿射标架的选择无关. 故对一般的仿射标架, 上述定理也成立. □

注记. 教材上利用直线的参数方程, 从代数角度 (直线方程与平面方程联立之解的个数) 给出了另一个证明, 请自行学习.

思考. 证明: 直线与平面相交的充要条件是直线的方向向量 $\vec{v}$ 与平面的方位向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共面.

直线与平面相交时的交角

为了求交角, 我们假设直线 l 和平面 π 在直角坐标系下的方程分别为

$$l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}, \quad \pi: Ax+By+Cz+D=0.$$

则直线与平面的交角 φ 定义为: 当直线与平面不垂直时, 定义为该直线与其在平面上的射影直线所成的锐角; 垂直时定义为 $\pi/2$. 从定义我们知道, $\varphi = |\pi/2 - \angle(\vec{v}_0, \vec{n})|$, 其中 $\vec{v}_0, \vec{n}$ 分别时直线的方向向量以及平面的法向量. 因此,

$$\sin\varphi = \sin|\pi/2 - \angle(\vec{v}_0, \vec{n})| = |\cos\angle(\vec{v}_0, \vec{n})| = \frac{|\vec{v}_0 \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}_0||\vec{n}|} = \frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

直线与平面相交时的交角 (续)

例子 13.1. 假设仿射标架 $\{O';\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 中, O 在直角坐标系 $\left\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ 下的坐标分别为 $O'(1,2,3)$, $\vec{e}_1=(0,1,1)$, $\vec{e}_2=(1,0,1)$, $\vec{e}_3=(1,1,0)$. 若直线 l 在仿射标架下的方程为

$$l':\frac{x'-3}{5}=\frac{y'-4}{3}=\frac{z'-5}{4},$$

平面 π 在仿射标架下的方程为

$$\pi':3x'+4y'+5z'-2=0.$$

1. 求直线 l 与 π 在直角标架下的方程;
2. 判断直线 l 与 π 的位置关系, 并在相交时求直线 l 与 π 的交角.

直线与平面相交时的交角 (续)

解. 注意到, 点 P 在直角标架下的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. 类似地,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'P} &= x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3 = x'(\vec{j} + \vec{k}) + y'(\vec{i} + \vec{k}) + z'(\vec{i} + \vec{j}) \\ &= \left(y' + z'\right)\vec{i} + (x' + z')\vec{j} + (x' + y')\vec{k}, \\ \overrightarrow{OO'} &= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \Longrightarrow \begin{cases} x = y' + z' + 1 \\ y = x' + z' + 2 \\ z = x' + y' + 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x' = -x + y + z - 4 \\ 2y' = x - y + z - 2 \\ 2z' = x + y - z \end{cases}$$

将上述方程代入到 l' 得到

$$\frac{-x + y + z - 10}{5} = \frac{x - y + z - 10}{6} = \frac{x + y - z - 10}{8} = t \Longrightarrow \begin{cases} x = 10 + 7t, \\ y = 10 + 9t, \\ z = 10 + 8t, \end{cases}$$

直线与平面相交时的交角 (续)

故直线的标准方程为

$$\frac{x-10}{7}=\frac{y-10}{9}=\frac{z-10}{8}.$$

完全类似地, 将上述方程代入平面的方程, 我们得到

$$3\left(y+z-5\right)+4\left(x+z-4\right)+5\left(x+y-3\right)-2=0,$$

即

$$9x+8y+7z-48=0$$

为了求直线与平面的交角 φ, 我们利用直线的方向向量 $\vec{v}_0=(1,3,2)$ 以及平面的法向量 $\vec{n}=(9,8,7)$ 计算如下:

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{v}_0\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}_0||\vec{n}|}=\frac{191}{\sqrt{194}\sqrt{194}},$$

故交角为 $\varphi=\arcsin\frac{191}{194}\in[-\pi/2,\pi/2]$. □

直线与平面相交时的交角 (续)

注记.

- 注意到, 直线 l 的方向向量可以直接利用 $5\vec{e}_1+3\vec{e}_2+4\vec{e}_3=7\vec{i}+9\vec{j}+8\vec{k}$ 求得, 完全类似地平面的法向量也可这样求出来. 故我们最终求交角的公式

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{v}_0\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}_0||\vec{n}|},$$

  对仿射标架仍然是成立的, 只是在计算内积的时候, 需要考虑标架基向量的内积, 不再像直角标架那样是对应分量的乘积求和.

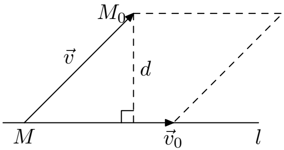
- 利用这种几何的思想, 其实也可以求出直线上定点 M_0 在仿射标架下的坐标为 $(3,4,5)$, 它在直角标架下的坐标为 $(9,8,7)+\overrightarrow{OO'}=(10,10,10)$, 它恰好是直线 l 的定点在直角标架下的坐标. 由此, 结合直线方向向量在直角标架下的坐标, 容易得出直线在直角标架下的方程.
- 完全类似地, 平面上一定点 M_0' 在仿射标架下的坐标为 $(-1,0,1)$, 它在直角标架下的坐标为 $(1,0,-1)+(1,2,3)=(2,2,2)$. 由此, 结合法向量在直角标架下的坐标, 容易得出平面在直角标架下的方程.

空间点到直线的距离

空间中点与直线的位置关系相对简单, 只有点在直线上和点不在直线上两种情况. 它们可以通过将点的坐标代入直线方程看是否成立来判定.

若空间中点 M_0 不在直线 l 上, 则我们可以求点 M_0 到直线的距离. 事实上, 考察直线上一动点 M, 由于向量 $\vec{v}=\overrightarrow{MM_0}$ 与直线的方向向量 $\vec{v}_0$ 不共线, 从而它们张成一个平行四边形, 该平行四边形在底边 $\vec{v}_0$ 上的高, 就是点到直线的距离, 即

$$d=\frac{|\vec{v}\wedge\vec{v}_0|}{|\vec{v}_0|}.$$



空间点到直线的距离 (续)

特别地, 在直角坐标系之下, 若点 M_0, M 的坐标分别为 $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)$, 直线 l 的方程为

$$\frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y} = \frac{z - z_1}{Z},$$

则点 M_0 到直线 l 的距离为

$$d = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{v}_0|}{|\vec{v}_0|} = \frac{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ X & Y & Z \end{matrix} \right\|}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

空间两直线的位置关系

为了决定空间中一条直线, 只需直线上一点, 以及该直线的方向向量. 因此, 为了讨论两直线的位置关系, 我们假设直线 l_1 上有定点 M_1, 方向向量 $\vec{v}_1$; 直线 l_2 上有定点 M_2, 方向向量 $\vec{v}_2$. 为了方便, 令 $\vec{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$.
明显地, 两直线的位置关系分为以下几种:

- 异面: 当且仅当 $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ 不共面, 即 $(\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq 0$;
- 共面: 当且仅当 $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ 共面, 即 $(\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$; 共面时, 又可细分为:
  - 相交: 当且仅当 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 不平行, 即不存在实数 λ 使得 $\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_1$;
  - 平行: 当且仅当 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 平行, 且点 M_1 不在 l_2 上;
  - 重合: 当且仅当 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 平行, 且点 M_1 在 l_2 上.

由此, 我们得到如下定理:

空间两直线的位置关系 (续)

定理 15.1. 假设直线 l_1, l_2 的方程分别为

$$l_1: \frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1}, \quad l_2: \frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}.$$

则判定 l_1, l_2 的位置关系的充要条件如下:

1. 异面:
$$\Delta := \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$
2. 相交:
$$\Delta = 0, \quad X_1 : Y_1 : Z_1 \neq X_2 : Y_2 : Z_2;$$
3. 平行:
$$\Delta = 0, \quad X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 \neq x_1-x_2 : y_1-y_2 : z_1-z_2;$$
4. 重合:
$$\Delta = 0, \quad X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 = x_1-x_2 : y_1-y_2 : z_1-z_2.$$

空间两直线的夹角

对空间直线, 无论是否异面, 我们都可定义它们之间的夹角.

定义 15.2. 我们将空间两直线的夹角定义为它们方向向量所成的两个互补角中任意一个, 用 $\angle(l_1, l_2)$ 来表示.

明显地, 若两直线的方向向量分别为 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, 则由于方向向量可以取为相反向量, 故

$$\angle(l_1, l_2) = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad \text{或者}\angle(l_1, l_2) = \pi - \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

因此, 若在直角坐标系下, 两直线 l_1, l_2 的方程如上面一个定理中叙述的形式, 则

$$\cos\angle(l_1, l_2) = \pm\frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

特别地, 交角为 $\pi/2$ 的两直线互相垂直. 从而, 两直线互相垂直的充要条件是

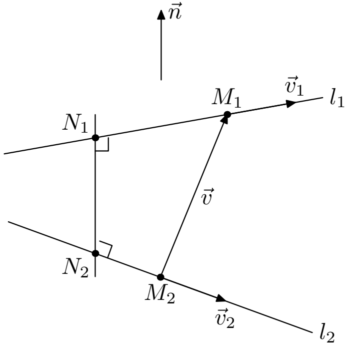
$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

两异面直线间的距离以及公垂线

定义 15.3. 与点到平面、点到直线、直线与平面、两平面之间的距离定义一样,我们定义空间中两直线 (可能异面) 的距离为这两条直线上各取一点,这两点距离的最小值.

若两直线共面,距离的计算已在前面的学习中给出. 下面我们来讨论异面直线之间距离的计算.

假设直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, 其上分别有动点 M_1, M_2. 则由于 l_1, l_2 异面, 我们知道 $\vec{v} := \overrightarrow{M_2M_1}, \vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ 三向量不共面. 考察 $\vec{n} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, 它是与两直线都垂直的一个非零向量. 假设过直线 l_1 且平行于 $\vec{n}$ 的平面为 π_1, 则 π_1 与 l_2 相交 (因为平面的方位向量 $\vec{v}_1, \vec{n}$ 与 $\vec{v}_2$ 不共面), 假设交点为 N_2; 完全类似地, 过直线 l_2 且与 $\vec{n}$ 平行的平面 π_2 与直线 l_1 相交, 交点为 N_1.



两异面直线间的距离以及公垂线 (续)

命题 15.4.

1. 假设如上, 则过 N_1, N_2 这两点的直线与直线 l_1, l_2 都垂直, 称为 l_1, l_2 的公垂线. 换言之, 两异面直线的公垂线定义为与它们都相交且垂直的直线;
2. 根据上面的讨论, 两异面直线的公垂线是唯一的 (自行思考);
3. 线段 N_1N_2 的长度称为公垂线的长, 它就等于两异面直线 l_1, l_2 间的距离.

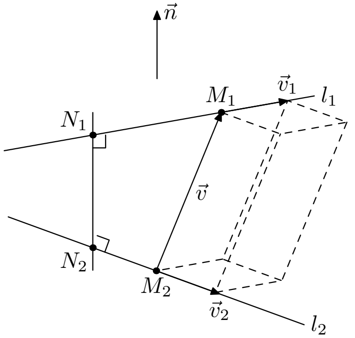
证明. 前面两条根据讨论是明显的. 只证明第三条.
注意到 $\overrightarrow{N_2N_1} = \pi_{\vec{n}}\overrightarrow{M_2M_1}$, 故

$$|\overrightarrow{N_2N_1}| = |\pi_{\vec{n}}\overrightarrow{M_2M_1}| = |\overrightarrow{M_2M_1}||\cos\angle(\vec{n}, \overrightarrow{M_2M_1})| \le |\overrightarrow{M_2M_1}|.$$

而且, 当 $M_2 = N_2, M_1 = N_1$ 时, 取得等号. 故 $d = \min|\overrightarrow{M_2M_1}| = |\overrightarrow{N_2N_1}|$. □

两异面直线间的距离以及公垂线 (续)

下面, 我们结合直线的方程, 来求异面直线的公垂线方程以及距离. 为此, 假设直线 l_1, l_2 的方程分别如定理 15.1 中那样, 则当 $\Delta \neq 0$ 时, 我们知道 l_1, l_2 是异面直线. 公垂线的长度即距离, 它们等于 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}$ 组成的平行六面体在 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 张成的底面上的高. 故



$$d = \frac{|(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v})|}{|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2|} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

其中 $(X, Y, Z) = (X_1, Y_1, Z_1) \wedge (X_2, Y_2, Z_2)$.

两异面直线间的距离以及公垂线 (续)

根据前面的讨论, 公垂线可以视为两平面的交线. 假设 M 为公垂线 l 上任意一点, 则 M 满足的方程为

$$\begin{cases} (\overrightarrow{M_1M}, \vec{v}_1, \vec{n}) = 0, \\ (\overrightarrow{M_2M}, \vec{v}_2, \vec{n}) = 0. \end{cases}$$

具体而言, 即

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \end{cases}$$

其中 $(X, Y, Z) = (X_1, Y_1, Z_1) \wedge (X_2, Y_2, Z_2)$.

一些例子

例子 15.1. 求通过点 $P(1,1,1)$ 且与如下直线都相交的直线 l 的方程:

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, \quad l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}.$$

不同于书上解法. 由于两直线的方程有共面和异面两种情况. 在共面的情形, 若两直线相交, 则只有在 P 不在共面的平面上时才可能有唯一解 (就是 P 与交点的连线), 否则题目有无穷多解; 在直线平行或重合时, 不可能有唯一解; 而在异面的情形, 所求直线其实就是分别通过直线 l_1, l_2 与点 P 所形成的平面 π_1, π_2 的交线.

- 故我们首先判定 l_1, l_2 是否是异面直线:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad 1:2:3 \neq 2:1:4.$$

故为共面直线, 且两直线相交.

一些例子 (续)

- 容易求得交点为 $(1,2,3)$. 故根据前面的分析, 所求直线就是 P 与该交点的连线:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

□

例子 15.2. 证明下列两直线异面, 并求它们之间的距离以及它们的公垂线方程:

$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0},\quad l_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0}.$$

解. 直接利用两直线位置关系判断如下, 令 $\vec{v}=\overrightarrow{M_1M_2}=(1,1,2)$, $\vec{v}_1=(1,-1,0)$, $\vec{v}_2=(1,1,0)$:

$$\Delta=(\vec{v},\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=4\neq 0,$$

一些例子 (续)

故它们是异面直线.
为了求出它们之间的距离, 根据距离公式

$$d = \frac{|\vec{v} \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2|} = \frac{(\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)}{|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2|} = \frac{4}{|(0,0,2)|} = 2.$$

根据公垂线方程的计算方法, 本质上就是公垂线上的点 M 必然满足 $(\overrightarrow{M_iM}, \vec{v}_i, \vec{n}) = 0$, $i = 1, 2$. 故

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

它就是 x 轴. □

平面束的定义

有时为了研究平面的性质, 我们需要考察通过一条直线或平行于某平面的所有平面的参数表示, 这就是平面束的概念.

定义 16.1. *空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束, 其中这条公直线叫做该平面束的轴;*
空间中平行于同平面的所有平面的集合叫做平行平面束.

关于有轴平面束, 我们可以如下参数化. 假设

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

相交于一条直线 l, 那么下列方程

$$\pi : m(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

其中 m, n 不全为零, 表示一个通过直线 l 的平面.

平面束的定义 (续)

事实上, 注意到 π 的方程可化为

$$(mA_1+nA_2)x+(mB_1+nB_2)y+(mC_1+nC_2)z+(mD_1+nD_2)=0,$$

它仍然是一个 (关于 x,y,z 的) 一次方程, 为了说明它是平面方程, 只需证明系数 mA_1+nA_2、mB_1+nB_2、mC_1+nC_2 不全为零.
为此, 考察向量

$$\vec{v}:=(mA_1+nA_2,mB_1+nB_2,mC_1+nC_2)=m(A_1,B_1,C_1)+n(A_2,B_2,C_2),$$

由于 π_1,π_2 相交, 故它们的法向量 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ 必不平行 (即它们是线性无关的), 因此对任意的 m,n 不全为零, π 的法向量 $\vec{v}$ 不可能为零向量. 这表明系数 mA_1+nA_2、mB_1+nB_2、mC_1+nC_2 不全为零. 因此 π 是一个平面方程.
明显地, 直线 l 上的点因为都满足 π_1,π_2 的方程, 故也满足 π 的方程, 即平面 π 也通过直线 l.

平面束的定义 (续)

反过来, 我们可以证明, 任何一个通过直线 l 的平面 π', 必然存在不全为零的实数 l, m, 使得该平面的方程可以表示为 π 的形式.
事实上, 由于平面 π' 通过直线 l, 故若假设平面 π' 的方程为

$$\pi' : Ax + By + Cz + D = 0,$$

则必有 π_1, π_2, π' 的法向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v} = (A, B, C) \neq 0$ 共面, 即

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

这表明 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}$ 是线性相关的, 而已经知道 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 线性无关, 故 $\vec{v}$ 可以表示为 m, n 的线性组合 $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2$, 由于 $\vec{v} \neq 0$, 故 l, m 不全为零. 这样, 平面 π' 的方程为

$$(mA_1 + nA_2)x + (mB_1 + nB_2)y + (mC_1 + nC_2)z + D = 0.$$

平面束的定义 (续)

但对共直线 l 上的点 $M(x,y,z)$, 我们有

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

代入到 π' 的方程 (因为 π' 也通过 l), 我们得到

$$D=mD_1+nD_2,$$

故我们证明了: 对任何通过直线 l 的平面 π', 必定存在不全为零的实数 m,n 使得 π' 的方程具有如下形式

$$\pi : m(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+n(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

注记. 教材中关于后半部分的证明是不完整的, 没有说明方程 π 可以表示任何通过 l 的平面.

平面束的定义 (续)

综上讨论, 我们得到

定理 16.2. 假设两平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 有交线 l. 则平面 π 通过 l 当且仅当其方程可以表示为

$$\pi: m(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+n(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中 m,n 是不全为零的实数.

有时, 为了方便应用, 我们引入如下等价刻画. 我们将平面方程 π_1 的系数 $\tilde{\vec{v}}_1 := (A_1, B_1, C_1, D_1)$ 称为平面 π_1 的表示向量. 注意到, 它在相差一个非零常数的意义下决定了平面.

推论 16.3. 假设如前定理一样, 则平面 π 通过直线 l 的充要条件是存在不全为零的实数 m,n, 使得 π_1,π_2,π 的表示向量 $\tilde{\vec{v}}_1,\tilde{\vec{v}}_2,\tilde{\vec{v}}$ 满足:

$$\tilde{\vec{v}}=m\tilde{\vec{v}}_1+n\tilde{\vec{v}}_2.$$

平面束的定义 (续)

下面, 我们讨论平行平面束. 由于平行于已知平面 $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ 的平面 π' 具有和 π 相同的法向量, 故 π' 的方程可写为

$$\pi' : Ax + By + Cz + \lambda = 0,$$

其中 λ 为任意实数. 反过来, 上述 π' 的方程显然和平面 π 具有相同的法向量. 从而表示的是与 π 平行的平面. 这样, 我们证明了:

定理 16.4. 由平面 $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ 决定的平行平面束的方程为

$$\pi' : Ax + By + Cz + \lambda = 0,$$

其中 λ 为任意实数.

思考. 如何刻画直线的情形: 若两直线相交, 刻画过交点的直线束方程; 若两直线平行, 刻画平行直线束的方程.

利用平面束解决问题

例子 16.1. 求通过直线 $l:\begin{cases}2x+y-2z+1=0\\ x+2y-z-2=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi: x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程.

解. 假设所求平面的表示向量为

$$\tilde{\vec{v}} := m(2,1,-2,1)+n(1,2,-1,-2)=(2m+n,m+2n,-2m-n,m-2n),$$

从而该平面与平面 π 垂直的充要条件是它们的法向量垂直:

$$(1,1,1)\cdot(2m+n,m+2n,-2m-n)=0 \iff m+2n=0,$$

故 $\tilde{\vec{v}}=n(-3,0,3,-4)$, 从而所求平面方程为

$$3x-3z+4=0.$$

□

利用平面束解决问题 (续)

例子 16.2. 求与平面 $\pi : 3x + y - z + 4 = 0$ 平行且在 z 轴上截距为 -2 的平面方程.

解. 假设所求的平面方程为

$$3x + y - z + \lambda = 0,$$

则它在 z 轴的截距 (令 $x, y = 0$, 解得 z) 为

$$-2 = \lambda,$$

故所求平面方程为

$$3x + y - z - 2 = 0.$$

□

利用平面束解决问题 (续)

例子 16.3. 证明两直线

$$l_1:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}\qquad l_2:\begin{cases}A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0,\end{cases}$$

在同一个平面的充要条件是

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4\end{vmatrix}=0.$$

证明. 根据直线 l_1, l_2 在同一个平面 π, 当且仅当 π 的表示向量 $\tilde{\vec{v}}=(A,B,C,D)$ 可以写成

$$\tilde{\vec{v}}=m_1\tilde{\vec{v}}_1+n_2\tilde{\vec{v}}_2,\quad \tilde{\vec{v}}=m_3\tilde{\vec{v}}_3+n_4\tilde{\vec{v}}_4,$$

利用平面束解决问题 (续)

其中 m_1, n_2 不全为零, m_3, n_4 也不全为零; $\tilde{\vec{v}}_i := (A_i, B_i, C_i, D_i)$. 这表明

$$m_1\tilde{\vec{v}}_1 + n_2\tilde{\vec{v}}_2 - m_3\tilde{\vec{v}}_3 - n_4\tilde{\vec{v}}_4 = 0,$$

其中系数 $m_1, n_2, -m_3, -n_4$ 不全为零, 从而说明向量 $\tilde{\vec{v}}_1, \tilde{\vec{v}}_2, \tilde{\vec{v}}_3, \tilde{\vec{v}}_4$ 线性相关. 故它们所构成的矩阵之行列式为零. □

课后习题

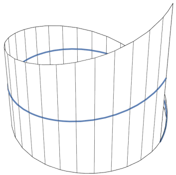
1. P72: 1(2), (3), 3, 5(5), (6); P73: 6(1); 9, 11;
2. P75: 3, 7, 9;
3. P77: 1(2),(3), 2(2), (3), 3(1), 4(2), 5(1), 6;
4. P82: 1(2), (4), 2(2); P83: 3(4), 5;
5. P85: 1(1), (3), 2, 5, 6;
6. P86: 2;
7. P90: 4, 8; P91: 10;
8. P94: 3, 4, 6;

第四章 · 柱面、锥面旋转曲面与二次曲面

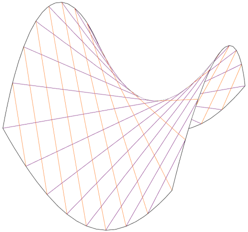
- 直纹面
- 柱面
- 锥面
- 旋转面
- 几类旋转面的基本性质
- 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线
- 课后习题

空间中的曲面

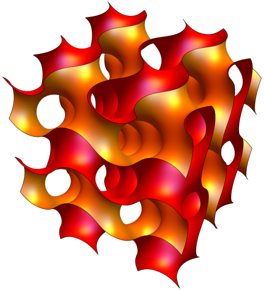
空间中有非常多的曲面, 例如



柱面



双曲抛物面



由周期隐函数给出的神奇曲面

直纹面的定义

在本章, 我们主要研究几类二次曲面.

定义 18.1. 动直线沿着一条与之相交的曲线 Γ 连续变动而形成的曲线称为直纹面. 动直线称为 (直) 母线, Γ 称为准线.

- 因此, 准线必然与每条直母线相交, 且准线上每点都在一条直母线上.
- 若 Γ' 是直纹面上两一条与所有直母线相交的曲线, 则该直纹面也可看成是直母线 Γ' 沿着连续变动而得. 因此, 直纹面的准线不唯一.

假设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 为直纹面准线 $\Gamma : \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 上一点, 则过 P_1 且方向向量为 $\vec{v} = \{u, v, w\}$ 的直母线可表示为 $\frac{x-x_1}{u} = \frac{y-y_1}{v} = \frac{z-z_1}{w} = t$, 则 $x_1 = x - tu, y_1 = y - tv,$ $z_1 = z - tw$, 代入到 Γ 的方程得到 $\begin{cases} F_1(x-tu, y-tv, z-tw) = 0 \\ F_2(x-tu, y-tv, z-tw) = 0, \end{cases}$ 消去 t 即可得到直纹面的方程.

下面主要讨论两种常见的直纹面: 柱面和锥面。

柱面的例子与定义

定义 19.1. 直母线方向固定的直纹面称为柱面. 到一条定直线的距离为定值的点的轨迹称为圆柱面, 它也是一种柱面. 定直线称为圆柱面的轴, 定值称为圆柱面的半径.

例子 19.1. 求以 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\2x^2+2y^2+z^2=2\end{cases}$ 为准线, $-1:0:1$ 为母线方向的柱面.

解. 容易知道 Γ 等价于如下曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=0\end{cases}$. 假设过其上 (x_1,y_1,z_1) 的直母线为

$$\frac{x-x_1}{-1}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{1}=t,\text{则}\begin{cases}x_1=x+t,\\y_1=y,\\z_1=z-t,\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}t=z,\\(x+t)^2+y^2=1,\end{cases}$$

故所求的柱面方程为 $(x+z)^2+y^2=1$. □

柱面的例子与定义 (续)

例子 19.2. 求以 $l: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-2}$ 为轴, 且过点 $P(1,-2,1)$ 的圆柱面.

解. 按照圆柱面的定义, 我们知道其上一点 (x,y,z) 到直线 l 的距离等于 P 到 l 的距离, 故由于直线 l 过点 $P_0(0,1,-1)$ 且方向向量为 $\vec{v} = \{1,-2,-2\}$, 我们得到

$$\begin{aligned} d(P,l) &= \frac{|\overrightarrow{P_0P} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} |(1,-3,2) \wedge (1,-2,-2)| \\ &= \frac{|(10,4,1)|}{3} = \sqrt{13}. \end{aligned}$$

柱面的例子与定义 (续)

现在假设 $M(x,y,z)$ 是所求圆柱面上一点, 则

$$\begin{aligned}\sqrt{13}=d(P,l)=d(M,l)&=\frac{|(x,y-1,z+1)\wedge(1,-2,-2)|}{3}\\&=\frac{|(4-2y+2z,1+2x+z,1-2x-y)|}{3}\\&=\frac{\sqrt{8x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-8yz-18y+18z+18}}{3}.\end{aligned}$$

故所求的圆柱面方程为

$$8x^2+5y^2+5z^2-6y+4xy+4xz-8yz-18y+18z-99=0.$$

□

柱面的例子与定义 (续)

例子 19.3. 求过三条平行直线 $l_1: x-1=y+1=z-2$, $l_2: x+1=y=z-1$ 和 $l_3: x=y=z$ 的圆柱面方程.

解. 由于三条平行直线的方向向量可取为 $\vec{v}=\{1,1,1\}$, 故我们以它为法向量得到该圆柱面的一个横截平面 $x+y+z=0$. 它与三直线的交点分别为 $P_1\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$, $P_2(-1,0,1)$, $P_3(0,0,0)$. 由于圆柱面的轴到这三点的距离相等, 得到

$$x^2+y^2+z^2=(x+1)^2+y^2+(x-1)^2=(x-1/3)^2+(y+5/3)^2+(z-4/3)^2,$$

解得轴的方程为

$$\begin{cases} x-z+1=0, \\ x-5y+4z-7=0. \end{cases}$$

现在, 注意到 $O(0,0,0)$ 在圆柱面上, 若在轴上任取一点 $P_0(0,-3/5,1)$, 则根据圆柱面的定义, 知道其上任何一点 $M(x,y,z)$ 到轴的距离相等, 得到

$$\frac{|\overrightarrow{P_0M}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\frac{|\overrightarrow{P_0O}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|} \implies |\overrightarrow{P_0M}\wedge\vec{v}|^2=|\overrightarrow{P_0O}\wedge\vec{v}|^2,$$

柱面的例子与定义 (续)

即

$$\begin{aligned}|(x,y+3/5,z-1)\wedge(1,1,1)|^2&=|(0,-3/5,1)\wedge(1,1,1)|^2,\\ |(8/5+y-z,-1-x+z,-3/5+x-y)|^2&=|(8/5,-1,-3/5)|^2,\end{aligned}$$

化简得到

$$10x^2+10y^2+10z^2-10xy-10xz-10yz+4x+22y-26z=0.$$

$\square$

母线平行于坐标轴的柱面

假设柱面的准线 Γ 是 O-xy 坐标面上的一条曲线, 它在 O-xy 坐标系下的方程为 $F(x,y)=0$. 则过准线上点 $P(x_1,y_1,0)$ 且平行于 z 轴的直母线方程为

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z}{1}.$$

即 $x_1=x$ 且 $y_1=y$, 代入到点 P 所满足的准线方程 $F(x_1,y_1)=0$ 就得到平行于 z-轴的柱面方程 $F(x,y)=0$. 对其它坐标面类似讨论, 这样我们就证明了,

定理 19.2. *若准线在坐标面上而且直母线垂直于该坐标面, 则此柱面方程与准线在相应平面直角坐标系下的方程具有相同的形式.*

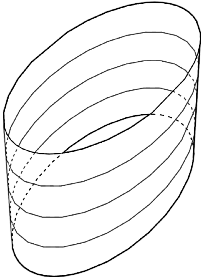
推论 19.3. *若曲面方程中有坐标变量不出现 (即含此坐标的各项系数为零, 因而此坐标可取到任意值), 则该曲面必为柱面, 而且其母线与所缺坐标同名的坐标轴平行.*

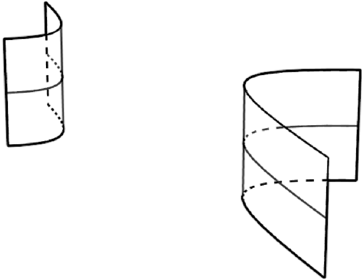
母线平行于坐标轴的柱面 (续)

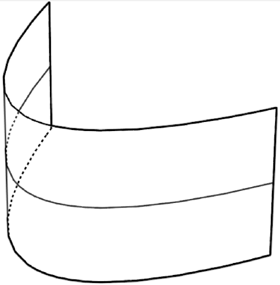
例子 19.4. 根据上面的讨论,我们知道下列方程都表示柱面:

$$(a): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (b): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (c): y^2=2px.$$

在空间直角坐标系下,它们与 O-xy 坐标面的交线分别是椭圆、双曲线、抛物线,所以它们依次称为椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面. 由于它们的方程都是二次的,所以将它们统称为二次柱面.


(a): 椭圆柱面


(b): 双曲柱面


(c): 抛物柱面

曲面关于坐标平面的射影柱面

定义 19.4. 以曲线 Γ 为准线而母线垂直于平面 π 的柱面称为 Γ 对 π 的射影柱面. 该投影柱面与 π 的交线称为 Γ 在 π 上的射影曲线.

由于空间曲线可表示为 $l:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$. 如果我们从中依次消去一个元, 可得 $F_1(y,z)=0$, $F_2(x,z)=0$, $F_3(x,y)=0$. 任取其中两个构成的方程组, 例如 $\begin{cases} F_1(y,z)=0, \\ F_2(x,z)=0, \end{cases}$ 表示的曲线也是 l.

注意到 $F_1(y,z)=0$ 以及 $F_2(x,z)=0$ 分别表示的是母线平行于 x、y 轴的柱面. 因此 l 可以认为是这两个柱面的交线. 这样, 我们得到

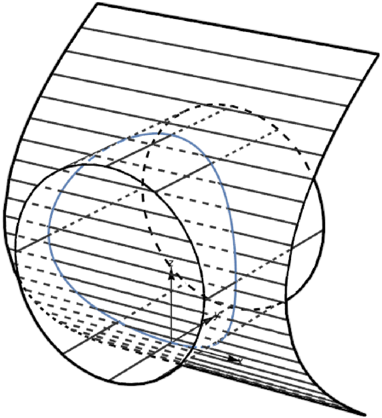
命题 19.5. 每条空间曲线都可作为它对两个坐标面的射影柱面的交线.

曲面关于坐标平面的射影柱面 (续)

例子 19.5. 考察空间曲线 $\Gamma : \begin{cases} 2x^2 + z^2 + 4y = 4z \\ x^2 + 3z^2 - 8y = 12z, \end{cases}$ 分别消去 x, y 得到 $\begin{cases} z^2 - 4y = 4z, \\ x^2 + z^2 = 4z. \end{cases}$ 容易知道, 第一个柱面可写成 $(z-2)^2 = 4(y+1)$, 它是一个以 O-yz 平面上的抛物线 $(z-2)^2 = 4(y+1)$ 为准线, 平行于 x 轴的直线为母线的抛物柱面; 类似地, 第二个柱面可写成 $x^2 + (z-2)^2 = 4$, 它是一个以 O-xz 平面上的椭圆 $x^2 + (z-2)^2 = 4$ 为准线, 母线平行于 y 轴的椭圆柱面.

曲面关于坐标平面的射影柱面 (续)

注意到, 从第二个方程知道, $(z-2)^2 \leq 4$, 故代入到第一个方程得到 $4(y+1) \leq 4$, 即 $y \leq 0$. 即严格来说, 第一个柱面是以抛物线 $(z-2)^2 = 4(y+1)$, $-1 \leq y \leq 0$, 为准线, 母线平行于 x 轴的抛物柱面的一部分.



Viviani 曲线

例子 19.6. 一个半径为 r 的球面和一个通过球心且直径等于 r 的圆柱面的交线叫做维维安尼曲线. 若球面的球心在原点, 且柱面的母线平行于 z 轴且通过 $(a,0,0)$, 则这条曲线的方程可以写成

$$\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2, \\ x^2+y^2-rx=0. \end{cases}$$

求 Γ 关于 O-xy 平面的投影柱面以及它在该坐标面上的方程.

解. 由于第二个方程不含有 z, 因此它就是 Γ 关于 O-xy 平面的投影柱面 (一般而言, 我们可能需要从 Γ 的两个方程中消去一个变元, 得到投影柱面). 该柱面在 O-xy 坐标面上的方程就是 $x^2+y^2-rx=0$, 它等价于 $(x-r/2)^2+y^2=r^2/4$, 它是一个半径为 $r/2$, 中心在 $(r/2,0)$ 的圆. □

Viviani 曲线 (续)

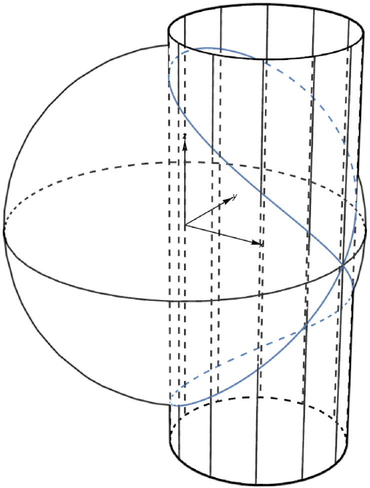


图 1: Viviani 曲线以及它的投影柱面

锥面的定义

定义 20.1.

- 直母线过一个不在准线上的定点的直纹面叫做锥面. 该定点称为锥面的顶点.
- 两条相交直线中的一条 (称为母线) 绕着另一条 (称为轴) 旋转所得曲面称为圆锥面. 母线与轴的交点称为顶点. 母线与轴交出的锐角称为半顶角. 由定义知圆锥面被顶点分成两部分, 每一部分叫做圆锥面的一腔.

锥面方程的求法

例子 20.1. 求顶点在原点, 准线为 $\Gamma:\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\neq 0\end{cases}$ 的锥面方程.

解. 假设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是 Γ 上任意一点, 则过 M_1 的直母线为

$$\frac{x-0}{x_1-0}=\frac{y-0}{y_1-0}=\frac{z-0}{z_1-0}\Longrightarrow\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},$$

故结合 M_1 在 Γ 上, 当 $z\neq 0$ 时, 我们有

$$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ z_1=c,\end{cases}\Longrightarrow x_1=\frac{cx}{z},\quad y_1=\frac{cy}{z},$$

锥面方程的求法 (续)

代入上面的第一个方程, 得到 $\frac{c^2x^2}{a^2z^2} + \frac{c^2y^2}{b^2z^2} = 1$, 它是锥面不含顶点的方程 (因为从直母线方程知道, $z = 0$ 表明 $x = y = 0$, 即此时直母线排除了原点). 将其变形为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

即为所求的锥面方程 (包含锥顶点). □

锥面方程的求法 (续)

若已知是圆锥面, 则我们可以通过顶点、轴和半顶角求得圆锥面的方程.

例子 20.2. 在直角坐标系下, 求顶点为 $P_0(1,2,3)$, 轴垂直于平面 $\pi: 2x+2y-z+1=0$, 半顶角为 $\theta=30^\circ$ 的圆锥面方程.

解. 按照圆锥面的定义, 直母线与轴所成的角为定角 (即半顶角). 因此, 我们可以利用夹角公式求解.
由于轴的方向为 $\vec{n}=\{2,2,-1\}$, 它与锥面上一点 $P(x,y,z)$ 和顶点 P_0 所成的向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 夹角为 θ 或者 $\pi-\theta$, 故

$$\pm\cos 30^\circ = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}}{|\vec{n}||\overrightarrow{P_0P}|} \iff |\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{n}||\overrightarrow{P_0P}|,$$

即

$$|(x-1,y-2,z-3)\cdot(2,2,-1)| = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2},$$

锥面方程的求法 (续)

展开得到

$$(2x+2y-z-3)^2 = \frac{27}{4}(x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+14)$$

即

$$11x^2+11y^2+23z^2-32xy+16xz+16yz-6x-60y-186z+342=0.$$

□

注记. 一般而言, 我们没必要将最终的方程完全展开, 比较方便得到方程可写为如下形式:

$$11(x-1)^2+11(y-2)^2+23(z-3)^2-32(x-1)(y-2)+16(y-2)(z-3)+16(x-1)(z-3)=0.$$

锥面方程的齐次性

我们看到, 以 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为锥顶点的锥面方程关于 $x - x_0$、$y - y_0$ 以及 $z - z_0$ 都是二次齐次的, 即若 $F(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ 表示以 P_0 为顶点的锥面方程, 则

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^2 F(x, y, z), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

定义 20.2. 若方程 $F(x, y, z) = 0$ 对任何实数 λ 都成立

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^m F(x, y, z),$$

其中 m 为非负整数 (当 $m = 0$ 时, $\lambda \neq 0$). 则称 $F(x, y, z) = 0$ 是关于 x, y, z 的 m 次齐次方程.

可以证明,

定理 20.3. 对任意顶点在原点的锥面, 它的方程 (包括不能表示顶点的方程) 中至少有一个是关于 x, y, z 的齐次方程.

锥面方程的齐次性 (续)

证明. 不妨假设顶点在原点的锥面方程为 $F(x,y,z)=0$, 它不是关于 x,y,z 的齐次方程. 注意到该锥面与单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线是它的一条准线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$
假设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 是准线上任意点, 则过 P_1 的直母线为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}=\lambda,$$

故当直母线上动点 (x,y,z) 不在顶点时, 我们有 $x_1=\lambda x$, $y_1=\lambda y$, $z_1=\lambda z$, 将其代入到 $x_1^2+y_1^2+z_1^2=1$ 得到

$$\lambda^2(x^2+y^2+z^2)=1 \implies \lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

从而由 $F(x_1,y_1,z_1)=0$ 得到不含顶点的锥面方程为

$$F\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=0$$

锥面方程的齐次性 (续)

或

$$F\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=0$$

它们都是关于 x, y, z 的零次齐次方程. □

为了讨论齐次方程是否表示的都是锥面的问题, 我们先

定义 20.4. 若关于 $x-x_0, y-y_0, z-z_0$ 的齐次方程所表示的图形若只含有点 (x_0, y_0, z_0), 则称它是以点 (x_0, y_0, z_0) 为顶点的虚锥面.

例如 $x^2+y^2+z^2=0$ 表示以原点为顶点的虚锥面.

定理 20.5. 关于 x, y, z 的齐次方程总表示顶点在原点的锥面 (可能除开顶点).

锥面方程的齐次性 (续)

证明. 假设 $F(x,y,z)=0$ 是关于 x,y,z 的 m 次齐次方程, 若它表示的曲面不是虚锥面, 曲线上就存在与原点 O 不同的点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 注意到直线 OP_1 的方程为

$$l:\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}=\lambda \implies x=\lambda x_1,\quad y=\lambda y_1,\quad z=\lambda z_1.$$

故利用齐次性, 我们得到

$$F(x,y,z)=F(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)=\lambda^m F(x_1,y_1,z_1)=0.$$

这表明直线 OP_1 上的点都在曲面上 (注意当 $m=0$ 时, 要求 $\lambda\neq 0$ 才有意义, 故原点 O 不在直线 l 上, 从而此时需要排除原点).
于是曲面是由过原点的直线组成的, 因而是以原点为顶点的锥面. □

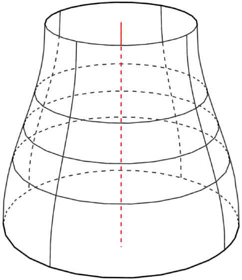
注记. 利用平移, 我们得到关于 $x-x_0$、$y-y_0$、$z-z_0$ 的齐次方程中表示顶点在 (x_0,y_0,z_0) 的锥面 (可能除开顶点).

旋转面的定义

事实上, 圆柱面、圆锥面都可视为直线绕着轴旋转一周所生成的曲面. 更一般地,

定义 21.1. 假设 Γ 为一条空间曲线, l 为一定直线.

- Γ 绕 l 旋转所生成的曲面称为旋转面. 其中曲线 Γ 叫做母线, 直线 l 叫做旋转轴或轴.
- 在通过轴 l 的平面上, 以轴 l 为边界的半平面与旋转面的交线叫做经线.
- 旋转面母线 Γ 上任意点 P_1 绕轴旋转生成的圆叫做纬线或纬圆.



旋转面方程的求法

例子 21.1. 求直角坐标系下, 直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$ 绕直线 $x=y=z$ 旋转所得的旋转曲面的方程.

解. 注意到轴通过点 $M_0(0,0,0)$, 且方向向量为 $\vec{v}=(1,1,1)$. 假设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是母线上一点, 那么过 M_1 的纬圆满足 $\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{v}=0$, $|\overrightarrow{M_0M}|=|\overrightarrow{M_0M_1}|$, 其中 $M(x,y,z)$ 是纬圆上一点, 写成坐标形式得到

$$\begin{cases}(x-x_1,y-y_1,z-z_1)\cdot(1,1,1)=0\\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x+y+z=x_1+y_1+z_1\\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2.\end{cases}$$

又由于 M_1 在母线上, 故 $\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{1}=\frac{z_1-1}{0} \Longrightarrow x_1=2y_1, \quad z_1=1$. 代入得到

$$x+y+z-1=3y_1, \quad x^2+y^2+z^2=5y_1^2+1,$$

消去得到

$$x^2+y^2+z^2-1=\frac{5}{9}(x+y+z-1)^2.$$

□

旋转面方程的求法 (续)

上述解法具有一般性, 事实上假设在空间直角坐标系下, 旋转面的母线为

$$\Gamma : \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

旋转轴为直线

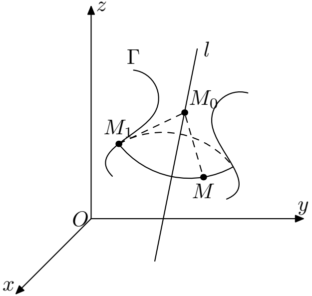
$$l : \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z},$$

这里 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为轴 l 上的一个定点, $\vec{v} = (X,Y,Z)$ 为旋转轴 l 的方向向量;

- 现在假设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是 Γ 上的任意点, 那么过 M_1 的纬圆必定垂直于轴 l; 因此纬圆上的点 $M(x,y,z)$ 必定满足 $\vec{v} \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0$, 即

$$X(x-x_1) + Y(y-y_1) + Z(z-z_1) = 0;$$

旋转面方程的求法 (续)



- 此外, 根据初等几何的知识容易知道, $|\overrightarrow{M_0M}| = |\overrightarrow{M_0M_1}|$, 即

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2.$$

- 点 M_1 在母线上, 我们得到

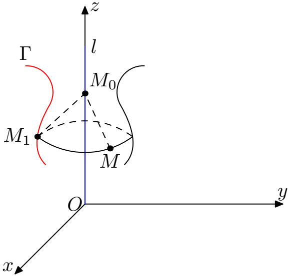
$$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ F_2(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{cases}$$

联立上面三个方程, 并消去 x_1, y_1, z_1, 便得到旋转面的方程.

旋转面母线的取法

明显, 旋转面上每一条经线都可作为母线. 特别地, 如果我们选取恰当的直角标架, 使得 z-轴就是旋转轴、经线 (母线) 和轴所在平面为 O-xz 坐标面, 此时我们可以求得旋转面的方程.

如图, 假设旋转面的母线为 $\Gamma:\begin{cases}F(x,z)=0\\ y=0,\end{cases}$ 旋转轴为 z 轴: $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$. 假设 $M_1(x_1,0,z_1)$ 是母线 Γ 上任意一点, $M_0(0,0,0)$ 为轴上一定点, 则纬圆方程为



$$\begin{cases}z-z_1=0\\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+z_1^2.\end{cases}$$

由于 M_1 在母线 Γ 上, 故 $F(x_1,z_1)=0$. 代入, 消去 x_1,z_1 得到

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

完全类似得到坐标面 O-xy 上曲线绕 x 轴、O-yz 上曲线绕 y 轴旋转而得的曲面方程分别为 $F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0,\quad F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$

旋转面的一些例子

利用前面的讨论, 我们将欧氏空间中的椭圆、双曲线、抛物线绕直角坐标轴旋转, 容易得到对应的旋转面方程.

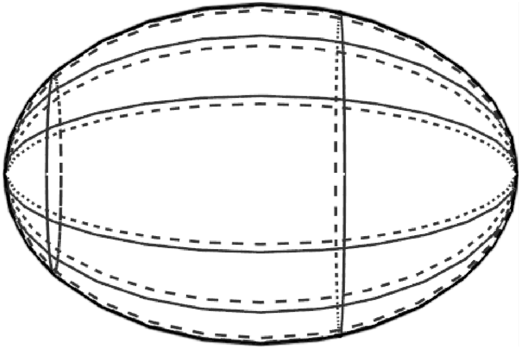
例子 21.2. 求将椭圆 $\Gamma:\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0,\end{cases}$ 其中 $a>b>0$, 分别绕 x 轴 (长轴)、y 轴 (短轴) 旋转而成的旋转面方程.

解. 根据前面的讨论, 令 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0,\end{cases}$, 绕哪个轴旋转, 即是将方程 $F(x,y)=0$ 中那个轴的同名坐标保持, 将另一个变量用 (正负) 剩下两个坐标变量的平方和替换.
这样, 我们得到绕长轴 (x 轴) 旋转、绕短轴 (y 轴) 旋转而得的曲面方程分别为

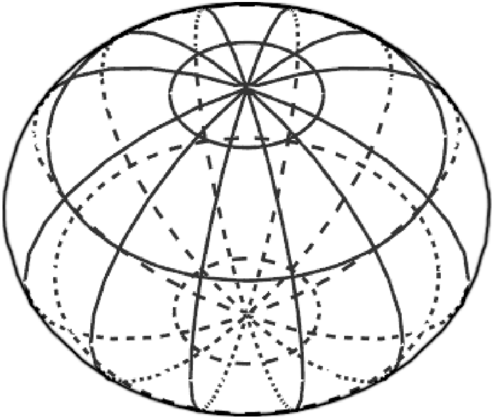
$$F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0 \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

$$F(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0 \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.$$

旋转面的一些例子 (续)



(a) 椭圆绕长轴旋转: 椭球面



(b) 椭圆绕短轴旋转: 椭球面

旋转面的一些例子 (续)

例子 21.3. 求双曲线 $\Gamma: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0, \end{cases}$ 绕 z 轴 (虚轴)、y 轴 (实轴) 旋转而得的曲面方程.

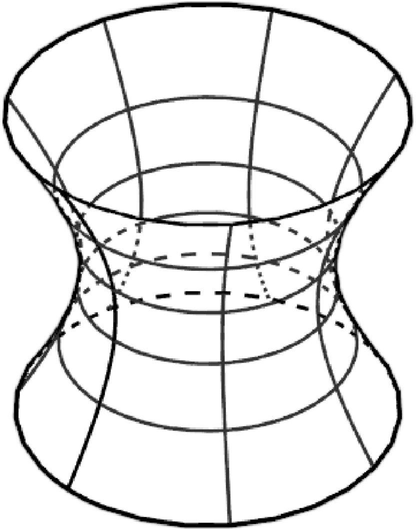
解. 和前面类似, 若令 $F(y,z) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$, 则我们得到绕 z-轴、y 轴旋转而得的曲面方程分别为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \iff \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

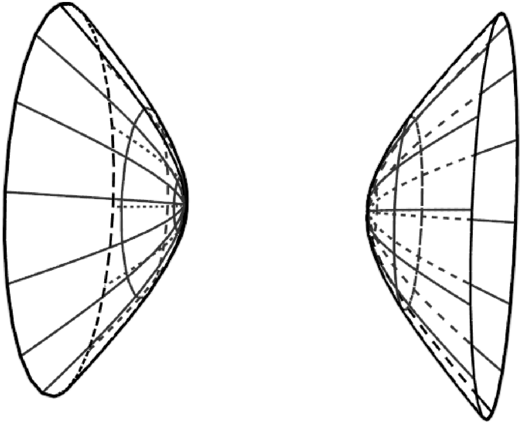
$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0 \iff \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

□

旋转面的一些例子 (续)



(a) 双曲线绕虚轴旋转: 单叶双曲面



(b) 双曲线绕实轴旋转: 双叶双曲面

旋转面的一些例子 (续)

例子 21.4. 求将抛物线 $\Gamma : \begin{cases} y^2 = 2pz, x = 0 \end{cases}$, 其中 $p > 0$, 绕它的对称轴旋转而得的曲面方程.

解. 注意到 Γ 的对称轴为 z 轴, 故若令 $F(y, z) = y^2 - 2pz$, 则绕 z 轴旋转而得的曲面方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \iff x^2 + y^2 = 2pz.$$

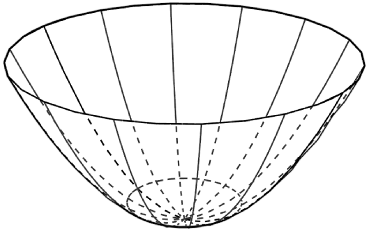


图 4: 抛物线绕对称轴旋转: 旋转抛物面

□

旋转面的一些例子 (续)

例子 21.5. 求将 $O\text{-}xz$ 平面上以 $(R,0)$ 圆心、r 为半径的圆周, 绕 z 轴旋转一周得到的旋转面方程.

解. 容易知道, 母线方程为 $\Gamma: \begin{cases} (x-R)^2+z^2=r^2, \\ y=0 \end{cases}$, 因此若令 $F(x,z)=(x-R)^2+z^2-r^2$, 则得到绕 z 轴旋转的曲面方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0 \iff \left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+z^2=r^2,$$

展开得到

$$\left(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2\right)^2=4R^2(x^2+y^2).$$

旋转面的一些例子 (续)

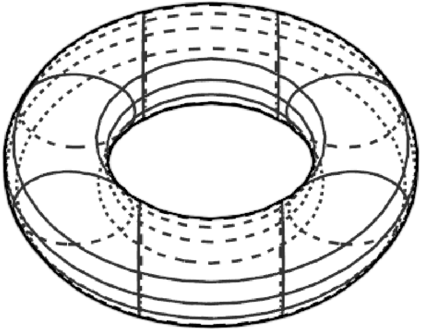


图 5: 圆周绕 z 轴旋转: 环面

对称性

假设 $P(x,y,z)$ 是空间中一点, 在直角标架中, 我们发现如下的对称规律:

- 坐标面对称: P 关于 O-xy 坐标面的对称点为 $(x,y,-z)$;
- 坐标轴对称: P 关于 x-轴的对称点为 $(x,-y,-z)$;
- 坐标原点 (中心) 对称: P 关于坐标原点 O 的对称点为 $(-x,-y,-z)$.

类似地, 我们容易写出其它坐标面对称、坐标轴对称的对称点.

椭球面的性质

定义 22.1. 在空间直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

表示的曲面称为椭球面，上述方程称为椭球面的标准方程. 其中 $a, b, c>0$, 一般假设 $a \geq b \geq c>0$.

椭球面具有如下基本性质: 由于当 $P(x, y, z)$ 在椭球面上时，我们知道 $P'(\pm x, \pm y, \pm z)$ 也在椭球面上，故

- 椭球面关于三个坐标面都对称；每个对称平面都称为主平面；
- 椭球面关于三个坐标轴都对称；每个对称轴都称为主轴；
- 椭球面关于坐标原点中心对称；对称中心称为中心；
- 椭球面与三个轴的交点分别为 $(\pm a, 0,0)$、$(0, \pm b, 0)$、$(0,0, \pm c)$，它们都称为顶点；

椭球面的性质 (续)

- 同一条对称轴上的两个顶点间的连线以及其长度都称为轴; 轴的一半, 即中心与顶点的连线以及其长度都称为半轴;
- 当 $a > b > c$ 时, $2a$、$2b$、$2c$ 分别称作长轴、中轴、短轴; a, b, c 分别叫做长半轴、中半轴、短半轴;
- 任何两个轴相等的椭球面就是旋转椭球面, 例如 $a = b$ 的椭球面就是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴旋转而成的旋转椭球面;
- 当然, $a = b = c$ 的椭球面就是球面. 当 a, b, c 互不相同时的椭球面称为三轴椭球面.

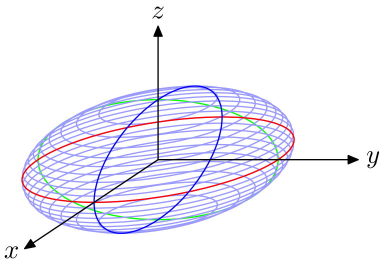
平面与椭球面的交线

为了研究曲面的大致形状,我们利用平行于坐标面的一组平面切割椭球面,根据所截曲线来研究曲面的性质. 这种方法称为平行截割法.

例如,如果用坐标面 O-xy、O-yz、O-xz 截椭球面,分别得到

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0. \end{cases}$$

上面三个方程都是坐标面上的椭圆,都叫做椭球面的主截线或主椭圆.



平面与椭球面的交线 (续)

现在, 我们来讨论平行于坐标面的平面于椭球面的截线. 例如 $z = h$ 这个平行于 O-xy 坐标面的平面, 它于椭球面的交线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

明显地,

- 当 $|h| > c$ 时, 交线为空集;
- 当 $|h| = c$ 时, 交线为椭圆在 z 轴上的两个顶点 $(0, 0, \pm c)$;
- 当 $|h| < c$ 时, 交线为一个椭圆, 它的两个半轴分别为 $a\sqrt{1 - h^2/c^2}$、$b\sqrt{1 - h^2/c^2}$; 它的两轴的端点分别是

$$\left(\pm a\sqrt{1 - h^2/c^2}, 0, h\right) \quad \left(0, \pm b\sqrt{1 - h^2/c^2}, h\right).$$

它们分别在 O-xz、O-yz 坐标面的主椭圆上.

可见, 椭球面可以看作是一簇平行于 O-xy 坐标平面的椭圆变动而成的, 该椭圆的端点分别在 O-xz、O-yz 坐标面的主椭圆上.

双曲面的基本性质

例子 22.1 (单叶双曲面). 在直角坐标系下, 由方程

$$\Sigma_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \Sigma_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

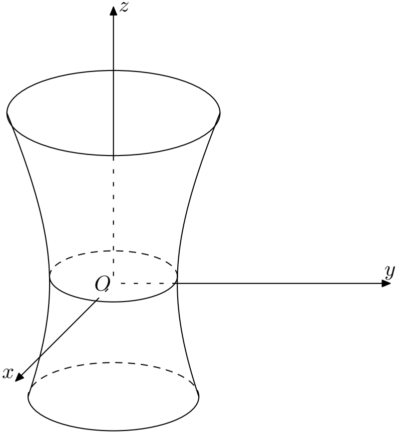
决定的图形分别叫做单叶双曲面、双叶双曲面, 其中 a, b, c 是任意正常数. 单叶双曲面和双叶双曲面统称为双曲面.

双曲面具有如下基本性质: 由于当 $P(x, y, z)$ 在双曲面上时, $P'(\pm x, \pm y, \pm z)$ 也在双曲面上, 故

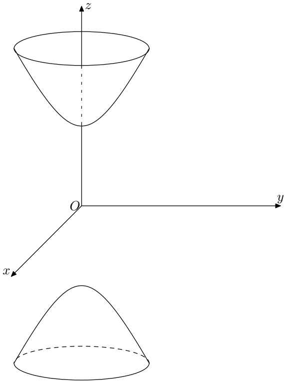
- 双曲面关于三个坐标面、三个坐标轴、坐标原点都对称;
- 单叶双曲面的旋转轴 (z-轴) 是虚轴, 从而不相交; 它与 x、y-轴分别交于点 $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, 这四个点称为顶点;
- 双叶双曲面的旋转轴 (z-轴) 是实轴, 其上有两个交点 $(0, 0, \pm c)$, 它们称为顶点; 双叶双曲面与 x、y 轴都不相交;

双曲面的基本性质 (续)

- 双叶双曲面上的点 $P(x, y, z)$ 必满足 $z^2 \geq c^2$, 从而曲面分成 $z \geq c$ 和 $z \leq c$ 的两叶;
- Σ_1 中若 $a = b$, 则得到一个单叶旋转双曲面; Σ_2 中若 $a = b$, 则得到一个双叶旋转双曲面.



(a) 单叶双曲面



(b) 双叶双曲面

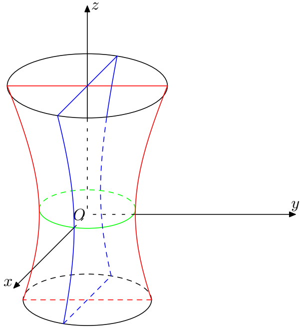
平面与双曲面的交线

下面, 我们用平行截割法来研究双曲面. 对单叶双曲面, 若用三个坐标面 O-xy、O-xz、O-yz 分别截割曲面 Σ_1, 我们得到如下三条曲线

$$\Gamma_1:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0,\end{cases}\qquad \Gamma_2:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0,\end{cases}\qquad \Gamma_3:\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0.\end{cases}$$

明显地, Γ_1 为 O-xy 平面上的椭圆, 称为单叶双曲面的腰椭圆; Γ_2、Γ_3 都是双曲线, 而且它们的虚轴都是 z-轴且虚轴长一样.

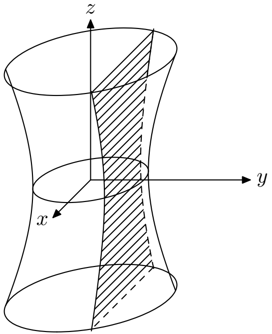
- 当我们用一组平行平面 $z=h$, h 为任意实数, 来截割单叶双曲面 Σ_1, 我们得到一簇椭圆 $\Gamma_h:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h,\end{cases}$ 它的两个半轴分别是 $a\sqrt{1+h^2/c^2}$、$b\sqrt{1+h^2/c^2}$. 对应的两对端点分别是 $(\pm a\sqrt{1+h^2/c^2},0,h)$, $(0,\pm b\sqrt{1+h^2/c^2},h)$, 它们分别在双曲线 Γ_2,Γ_3 上.

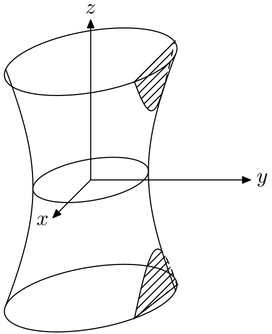


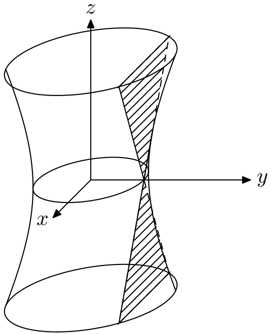
平面与双曲面的交线 (续)

- 如果用平行于 O-xz 面的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面 Σ_1, 得到截线方程为 $\Gamma_h': \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2} \\ y=h, \end{cases}$, 它又可根据 $1-h^2/b^2$ 的符号, 细分为如下三种情况:
  1. 当 $|h|<b$ 时, Γ_h' 为双曲线, 其实轴平行于 x-轴 (为截面 $y=h$ 与 O-xy 平面的交线)、实半轴长为 $a\sqrt{1-h^2/b^2}$; 虚轴平行于 z-轴 (为截面 $y=h$ 与 O-yz 平面的交线)、虚半轴长为 $b\sqrt{1-h^2/b^2}$. 而且 Γ_h' 的顶点 $(\pm a\sqrt{1-h^2/b^2}, h, 0)$ 在腰椭圆 Γ_1 上.
  2. 当 $|h|>b$ 时, Γ_h' 也是双曲线, 其实轴平行于 z-轴、实半轴长为 $c\sqrt{h^2/b^2-1}$; 虚轴平行于 x-轴、虚半轴长为 $a\sqrt{h^2/b^2-1}$. 而且 Γ_h' 的顶点 $(0,h,\pm c\sqrt{h^2/b^2-1})$ 在双曲线 Γ_3 上.
  3. 当 $|h|=b$ 时, Γ_h' 的方程为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=0 \\ y=h, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=0 \\ y=-h, \end{cases}$ 它们分别是两条直线 $\begin{cases} \dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0 \\ y=b \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0 \\ y=-b. \end{cases}$ 如果 $h=b$ 则两直线交于 $(0,b,0)$; 如果 $h=-b$, 则两直线交于 $(0,-b,0)$.

平面与双曲面的交线 (续)







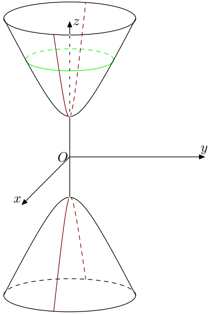
平面与双曲面的交线 (续)

对双叶双曲面, 若用三个坐标面 O-xy、O-xz、O-yz 分别截割曲面 Σ_2, 我们知道 O-xy 与 Σ_2 不相交; 而另两个坐标面分别得到

$$\Gamma_2 : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \\ y = 0, \end{cases} \qquad \Gamma_3 : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = 0. \end{cases}$$

明显地, 它们都是双曲线, 实轴都为 z 轴且实半轴长都为 c.

- 当我们用一组平行平面 $z = h$, $h \geq c$, 来截割双叶双曲面 Σ_2, 我们得到一簇椭圆 $\Gamma_h : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h. \end{cases}$
  当 $|h| = c$ 时, 截得的图形为一个点; 当 $|h| > c$ 时, 截的的图形为椭圆, 它的两个半轴分别是 $a\sqrt{h^2/c^2 - 1}$ 与 $b\sqrt{h^2/c^2 - 1}$. 对应的两对端点分别是 $(\pm a\sqrt{h^2/c^1 - 1}, 0, h)$ 和 $(0, \pm b\sqrt{h^2/c^2 - 1})$, 它们分别在 Γ_2, Γ_3 上.



平面与双曲面的交线 (续)

- 当我们用一组平行平面 $y=h$, h 为任意实数, 来截割双叶双曲面 Σ_2, 我们得到一簇双曲线 $\Gamma'_h:\begin{cases}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{h^2}{b^2}\\ y=h.\end{cases}$ 它们当实轴平行于 z 轴, 实半轴长为 $c\sqrt{1+h^2/b^2}$; 虚轴平行于 x 轴, 虚半轴长为 $a\sqrt{1+h^2/b^2}$; 而且它们当顶点 $(0,h,\pm c\sqrt{1+h^2/b^2})$ 在双曲线 Γ_3 上.

椭圆抛物面与双曲抛物面的基本性质

定义 22.2. 在直角坐标系下, 分别由方程

$$\Sigma_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad \Sigma_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

其中 a, b 为任意常数, 决定的曲面叫做椭圆抛物面和双曲抛物面, 它们统称为抛物面. 上述方程称为标准方程.

椭圆抛物面和双曲抛物面具有如下基本性质: 由于当 $P(x, y, z)$ 在抛物面上时, $P'(\pm x, \pm y, z)$ 也在抛物面上, 故

- 抛物面关于 O-yz、O-xz 坐标面、z 轴对称; 它没有对称中心;
- 抛物面与对称轴 (z 轴: $x = 0 = y$) 交于点 $(0, 0, 0)$, 该点称为抛物面的顶点;
- 椭圆抛物面满足 $z \geq 0$, 因此位于 O-xy 平面的上方; 双曲抛物面在 O-xy 平面的两侧都有图形;

平面与抛物面的交线

下面, 我们用平行截割法来研究抛物面. 对椭圆抛物面,

- 用坐标面 O-xz、O-yz 来截椭圆抛物面 Σ_1, 我们分别得到

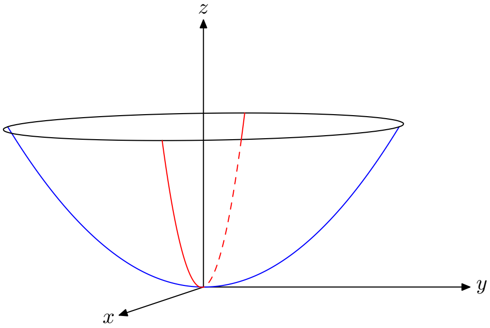
$$\Gamma_1 : \begin{cases} x^2 = 2a^2 z \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{和} \quad \Gamma_2 : \begin{cases} y^2 = 2b^2 z \\ x = 0. \end{cases}$$

  它们表示的都是坐标平面上的抛物线, 称为椭圆抛物面 Σ_1 的主抛物线, 它们所在的平面互相垂直且有着共同的顶点 (原点) 和轴 (z 轴) 以及相同的开口 (与 z 轴正向一致).

- 用平行于 O-xy 的平面 $z = h > 0$ 来截椭圆抛物面 Σ_1, 我们得到一簇椭圆 $\Gamma_h : \begin{cases} \frac{x^2}{2ha^2} + \frac{y^2}{2hb^2} = 1 \\ z = h, \end{cases}$, 它们的两对顶点分别为 $(\pm a\sqrt{2h}, 0, h)$、$(0, \pm b\sqrt{2h}, h)$, 它们分别在主抛物线 Γ_1、Γ_2 上. 因此, 椭圆抛物面可以看作是这簇椭圆在两条主抛物线上滑动而成; 用坐标平面 $z = 0$ 去割椭圆抛物面得到一个点, 它就是顶点;
  特别地, 若 $a = b$, 则 Σ_1 的方程变为 $x^2 + y^2 = 2a^2 z$, 它的与平面 $z = h > 0$ 的割线为圆, 此时 Σ_1 是旋转抛物面;

平面与抛物面的交线 (续)

- 如果我们用平行于 $O\text{-}xz$ 坐标面的平面 $y=h$, h 为任意实数, 来截椭圆抛物面 Σ_1, 得到一簇抛物线 Γ_h' : $\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z - \frac{h^2}{2b^2}\right) \\ y = h. \end{cases}$ 它们与主抛物线 Γ_1 具有相同的焦参数 a^2, 从而是全等的. 它可视为将 Γ_1 平行移动, 使得 Γ_1 的顶点 $(0,0,0)$ 移动到 $(0,h,h^2/(2b^2))$.
- 注意到 Γ_h' 的顶点在主抛物线 Γ_2 上, 故我们可将 Σ_1 视为把 Γ_1 沿着 Γ_2 平行移动, 使得 Γ_1 的顶点在 Γ_2 上滑动, 而得到的曲面.



平面与抛物面的交线 (续)

对双曲抛物面,

- 用坐标面 O-xz、O-yz 来截椭圆抛物面 Σ_1, 我们分别得到

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x^2 = 2a^2 z \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{和} \quad \Gamma_2 : \begin{cases} y^2 = -2b^2 z \\ x = 0. \end{cases}$$

  它们表示的都是坐标平面上的抛物线, 称为双曲抛物面 Σ_2 的主抛物线, 它们所在的平面互相垂直且有着共同的顶点 (原点) 和轴 (z 轴) 以及相反的开口 (Γ_1 与 z 轴正向一致、Γ_2 与 z 轴正向相反).

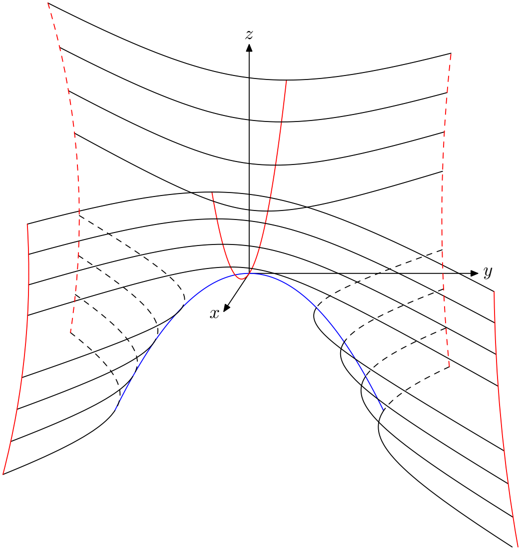
- 坐标平面 $z = 0$ 割双曲抛物面得到 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0, \end{cases}$ 它刻画了 O-xy 坐标面上两条相交与原点的直线 $\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0. \end{cases}$

平面与抛物面的交线 (续)

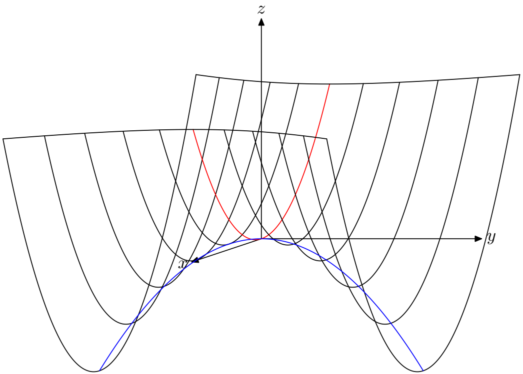
- 若用坐标平面 $z = h, h \neq 0$, 来截割双曲抛物面 Σ_2, 得到截线为双曲线
$\Gamma_h : \begin{cases} \frac{x^2}{2ha^2} - \frac{y^2}{2hb^2} = 1 \\ z = h, \end{cases}$ 根据 h 的符号, 可细分为如下两种情形:
  - 当 $h > 0$ 时, 它们的实轴与 x 轴平行, 实半轴长为 $a\sqrt{2h}$; 虚轴平行于 y 轴, 虚半轴长为 $b\sqrt{2h}$; 顶点为 $(\pm a\sqrt{2h}, 0, h)$, 它们都在主抛物线 Γ_1 上;
  - 当 $h < 0$ 时, 它们的实轴与 y 轴平行, 实半轴长为 $b\sqrt{-2h}$; 虚轴平行于 x 轴, 虚半轴长为 $a\sqrt{-2h}$; 顶点为 $(0, \pm b\sqrt{-2h}, h)$, 它们都在主抛物线 Γ_2 上;

因此, 曲面 Σ_2 被 O-xy 平面分成上下两部分, 上半部分沿着 x 轴的两个方向上升; 下半部分沿着 y 轴的两个方向下降; 曲面的大体形状像一个马鞍, 故双曲抛物面也称为马鞍面.

平面与抛物面的交线 (续)



(a) 双曲抛物面: $z = h$



(b) 双曲抛物面: $y = h$

平面与抛物面的交线 (续)

- 如果我们用平行于 $O\text{-}xz$ 坐标面的平面 $y=h$, h 为任意实数, 来截双曲抛物面 Σ_2, 得到一簇抛物线 Γ_h' : $\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z+\frac{h^2}{2b^2}\right) \\ y=h. \end{cases}$ 由于这簇抛物线具有相同的焦参数 a^2, 我们知道它们和主抛物线 Γ_1 全等; 它可视为将 Γ_1 平行移动, 使得 Γ_1 的顶点 $(0,0,0)$ 移动到 $(0,h,-h^2/(2b^2))$.
- 注意到 Γ_h' 的顶点在主抛物线 Γ_2 上, 故我们可将 Σ_2 视为把 Γ_1 沿着 Γ_2 平行移动, 使得 Γ_1 的顶点在 Γ_2 上滑动, 而得到的曲面.

注记. 由此可见,

- 椭圆抛物面和双曲抛物面都可视为两条具有相同主轴且所在平面互相垂直的抛物线, 将其中一条的顶点沿着另一条抛物线作平行滑动而得的曲面;
- 椭圆抛物面和双曲抛物面统称为抛物面, 它们都没有对称中心, 所以又叫做无心二次曲面.

单叶双曲面是直纹面

除了前面看到的, 柱面、锥面是直纹面, 我们将证明另外两种直纹面: 单叶双曲面与双曲抛物面.
注意到, 单叶双曲面 Σ 的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \implies \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

其中 a, b, c 为正常数, 故

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

因此, 我们有

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right):\left(1+\frac{y}{b}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right):\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\triangleq u:w.$$

单叶双曲面是直纹面 (续)

这里, $a:b=c:d$ 定义为 $ad=bc$. 当 u,w 不同时为零时, 上述比例式有意义. 从定义我们知道上式等价于

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right). \end{cases}$$

由于 u,w 不全为零, 上述方程表示一条直线 l(这是因为, 其方向向量为 $(w/a,-u/b,w/c)\wedge(u/a,w/b,-u/c)=\frac{1}{abc}\left(a(u^2-w^2),2buw,c(u^2+w^2)\right)\neq 0$.

命题 23.1. 直线簇中任意一条直线都在单叶双曲面上; 反过来, 单叶双曲面上任意一点通过直线簇中某一条直线. 特别地, 单叶双曲面是直纹面.

单叶双曲面是直纹面 (续)

- 直线 l 上任意一点都在单叶双曲面 Σ 上. 这是因为, 将直线方程两端对应相乘, 得到

$$uw\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)=uw\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

若 $uw\neq 0$, 则得到 l 上的点 (x,y,z) 满足 Σ 的方程; 若 u,w 有且仅有一个为零, 不妨设 $u=0, w\neq 0$, 则 l 上的点满足 $\begin{cases}1-\frac{y}{b}=0\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0.\end{cases}$ 明显, 它仍然满足 Σ 的方程.

- 单叶双曲面上任意一点都在某 u,w 参数决定的直线簇中一直线 l 上. 事实上, 假设 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$, 则

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1 \implies \left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right):\left(1+\frac{y_0}{b}\right)=\left(1-\frac{y_0}{b}\right):\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)\triangleq u_0:w_0.$$

明显地, 点 P_0 满足 u_0,w_0 决定的直线簇中直线 l 的方程 $\begin{cases}w_0\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u_0\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ u_0\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w_0\left(1-\frac{y}{b}\right).\end{cases}$

单叶双曲面是直纹面 (续)

完全类似地, 我们也可通过将 Σ 的方程改写为

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right):\left(1-\frac{y}{b}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right):\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\triangleq v:t.$$

其中 u, v 不全为零, 它也表示一簇直线

$$\begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right). \end{cases}$$

稍后, 我们将证明这是一不同的直线簇. 有时, 为了区分将该簇直线称为 v 簇直母线、将前一簇直线称为 u 簇直母线.

双曲抛物面是直纹面

完全类似单叶双曲面的讨论, 我们也可以证明双曲抛物面是直纹面.
将双曲抛物面的方程改写为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \implies \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z,$$

故

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right):2=z:\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=u,\quad \text{或} \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right):2=z:\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=v,$$

即

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2u\\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z,\end{cases}\qquad \text{或} \begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2v\\ v\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z.\end{cases}$$

通过检验其法向量, 容易知道它们表示的都是直线, 分别称为u 直线簇和v 直线簇.
类似单叶双曲面的情形, 容易证明, u 直线簇和 v 直线簇都满足如下基本性质:

命题 23.2. *u 直线簇和 v 直线簇都在双曲抛物面上; 双曲抛物面上任意一点都通过 u 直线簇中某一条直线、也通过 v 直线簇上某一条直线. 特别地, 双曲抛物面是直纹面.*

单叶双曲面和双曲抛物面的性质

前面, 我们证明了单叶双曲面和双曲抛物面都是直纹面. 接下来, 我们将证明构成直纹面的两直线簇具有的共同性质.

定理 23.3. 异簇的两直母线必共面且不同. 而且, 双曲抛物面上异簇的任意两直母线必相交.

单叶双曲面和双曲抛物面的性质 (续)

证明. 注意到, 根据例 16.3, 我们知道两直线共面当且仅当两直线的系数行列式为零. 对单叶双曲面, 其异簇两直线的系数行列式为

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{w}{a} & -\frac{u}{b} & \frac{w}{c} & -u \\ \frac{u}{a} & \frac{w}{b} & -\frac{u}{c} & -w \\ \frac{t}{a} & \frac{v}{b} & \frac{t}{c} & -v \\ \frac{v}{a} & -\frac{t}{b} & -\frac{v}{c} & -t \end{vmatrix} &= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} w & -u & w & -u \\ u & w & -u & -w \\ t & v & t & -v \\ v & -t & -v & -t \end{vmatrix} = \frac{4}{abc}\begin{vmatrix} w & -u & w & -u \\ u & w & 0 & 0 \\ t & v & t & 0 \\ v & -t & 0 & -t \end{vmatrix} \\
&= \frac{4}{abc}\begin{vmatrix} 0 & 0 & w & -u \\ u & w & 0 & 0 \\ 0 & v & t & 0 \\ v & 0 & 0 & -t \end{vmatrix} = \frac{4}{abc}\left(-u\begin{vmatrix} 0 & w & -u \\ v & t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{vmatrix} - v\begin{vmatrix} 0 & w & -u \\ w & 0 & 0 \\ v & t & 0 \end{vmatrix}\right) \\
&= \frac{4}{abc}\left(-u(-t)(-wv) - v(-u)(wt)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

单叶双曲面和双曲抛物面的性质 (续)

对双曲抛物面, 其异簇两直线的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u \\ \frac{u}{a} & -\frac{u}{b} & -1 & 0 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 & -2v \\ \frac{v}{a} & \frac{v}{b} & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{ab}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -u \\ u & -u & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -v \\ v & v & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{ab}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -u \\ u & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -v \\ v & v & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4}{ab}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -u \\ u & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & v & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{ab}\left(-1\begin{vmatrix} u & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -v \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} - u\begin{vmatrix} u & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \frac{4}{ab}\left(-v(-u) - u(-1)(v)\right) = 0.$$

单叶双曲面和双曲抛物面的性质 (续)

为了考察异簇两直线的位置关系 (相交、平行、重合), 我们首先计算其方向向量. 容易知道, 对单叶双曲面, 其 u、v 簇直线的方向向量分别为

$$\vec{u} = (w/a, -u/b, w/c) \wedge (u/a, w/b, -u/c) = \frac{1}{abc}\left(a(u^2 - w^2), 2buw, c(u^2 + w^2)\right)$$
$$\vec{v} = (t/a, v/b, t/c) \wedge (v/a, -t/b, -v/c) = -\frac{1}{abc}\left(a(v^2 - t^2), -2bvt, c(v^2 + t^2)\right).$$

因此, $\vec{u}, \vec{v}$ 平行当且仅当

$$\frac{u^2 - w^2}{v^2 - t^2} = \frac{uw}{-vt} = \frac{u^2 + w^2}{v^2 + t^2} = \lambda^2 > 0 \implies \frac{u^2}{v^2} = \frac{uw}{-vt} = \frac{w^2}{t^2} = \lambda^2 > 0 \implies \left(\frac{u}{v} + \frac{w}{t}\right)^2 = 0,$$

故 $\frac{u}{v} = -\frac{w}{t}$, 即 $u : w = -v : t$. 现在, 容易验证腰椭圆上的点 $A(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ 和 $B(a\cos\varphi, b\sin\varphi, 0)$ 分别在 u 簇、v 簇直母线上. 事实上, 将它们分别代入到直线方程, 得到

$$\begin{cases} w\cos\theta = u(1 + \sin\theta) \\ u\cos\theta = w(1 - \sin\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} w\cos\theta - u\sin\theta = u \\ u\cos\theta + w\sin\theta = w \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{2uw}{u^2+w^2} \\ \sin\theta = \frac{w^2-u^2}{u^2+w^2}, \end{cases}$$

单叶双曲面和双曲抛物面的性质 (续)

以及

$$\begin{cases} t\cos\varphi = v(1-\sin\varphi) \\ v\cos\varphi = t(1+\sin\varphi) \end{cases} \iff \begin{cases} t\cos\varphi + v\sin\varphi = v \\ v\cos\varphi - t\sin\varphi = t \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\varphi = \frac{-2vt}{-(t^2+v^2)} = \frac{2vt}{v^2+t^2} \\ \sin\varphi = \frac{t^2-v^2}{-(t^2+v^2)} = \frac{v^2-t^2}{v^2+t^2}. \end{cases}$$

因此

$$\overrightarrow{AB} = \left(a\left(\cos\varphi - \cos\theta\right), b\left(\sin\varphi - \sin\theta\right), 0\right),$$

此外, 将上述关系代入到异簇直线, 得到它们到方向向量分别为

$$\vec{u} = \frac{u^2+w^2}{abc}\left(-a\sin\theta, b\cos\theta, c\right), \quad \vec{v} = -\frac{v^2+t^2}{abc}\left(a\sin\varphi, -b\cos\varphi, c\right),$$

因此, 由于 $c \neq 0$, 我们知道 $\vec{u}, \overrightarrow{AB}$ 是线性无关的, 从而这两簇直线不可能重合.

单叶双曲面和双曲抛物面的性质 (续)

注记. 事实上,

- 我们也可以通过直接计算 $(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})=0$ 来证明两来自异簇的直线共面.
- 当两直线平行时,我们得到 $u:w=-v:t=\lambda$, 故 $\cos\theta=\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$, $\sin\theta=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$; $\cos\varphi=-\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$, $\sin\varphi=-\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$. 因此

$$\cos\theta=-\cos\varphi,\qquad \sin\theta=-\sin\varphi.$$

利用和差化积公式,得到

$$\begin{cases} 2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=0, \\ 2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=0 \end{cases} \Longrightarrow \cos\frac{\theta-\varphi}{2}=0 \iff \frac{\theta-\varphi}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

因此 $\theta=\varphi+(2k+1)\pi$. 即当且仅当 A,B 是腰椭圆的对径点时,异簇直母线平行.

单叶双曲面和双曲抛物面的性质 (续)

对双曲抛物面, 为了考虑异簇直线的位置关系, 容易验证 u、v 簇直母线分别通过 $A(au, bu, 0)$、$B(av, -bv, 0)$, 它们的方向向量分别为

$$\vec{u} = (1/a, 1/b, 0) \wedge (u/a, -u/b, -1) = \frac{1}{ab}(-a, b, -2u)$$
$$\vec{v} = (1/a, -1/b, 0) \wedge (v/a, v/b, -1) = \frac{1}{ab}(a, b, 2v)$$

由于 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\frac{2}{a^2b^2}(-b(u+v), a(u-v), ab) \neq 0$, 而且我们已经证明两异簇直线共面, 故两异簇直线必相交.

注记. 对双曲抛物面, 容易知道

$$\overrightarrow{AB} = (a(v-u), -b(v+u), 0) = -\left(a(u-v), b(u+v), 0\right),$$

也可通过验证 $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 0$ 得到两异簇直线必共面.

□

单叶双曲面和双曲抛物面的性质 (续)

定理 23.4. 单叶双曲面和双曲抛物面上两同簇直母线必异面. 而且, 双曲抛物面上同簇的全体直母线平行于同一个平面.

证明. 对单叶双曲面上 u 簇的两直母线, 假设它们分别过腰椭圆上 $A_1(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1, 0)$, $A_2(a\cos\theta_2, b\sin\theta_2, 0)$, 方向向量可分别取为

$$\vec{u}_1 = (-a\sin\theta_1, b\cos\theta_1, c), \quad \vec{u}_2 = (-a\sin\theta_2, b\cos\theta_2, c).$$

由于 $\overrightarrow{A_1A_2} = (a(\cos\theta_2 - \cos\theta_1), b(\sin\theta_2 - \sin\theta_1), 0)$, 故直接计算得到

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} -a\sin\theta_1 & b\cos\theta_1 & c \\ -a\sin\theta_2 & b\cos\theta_2 & c \\ a(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) & b(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= ab\begin{vmatrix} -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & c \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & c \\ \cos\theta_2 - \cos\theta_1 & \sin\theta_2 - \sin\theta_1 & 0 \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} \sin\theta_2 - \sin\theta_1 & -(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & c \\ \cos\theta_2 - \cos\theta_1 & \sin\theta_2 - \sin\theta_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -abc\left((\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 + (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2\right) \geq 0,$$

单叶双曲面和双曲抛物面的性质 (续)

而且上式等于零当且仅当 $\sin\theta_2 = \sin\theta_1, \quad \cos\theta_2 = \cos\theta_1$, 即 A_1, A_2 重合. 从而, u 簇两直母线必是异面的.
完全类似地, 对 v 簇两直母线, 不妨设它们分别通过腰椭圆上 $B_1(a\cos\varphi_1, b\sin\varphi_1, 0)$、$B_2(a\cos\varphi_2, b\sin\varphi_2, 0)$, 其方向向量可分别取为

$$\vec{v}_1 = (a\sin\varphi_1, -b\cos\varphi_1, c), \quad \vec{v}_2 = (a\sin\varphi_2, -b\cos\varphi_2, c).$$

而 $\overrightarrow{B_1B_2} = (a(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1), b(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1), 0)$, 故

$$\begin{aligned}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{B_1B_2}) &= \begin{vmatrix} a\sin\varphi_1 & -b\cos\varphi_1 & c \\ a\sin\varphi_2 & -b\cos\varphi_2 & c \\ a(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1) & b(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) & 0 \end{vmatrix} \\ &= abc\left((\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2 + (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)^2\right) \geq 0,\end{aligned}$$

而且等于零当且仅当 $\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1, \cos\varphi_2 = \cos\varphi_1$, 即当且仅当 B_1, B_2 重合. 从而, v 簇两直母线必是异面的. 综上, 我们就证明了对单叶双曲面, 同簇的两直母线必异面.

单叶双曲面和双曲抛物面的性质 (续)

类似地, 对双曲抛物面上两 u 簇直母线, 假设它们分别过 $A_1(au_1, bu_1, 0)$, $A_2(au_2, bu_2, 0)$, 它们的方向向量可分别取为

$$\vec{u}_1 = (-a, b, -2u_1), \quad \vec{u}_2 = (-a, b, -2u_2),$$

故 $\overrightarrow{A_1A_2} = (a(u_2 - u_1), b(u_2 - u_1), 0)$, 以及

$$\begin{aligned}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) &= \begin{vmatrix} -a & b & -2u_1 \\ -a & b & -2u_2 \\ a(u_2-u_1) & b(u_2-u_1) & 0 \end{vmatrix} = 2ab \begin{vmatrix} -1 & 1 & -u_1 \\ -1 & 1 & -u_2 \\ u_2-u_1 & u_2-u_1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2ab(u_2-u_1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & -u_1 \\ -1 & 1 & -u_2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4ab(u_2-u_1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -u_1 \\ 0 & 1 & -u_2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 4ab(u_2-u_1)(u_2+u_1) = 4ab(u_2^2 - u_1^2),\end{aligned}$$

由此可见, 上式等于零当且仅当 $u_1 = u_2$, 即 A_1, A_2 重合. 从而 u 簇两直母线必异面.

单叶双曲面和双曲抛物面的性质 (续)

类似地, 对 v 簇两直母线, 我们假设它们分别通过 $B_1(av_1, -bv_1, 0)$、$B_2(av_2, -bv_2, 0)$, 而且它们的方向向量可分别取为

$$\vec{v}_1 = (a, b, 2v_1), \quad \vec{v}_2 = (a, b, 2v_2),$$

由于 $\overrightarrow{B_1B_2} = (a(v_2 - v_1), -b(v_2 - v_1), 0)$, 故

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{B_1B_2}) = \begin{vmatrix} a & b & 2v_1 \\ a & b & 2v_2 \\ a(v_2 - v_1) & -b(v_2 - v_1) & 0 \end{vmatrix} = 2ab(v_2 - v_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & v_1 \\ 1 & 1 & v_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4ab(v_2 - v_1)^2,$$

因此上式等于零当且仅当 $v_1 = v_2$, 即当且仅当 B_1, B_2 重合. 故 v 簇两直线也异面. 综上, 对双曲抛物面同簇两直母线也是异面的.

最后, 我们来证明对双曲抛物面, 同簇的直母线都平行于同一个平面. 事实上, 直接计算 u 簇任意两直母线所构成的平行平面的法向量为

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = -2(u_2 - u_1)(b, a, 0),$$

单叶双曲面和双曲抛物面的性质 (续)

从而 u 簇直母线与非零常向量 $(b,a,0)$ 垂直, 故它们都平行于同一个平面.
完全类似地, 对 v 簇任意两直母线的平行平面, 其法向量为

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 2(v_2 - v_1)\,(b,-a,0)\,,$$

从而 v 簇直母线与非零常向量 $(b,-a,0)$ 垂直, 故它们都平行于同一个平面. □

课后习题

1. P100: 2, 3; P101: 6, 8(1), 9;
2. P103: 2, 3; P104: 4;
3. P108: 1 (3), (4); 2;
4. P111: 2, 3, 4, 6;
5. P115: 2, 4, 5;
6. P119: 1; P120: 2;
7. P124:3; P125: 5, 8, 9, 10;

第五章 · 二次曲线的一般理论

- 二次曲线与直线的位置关系
- 二次曲线的切线
- 二次曲线的渐近方向、中心、渐近线
- 二次曲线的直径
- 二次曲线的主直径与主方向
- 二次曲线方程的化简
- 二次曲线的不变量系统
- 课后习题

复平面与复元素

接下来, 我们将讨论一般的二元二次方程

$$\Gamma : F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

它等价于如下的二次型形式:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 是一个对称矩阵, 即 $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$. 称它为二次曲线$\Gamma$ 的系数矩阵.

复平面与复元素 (续)

我们首先将通过研究曲线 Γ 与平面上直线 l 的交点情况. 这会涉及二次方程解的问题, 其解可能是复数. 因此, 我们需要将实平面扩充成复平面.
首先, 在平面上建立仿射坐标系.

- 我们称有序复数对 (x, y) 是扩充复平面上的一个点, 当 x, y 都为实数时, 称为实点; 否则称为虚点;
  若两个虚点对应的坐标都是共轭复数, 即 $(x_1, y_1) = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$, 则称它们互为共轭虚点;
  实点和虚点统称为复点.
- 定义复向量 $\vec{v} = \{v_1, v_2\}$, 其中 v_1, v_2 都是复数. 特别地, 若 v_1, v_2 都是实数, 则称为实向量; 否则称为虚向量.

复平面与复元素 (续)

- 由于直线的方程是用共线向量来刻画的, 因此复直线和实直线具有相同的形式, 只是系数变为复数. 例如, 过两复点 $M_1(x_1, y_1)$、$M_2(x_2, y_2)$ 的复直线的参数为

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t. \end{cases}$$

通过消去参数 t, 得到复直线的一般方程

$$Ax + By + C = 0, \quad A = y_2 - y_1, \, B = (-(x_2 - x_1), \, C = (y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1).$$

明显, 若 $A : B : C = l : m : n$, 其中 l, m, n 为三个实数, 则为实直线;
容易知道, 共轭复点的中点是实点.

二次曲线与直线的交点

如前, 假设实二次曲线 Γ 的方程为 $F(x,y)=0$. 平面上的实直线 l 的参数方程为

$$l:\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=t,$$

即它是过 $M_0(x_0,y_0)$ 且方向向量为 $\{X,Y\}$ 的直线. 将其改写为向量形式, 得到

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} X & Y & 0 \end{pmatrix},$$

则 Γ 与 l 的交点满足如下方程 $\left(\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} X & Y & 0 \end{pmatrix}\right)A\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}\right)=0$, 展开得到

$$\begin{pmatrix} X & Y & 0 \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}t^2+2t\begin{pmatrix} X & Y & 0 \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}+F(x_0,y_0)=0.$$

二次曲线与直线的交点 (续)

若我们引入记号

$$\Phi(X,Y) \equiv \begin{pmatrix} X & Y & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2,$$

$$\begin{pmatrix} F_1(x_0,y_0) \\ F_2(x_0,y_0) \\ F_3(x_0,y_0) \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F_1(x_0,y_0) \equiv a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\bigg|_{(x,y)=(x_0,y_0)},$$

$$F_2(x_0,y_0) \equiv a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\bigg|_{(x,y)=(x_0,y_0)},$$

$$F_3(x_0,y_0) \equiv a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}.$$

二次曲线与直线的交点 (续)

则交点方程可化为

$$\Phi(X,Y)t^2+2\left(F_1(x_0,y_0)X+F_2(x_0,y_0)Y\right)t+F(x_0,y_0)=0. \tag{25.1}$$

下面分为如下几种情况来讨论交点:

- $\Phi(X,Y)\neq 0$. 此时, 交点方程化为关于 t 的一元二次方程, 其判别式为

$$\Delta=[F_1(x_0,y_0)X+F_2(x_0,y_0)Y]^2-\Phi(X,Y)F(x_0,y_0).$$

故

1. 若 $\Delta>0$, 则(25.1)有两个不相等的实根, 代入直线方程得到二次曲线与该直线的两个实交点;
2. 若 $\Delta=0$, 则(25.1)有两个相等的实根, 代入直线方程得到二次曲线与该直线的两个相互重合的实交点;
3. 若 $\Delta<0$, 则(25.1)有两个共轭虚根, 代入直线方程得到二次曲线与该直线的两个共轭的虚交点;

二次曲线与直线的交点 (续)

- $\Phi(X, Y) = 0$. 此时又可分为
  1. 若 $F_1(x_0, y_0)X + F_2(x_0, y_0)Y \neq 0$, 此时(25.1)化为一元一次方程, 它有唯一的一个实根, 代入直线方程得到二次曲线与该直线有唯一实交点;
  2. 若 $F_1(x_0, y_0)X + F_2(x_0, y_0)Y = 0$ 且 $F(x_0, y_0) = 0$, 则此时(25.1)化为一个恒等式, 从而直线上任意点 (可能为虚点) 都在二次曲线上.
  3. 若 $F_1(x_0, y_0)X + F_2(x_0, y_0)Y = 0$ 而 $F(x_0, y_0) \neq 0$, 则此时(25.1)化为一个矛盾的等式, 从而直线上与二次曲线无交点.

注记. 从前面的讨论知道,

- 直线或者是二次曲线的一部分; 或者与二次曲线至多有两个 (复) 交点;
- 直线与二次曲线有两个 (实或者虚) 交点的充要条件是 $\Phi(X, Y) \neq 0$.

定义 25.1. 若二次曲线 $F(x, y) = 0$ 与直线有两个重合的交点 (即(25.1)有重根), 则称 l 是该二次曲线的切线.

二次曲线的切线

回忆, 一直线称为二次曲线的切线当且仅当该直线与二次曲线有两个重合的交点. 该交点称为切点. 为了后面讨论的方便, 我们将一直线完全包含在二次曲线上时, 也称该直线为二次曲线的切线. 此时, 直线上每一点都可看作切点.

利用直线 $l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = t$ 与二次曲线 $F(x,y)=0$ 的交点方程(25.1),

$$\Phi(X,Y)t^2 + 2\left(F_1(x_0,y_0)X + F_2(x_0,y_0)Y\right)t + F(x_0,y_0) = 0.$$

我们得到直线 l 是切线的充要条件是:

- 若 $\Phi(X,Y)\neq 0$, 则此时有两个重合交点当且仅当

$$\left(F_1(x_0,y_0)X + F_2(x_0,y_0)Y\right)^2 - \Phi(X,Y)F(x_0,y_0) = 0. \tag{26.1}$$

- 若 $\Phi(X,Y)=0$, 则此时只能是直线包含在二次曲线上, 即

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0)X + F_2(x_0,y_0)Y = 0 \\ F(x_0,y_0) = 0. \end{cases} \tag{26.2}$$

二次曲线的切线 (续)

特别地, 若 (x_0, y_0) 就在二次曲线 $F(x, y) = 0$ 上, 即 $F(x_0, y_0) = 0$. 因此此时直线 $l : \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y}$ 与二次曲线相切的充要条件可以统一写成

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = 0 \\ F_1(x_0, y_0)X + F_2(x_0, y_0)Y = 0. \end{cases} \tag{26.3}$$

- 如果 $F_1(x_0, y_0)$、$F_2(x_0, y_0)$ 不全为零, 那么(26.3)可以改写成 $X : Y = (-F_2(x_0, y_0)) : F_1(x_0, y_0)$, 从而切线方程为

$$l : \frac{x - x_0}{-F_2(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_1(x_0, y_0)} \iff (x - x_0)F_1(x_0, y_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0) = 0. \tag{26.4}$$

- 如果 $F_1(x_0, y_0) = F_2(x_0, y_0) = 0$, 那么(26.3)对任意 (不全为零) 的 X, Y 都成立. 这时, 通过 (x_0, y_0) 的任意直线都是切线.

二次曲线的切线 (续)

定义 26.1. 称二次曲线 $F(x,y)=0$ 上满足 $\begin{cases} F(x_0,y_0)=0 \\ F_1(x_0,y_0)=0=F_2(x_0,y_0) \end{cases}$ 的点 (x_0,y_0) 为二次曲线的奇异点, 简称奇点; 二次曲线上的非奇异点称为正则点.

注记 (二次曲线上一点作为切点的切线方程). 如果将切线方程(26.4)改写称矩阵形式, 得到

$$\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \left(\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix}\right) A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

注意到 $F(x_0,y_0)=0$, 我们知道切点在二次曲线上的切线方程为

$$(x,y,1)A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{26.5}$$

二次曲线的切线 (续)

这样我们得到, 对二次曲线上的正则点, 它作为切点的切线方程为:

$$xF_1(x_0, y_0) + yF_2(x_0, y_0) + F_3(x_0, y_0) = 0. \tag{26.6}$$

将上述方程进一步展开, 我们得到

$$x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = 0.$$

我们可以将其改写为如下方便记忆的形式

$$a_{11}x_0x + a_{12}\left(x_0y + xy_0\right) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0. \tag{26.7}$$

上述记忆规律为分别将二次曲线 $F(x, y) = 0$ 中的项按照下表替换而得

x^2	$2x \cdot y$	y^2	$2x$	$2y$
$x \cdot x$	$x \cdot y + y \cdot x$	$y \cdot y$	$x + x$	$y + y$
xx_0	$x_0y + xy_0$	yy_0	$x + x_0$	$y + y_0$

一些例子

例子 26.1. 求二次曲线 $F(x,y)=x^2-xy+y^2+2x-4y-3=0$ 在点 $(2,1)$ 的切线方程.

解. 容易验证 $F(2,1)=0$, 故它在二次曲线上. 因此, 切线方程为

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=0 \iff \frac{5}{2}x-2y-3=0.$$

□

例子 26.2. 求二次曲线 $F(x,y)=x^2-xy+y^2-1=0$ 通过点 $P(0,2)$ 的切线.

解. 容易验证 $F(0,2)\neq 0$, 从而点 P 不在二次曲线上. 假设过点 P 的直线与二次曲线相切于 (x_0,y_0), 则切线方程为

$$xx_0-\frac{1}{2}(x_0y+xy_0)+yy_0-1=0.$$

一些例子 (续)

将 P 点坐标代入, 得到

$$-x_0 + 2y_0 - 1 = 0.$$

由于 $F(x_0, y_0) = 0$, 代入得到切点坐标 (x_0, y_0) 所满足的方程

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 - x_0 y_0 + y_0^2 - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

因此, 所求的切线方程 (两点式) 为:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-2} \quad \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1}, \Longrightarrow 2x - y + 2 = 0 \quad x + y - 2 = 0.$$

□

二次曲线的渐近方向

当二次曲线与直线在无穷远点相切,我们称该直线为二次曲线的渐近线. 该直线所在方向为二次曲线的渐近方向. 由于当 $t \to \infty$ 时, $\frac{1}{t} \to 0$, 故若将二次曲线与直线的交点方程中参数 t 替换为 $1/t$, 得到方程

$$F(x_0, y_0)t^2 + 2\left(F_1(x_0, y_0)X + F_2(x_0, y_0)Y\right)t + \Phi(X, Y) = 0. \tag{27.1}$$

可见, $t = 0$ 是它的二重根当且仅当 $\begin{cases} \Phi(X, Y) = 0, \\ F_1(x_0, y_0)X + F_2(x_0, y_0)Y = 0. \end{cases}$

定理 27.1. 从前面的讨论, 我们得到

- 对二次曲线 $\Gamma : F(x, y) = 0$, $X : Y$ 是它的渐近方向当且仅当 $\Phi(X, Y) = 0$.
- 点 (x_0, y_0) 在渐近方向为 $X : Y$ 的渐近线上, 当且仅当 $F_1(x_0, y_0)X + F_2(x_0, y_0)Y = 0$, 即

$$\begin{pmatrix} X & Y & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{27.2}$$

二次曲线的渐近方向 (续)

下面, 我们来进一步讨论渐近方向. 为了后面讨论的方便, 定义 $I_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 注意到 $\Phi(X,Y)=0$, 即 $a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2=0$, 由于二次曲线的系数 a_{11},a_{12},a_{22} 不全为零, 故

- 当 a_{11},a_{22} 不全为零时, 我们容易得到 $\Phi(X,Y)=0$ 是关于 $X:Y$ 或者 $Y:X$ 的一元二次方程. 其解可以通过判别式 $\Delta := 4(a_{12}^2-a_{11}a_{22}) = -4I_2$ 得到;
  1. 若 $I_2>0$, 则 $\Delta<0$, 故 $\Phi(X,Y)=0$ 有两个共轭复根, 即渐近方向为两共轭虚方向;
  2. 若 $I_2=0$, 则 $\Delta=0$, 故 $\Phi(X,Y)=0$ 有两个相同的实根, 即只有唯一一个渐近 (实) 方向:
  $$X:Y=-a_{12}:a_{11}=-a_{22}:a_{12}.$$
  3. 若 $I_2<0$, 则 $\Delta>0$, 故 $\Phi(X,Y)=0$ 有两个不同实根, 即有两个渐近方向:
  $$若\ a_{11}\neq 0,\ X:Y=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{-I_2}}{a_{11}};\ 或者若\ a_{22}\neq 0,\ Y:X=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{-I_2}}{a_{22}}.$$
- 当 $a_{11}=a_{22}=0$ 时, 必有 $a_{12}\neq 0$, 故 $X:Y=1:0$ 或者 $X:Y=0:1$, 而且 $I_2<0$.

二次曲线的渐近方向 (续)

二次曲线的渐近方向

总结起来, 我们发现

$$I_2\begin{cases} >0: & \text{一对共轭虚渐近方向;}\\ =0: & \text{唯一渐近 (且为实) 方向;}\\ <0: & \text{两个不同渐近实方向.}\end{cases}$$

由于, 当二次曲线分别为标准的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$、双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 和抛物线 $2py=x^2$ 时, 恰好对应着 $I_2>0$、$I_2<0$ 和 $I_2=0$ 的情形, 故我们得到下面的定义.

定义 27.2. 我们称 $I_2>0$、$I_2<0$、$I_2=0$ 的二次曲线分别为椭圆型、双曲型、抛物型的.

定理 27.3. 椭圆型二次曲线具有两个共轭虚渐近方向; 抛物型二次曲线具有唯一一个实渐近方向; 双曲型二次曲线具有两个不同实渐近方向.

二次曲线的中心

从对交点方程(25.1)的讨论我们知道, 当 $\Phi(X,Y)\neq 0$ 时, 交点方程有两个根 (两不同实根、两相同实根、两共轭虚根). 即, 对非渐近方向 $X:Y$, 知道 $l:\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}$ 与二次曲线 $F(x,y)=0$ 有两个交点. 我们称这两个交点作为端点决定的线段为二次曲线的一个弦.

定义 27.4. 二次曲线的对称中心简称中心, 它平分过它的所有弦.

现在, 假设中点坐标为 $M_c(x_c,y_c)$, 则过 M_c 的直线 l_c 的方程为 $\frac{x-x_c}{X}=\frac{y-y_c}{Y}=t$, 它与二次曲线 $F(x,y)=0$ 的交点满足

$$\Phi(X,Y)t^2+2\left(F_1(x_c,y_c)X+F_2(x_c,y_c)Y\right)t+F(x_c,y_c)=0.$$

由于 $\Phi(X,Y)\neq 0$, 上述方程有两个根 (可能为复数)t_1,t_2. 由中点坐标公式,

$$2(x_c,y_c)=(x_c+t_1X,y_c+t_1Y)+(x_c+t_2X,y_c+t_2Y)\iff(t_1+t_2)(X,Y)=0.$$

二次曲线的中心 (续)

由于非渐近方向为 $X:Y$, 故 $(X,Y)\neq 0$, 从而 $t_1+t_2=0$. 由此得到 $F_1(x_c,y_c)X+F_2(x_c,y_c)Y=0$. 由于非渐近方向 $X:Y$ 的任意性, 我们知道上述方程等价于

$$\begin{cases} F_1(x_c,y_c)=0 \\ F_2(x_c,y_c)=0. \end{cases} \tag{27.3}$$

(27.3)称为二次曲线的中心方程.

定理 27.5. 由中心 $M_c(x_c,y_c)$ 所满足的方程(27.3), 我们知道:

- 结合渐近线的方程(27.2), 我们知道有心二次曲线的渐近线必过中心. 因此, 渐近方向为 $X:Y$ 的渐近线可写为 $\frac{x-x_c}{X}=\frac{y-y_c}{Y}$;
- 结合直线与二次曲线的交点方程(25.1), 我们知道渐近线和二次曲线的交点方程变为 $F(x_c,y_c)=0$, 因此
    1. 若二次曲线的中心 M_c 不在二次曲线上, 即 $F(x_c,y_c)\neq 0$, 则渐近线与二次曲线无交点;
    2. 若二次曲线的中心 M_c 在二次曲线上, 即 $F(x_c,y_c)=0$, 则渐近线上所有点都在二次曲线上.

二次曲线的中心 (续)

容易知道(27.3)具体写出为 $\begin{cases} a_{11}x_c + a_{12}y_c + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_c + a_{22}y_c + a_{23} = 0. \end{cases}$ 由线性方程组解的基本理论知:

- 当 $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时, (27.3)有唯一 (实) 解; 即二次曲线有唯一中心, 此时称为中心二次曲线; 注意到, $AA^* = |A|E$, 即 $\sum_k a_{ik}A^*_{kj} = |A|\delta_{ij}$. 故

$$(x_c, y_c) = (A^*_{13}/A^*_{33}, A^*_{23}/A^*_{33}) = \frac{1}{I_2}(A^*_{13}, A^*_{23}).$$

- 当 $I_2 = 0$ 时, 即 $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$ 时.
  1. 若 $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$, 则(27.3)无解; 即二次曲线没有中心, 此时称为无心二次曲线;
  2. 若 $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$, 则(27.3)有无穷多解; 即 $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$ 这条直线上任意点都是二次曲线的中心. 该直线叫做二次曲线的中心直线. 此时称为线心二次曲线.

  无心二次曲线与线心二次曲线统称为非中心二次曲线. 明显地, 中心二次曲线和非中心二次曲线分别对应着 $I_2 \neq 0$ 和 $I_2 = 0$.

二次曲线的中心 (续)

注记. 椭圆型和双曲型二次曲线都是中心二次曲线; 抛物型二次曲线是非中心二次曲线. 它们的渐近线情况如下:

- 椭圆型二次曲线有唯一中心, 但其渐近方向为两共轭虚方向, 故其渐近线为两共轭虚直线;
- 双曲型二次曲线有唯一中心, 其渐近方向为两不同实方向, 故其渐近线为两实直线;
- 抛物型二次曲线分为无心二次曲线和线心二次曲线, 它们都有唯一实渐近方向.

  无心二次曲线没有渐近线; 因为此时渐近方向为 $X:Y=-a_{12}:a_{11}=-a_{22}:a_{12}$, 从而渐近线方程变为 $a_{13}X+a_{23}Y=0$, 即 $X:Y=-a_{23}:a_{13}$, 这与无心二次曲线矛盾.

  而线心二次曲线的中心是一条 (实) 直线, 该直线就是唯一的渐近线.
- 抛物线 $2py=x^2$ 是无心二次曲线. 其渐近方向为 $X:Y=0:1$; 因为 $p\neq 0$, 它没有渐近线.
- 容易证明线心二次曲线是两条平行实直线 (可能重合) 或两条平行虚直线. 此时, 渐近线即为到两平行直线距离相等的点构成的直线, 也即为中心直线.

一些例子

例子 27.1. 求二次曲线 $F(x,y)=2x^2+5xy+2y^2-6x-3y+5=0$ 的中心和渐近线.

解. 注意到系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5/2 & -3 \\ 5/2 & 2 & -3/2 \\ -3 & -3/2 & 5 \end{pmatrix}$, 故中心 (x_0,y_0) 所满足的方程为

$$\begin{cases} 2x_0+5/2y_0-3=0 \\ 5/2x_0+2y_0-3/2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0=\begin{vmatrix} 3 & 5/2 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 2 \end{vmatrix}=-1 \\ y_0=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5/2 & 3/2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 2 \end{vmatrix}=2. \end{cases}$$

渐近方向 $X:Y$ 满足 $\Phi(X,Y)=0$, 即

$$2X^2+5XY+2Y^2=0 \Longrightarrow (2X+Y)(X+2Y)=0 \Longleftrightarrow X:Y=1:-2 \text{ 或者} X:Y=2:-1.$$

一些例子 (续)

从而渐近线为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2} \text{ 或者 } \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}, \text{ 即} 2x+y=0 \text{ 或者} x+2y-3=0.$$

□

例子 27.2. 求二次曲线 $F(x,y)=4x^2-4xy+y^2+4x-2y=0$ 的中心和渐近线.

解. 注意到系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 因此, 中心 (x_0,y_0) 满足的方程为

$$\begin{cases} 4x_0-2y_0+2=0 \\ -2x_0+y_0-1=0 \end{cases} \implies 2x_0-y_0+1=0$$

可见, 直线 $l: 2x-y+1=0$ 上所有的点都是中心, 故该二次曲线为线心二次曲线. 线心二次曲线的渐近线就是中心直线 l. □

一些例子 (续)

注记. 关于上述例子, 我们有如下事实.

- 正如我们前面注意到的, 上述二次曲线是两平行直线.
  事实上, 可以分解为 (配方法): $4x^2-4x(y-1)+y^2-2y=0$,
  $$(2x-(y-1))^2=1 \iff (2x-(y-1)-1)(2x-(y-1)+1)=0,$$
  故此时二次曲线为两平行直线 $l_1: 2x-y=0 \quad l_2: 2x-y+2=0$. 明显, 中心直线 l 到 l_1, l_2 的距离相等.
- 我们也可按照前面关于渐近线的求法来求解渐近线.
  事实上, 渐近方向 $X:Y$ 满足 $\Phi(X,Y)=0$, 即 $4X^2-4XY+Y^2=0=(2X-Y)^2$, 得到 $X:Y=1:2$, 故所求渐近线为
  $$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{2} \implies 2x-y=2x_0-y_0,$$
  其中 (x_0,y_0) 是中心, 故满足 $2x_0-y_0=-1$, 从而得到渐近线为 $2x-y+1=0$.

二次曲线的直径

我们知道, 当 $X:Y$ 不是二次曲线的渐近方向时, 即 $\Phi(X,Y)\neq 0$ 时, 以 $X:Y$ 为方向的直线与二次曲线始终有两个交点 (实、共轭虚、重合). 假设这两个交点的中点为 (x_0,y_0), 则直线 $l:\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=t$ 与二次曲线 $F(x,y)=0$ 的交点方程为

$$\Phi(X,Y)t^2+2\left[F_1(x_0,y_0)X+F_2(x_0,y_0)Y\right]t+F(x_0,y_0)=0.$$

从而, 由 (x_0,y_0) 为弦的中点, 即 $2(x_0,y_0)=(x_0+Xt_1,y_0+Yt_1)+(x_0+Xt_2,y_0+Yt_2)$, 得到 $(t_1+t_2)(X,Y)=0$, 即 $t_1+t_2=0$. 故

$$F_1(x_0,y_0)X+F_2(x_0,y_0)Y=0.$$

这表明, 平行于 $X:Y$ 的弦的中点 (x_0,y_0) 满足方程

$$\begin{pmatrix}X & Y & 0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0\iff\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}X\\Y\\0\end{pmatrix}=0. \tag{28.1}$$

二次曲线的直径 (续)

它表示的是一条直线 l.

注记. 事实上, 展开得到

$$(a_{11}X+a_{12}Y)x+(a_{12}X+a_{22}Y)y+a_{13}X+a_{23}Y=0.$$

由于 $\Phi(X,Y)=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\neq 0$, 所以上述方程的一次项的系数 (法向量)$(a_{11}X+a_{12}Y, a_{12}X+a_{21}Y)^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\neq 0$. 从而表示直线.

反过来, 我们可以证明, 直线 l 上的一点 (x_0, y_0) 必定是具有方向 $X:Y$ 的某直线与二次曲线的两交点之中点.
事实上, 由于 $\Phi(X,Y)\neq 0$, 故直线 $\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=t$ 与二次曲线 $F(x,y)=0$ 有两个交点 (实、共轭虚、重合). 假设交点为 $(x,y)=(x_0+tX, y_0+tY)$, 则 t 满足的方程为

$$\Phi(X,Y)t^2+2\left[F_1(x_0,y_0)X+F_2(x_0,y_0)Y\right]t+F(x_0,y_0)=0.$$

二次曲线的直径 (续)

由于 (x_0, y_0) 在直线 l 上, 故

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} X & Y & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即

$$F_1(x_0, y_0)X + F_2(x_0, y_0)Y = 0.$$

从而 t 所满足的方程变为

$$\Phi(X, Y)t^2 + F(x_0, y_0) = 0.$$

这表明两个交点所对应的 t, 满足 $t_1 + t_2 = 0$. 从而

$$(x_0 + t_1X, y_0 + t_2Y) + (x_0 + t_2X, y_0 + t_2Y) = 2(x_0, y_0) + (t_1 + t_2)(X, Y) = 2(x_0, y_0),$$

由此可见在直线 l 上的 (x_0, y_0) 就是过 (x_0, y_0) 且方向为 $X : Y$ 的直线与二次曲线交点的中点.

二次曲线的直径 (续)

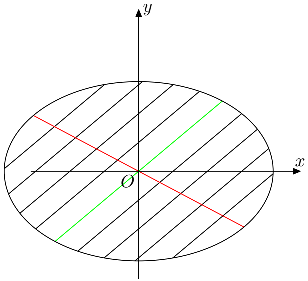
上面的讨论总结如下:

定理 28.1. 二次曲线 $F(x,y)=0$ 与所有具有非渐近方向 $X:Y$ (即 $\Phi(X,Y)\neq 0$) 的平行直线必有两交点, 且以这两个交点作为端点的弦之中点在一条直线上. 该直线的方程为(28.1), 即

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{28.1}$$

定义 28.2. 二次曲线的一簇平行弦中点的轨迹叫做该二次曲线的直径. 该直径称为共轭于平行弦方向的直径, 该直径的方向称为平行弦方向的共轭方向.

注记. 二次曲线的中心平分所有过它的弦, 因此每条直径必定过中心. 特别地, 线心二次曲线的直径只能是中心直线 (唯一).



二次曲线的直径 (续)

我们知道, 以 $X:Y$ 为平行弦方向的直径 l' 方程为(28.1). 下面来求该直径的方向 (即 $X:Y$ 的共轭方向): 假设 l' 的方向为 $X':Y'$, 若 (x,y) 在直线 l' 上, 则 $(x+X', y+Y')$ 仍然在直线 l' 上, 故 $\begin{pmatrix} x+X' & y+Y' & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} X' & Y' & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. 因此 $X:Y$ 与 $X':Y'$ 互为共轭方向; 若两直径的方向互为共轭, 则称它们互为共轭直径.

注记. 回忆, 具有渐近方向 $X:Y$ 的渐近线方程和平行弦方向为 $X:Y$ 的直径方程完全相同. 它们的区别是:

- 在渐近线方程中, $X:Y$ 是渐近方向; 即 $\Phi(X,Y)=0$;
- 在直径方程中, $X:Y$ 是定义该直径的平行弦所在方向; 我们前面的讨论假设了 $\Phi(X,Y)\neq 0$;
- 有时我们直接将满足共轭方向方程的两个方向 $X:Y$ 和 $X':Y'$ 称为共轭方向, 则渐近方向的共轭方向就是其本身. 从而, 渐近方向可称为自共轭方向.

非中心二次曲线的直径

若假设平行弦方向为 $X:Y$(非渐近方向) 的中点所成直径之方向为 $X':Y'$, 则

$$\begin{pmatrix} X' & Y' & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

若斜率都存在, 上述条件等价于 $a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0$.
下面, 假设 $F(x, y) = 0$ 是非中心二次曲线, 即 $I_2 = 0$. 则由共轭方向的方程

$$X'(a_{11}X + a_{12}Y) + Y'(a_{21}X + a_{22}Y) = 0,$$

知道, $X:Y$ 的共轭方向 $X':Y'$ 可以取为 $-(a_{12}X + a_{22}Y):(a_{11}X + a_{12}Y)$, 从而

$$\begin{aligned}
\Phi(X', Y') &= a_{11}X'^2 + 2a_{12}X'Y' + a_{22}Y'^2 \\
&= a_{11}\left(a_{12}X + a_{22}Y\right)^2 - 2a_{12}\left(a_{12}X + a_{22}Y\right)\left(a_{11}X + a_{12}Y\right) + a_{22}\left(a_{11}X + a_{12}Y\right)^2 \\
&= \left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)\left(a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2\right) \\
&= I_2\Phi(X, Y) = 0.
\end{aligned}$$

非中心二次曲线的直径 (续)

因此, 当 $\Phi(X,Y)\neq 0$ 时, 必有 $\Phi(X',Y')=0$. 故, 我们得到

命题 28.3. 对二次曲线:

- 若是非中心的, 则非渐近方向作为平行弦方向, 所得的共轭直径必是渐近方向; 由于非中心二次曲线的渐近方向是唯一的, 从而无心二次曲线的直径都是平行于渐近方向的;
- 前面已经证明, 中心二次曲线的直径都通过中心;
- 线心二次曲线的直径是唯一的, 它就是中心直线.

事实上, 上面关于 $\Phi(X',Y')=I_2\Phi(X,Y)$ 的计算可以简化如下: 由于 $A_0=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ 是对称矩阵, 因此根据线性代数的基本知识, 我们知道它可以正交相似对角化, 即存在正交矩阵 P, 使得 $P^TA_0P=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$, 这里 λ_1,λ_2 为 A_0 的实特征值. 这样, 由已知条件, $X:Y$ 与 $X':Y'$ 是共轭方向, 我们知道

$$\begin{pmatrix} X' & Y'\end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y'\end{pmatrix}^T P^T\Lambda P \begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix} = 0,$$

非中心二次曲线的直径 (续)

若令

$$P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} \bar{X}' & \bar{Y}' \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} = 0 \implies \lambda_1 \bar{X}' \bar{X} + \lambda_2 \bar{Y}' \bar{Y} = 0,$$

从而, 我们可取

$$\bar{X}' = -\mu\lambda_2 \bar{Y}, \quad \bar{Y}' = \mu\lambda_1 \bar{X}.$$

非中心二次曲线的直径 (续)

这样,

$$\begin{aligned}\Phi(X',Y') &= \begin{pmatrix} X' & Y' \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \left(P\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}\right)^T \Lambda \left(P\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \bar{X}' & \bar{Y}' \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \end{pmatrix} = \lambda_1 \bar{X}'^2 + \lambda_2 \bar{Y}'^2 = \lambda_1 \mu^2 \lambda_2^2 \bar{Y}^2 + \lambda_2 \mu^2 \lambda_1^2 \bar{X}^2 \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \mu^2 \left(\lambda_1 \bar{X}^2 + \lambda_2 \bar{Y}^2\right) = \mu^2 \det A_0 \begin{pmatrix} \bar{X} & \bar{Y} \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} = \mu^2 I_2 \Phi(X,Y).\end{aligned}$$

一些例子

例子 28.1. 求椭圆 $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 与双曲线 $\tilde{F}(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 的直径和共轭直径.

解. 由于以 $X:Y$ 为方向的平行弦之中点方程即为直径方程: $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}=0$, 即

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{X}{a^2} \\ \pm\frac{Y}{b^2} \\ 0 \end{pmatrix}=0,$$

化简得到, 椭圆的直径: $\frac{X}{a^2}x+\frac{Y}{b^2}y=0$ 双曲线的直径: $\frac{X}{a^2}x-\frac{Y}{b^2}y=0.$

注记. 椭圆和双曲线都是中心二次曲线, 显然直径都通过中心 $(0,0)$. 这里要求是非渐近方向是因为否则没有两个交点. 事实上, 当 $X:Y$ 为渐近方向时, 直径方程恰好是渐近线方程.

一些例子 (续)

为了求它们的共轭直径, 注意到上述直径的方向分别为 $X':Y' = \pm\frac{Y}{b^2} : -\frac{X}{a^2}$, 因此再次由直径方程得到

$$(x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm\frac{Y}{b^2} \\ -\frac{X}{a^2} \\ 0 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} \pm\frac{Y}{a^2b^2} \\ \mp\frac{X}{a^2b^2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

即 椭圆的共轭直径: $Yx - Xy = 0$, 双曲线的共轭直径: $-Yx + Xy = 0$.

注记. 不难看出, 椭圆和双曲线的共轭直径是同一条直线, 这是因为与直径方向 $X':Y'$ 共轭的方向都是 $X:Y$. 而且共轭直径也过中心 $(0,0)$.

□

一些例子 (续)

例子 28.2. 求抛物线 $F(x, y) = y^2 - 2px = 0$ 的直径, 它是否有共轭直径?

解. 由于以非渐近方向 $X : Y$ 为平行弦方向的直径方程为 $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, 即

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ -pX \end{pmatrix} = 0,$$

化简得到 $Yy - pX = 0$. 它是无心二次曲线, 其直径平行于渐近方向 $1 : 0$.
注意到, 上述直径的方向为 $1 : 0$, 从而其共轭直径满足的方程为

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \end{pmatrix} = 0 \implies -p = 0 \text{ 矛盾!}$$

一些例子 (续)

□

例子 28.3. 求二次曲线 $F(x,y)=x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=0$ 的共轭于非渐近方向 $X:Y$ 的直径.

解. 按照定义, 我们知道所求的直径就是以 $X:Y$ 为方向的平行弦中点构成的直径. 其方程为

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

展开得到

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X-Y \\ -X+Y \\ X-Y \end{pmatrix} = 0 \implies (X-Y)(x-y+1) = 0.$$

由于是非渐近方向, 即 $X^2-2XY+Y^2 \neq 0 \implies X \neq Y$, 故所求直径为 $x-y+1=0$. □

主直径与主方向的定义

由于当二次曲线的直径与平行弦的方向 (即共轭方向) 垂直时, 该直径就是二次曲线的对称轴, 因此我们定义

定义 29.1. 二次曲线的对称轴称为主直径, 它是与共轭方向垂直的直径. 它的方向及其共轭方向都称为二次曲线的主方向.

假设二次曲线的主直径方向为 $X' : Y'$, 其共轭方向为 $X : Y$. 则根据互为共轭方向所满足的方程 $\begin{pmatrix} X' & Y' & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, 并根据主直径定义, 共轭方向互相垂直得到 $XX' + YY' = 0$. 注意到, 上述条件从几何上看就是主直径之方向向量 $\vec{v}' = (X', Y', 0)$ 与其共轭方向向量 $\vec{v} = (X, Y, 0)$ 以及 $\vec{w} = \begin{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ \hline 0 \end{pmatrix}^T = ((X, Y)A_0, 0)$ 都垂直, 其中 $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. 注意到 $\vec{v}, \vec{v}', \vec{w}$ 都在垂直于 $(0, 0, 1)$ 的平面上, 因此存在实数 λ, 使得 $\vec{w} = \lambda \vec{v}$, 即

主直径与主方向的定义 (续)

$(X,Y)A_0=\lambda(X,Y) \iff A_0\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$. 从而 λ 就是 A_0 的特征值. 它必满足特征方程

$$\lambda^2-\operatorname{tr}A_0\lambda+\det A_0=0 \iff \lambda^2-I_1\lambda+I_2=0,\quad I_1=a_{11}+a_{22}. \tag{29.1}$$

因此, 求主方向 $X:Y$ 就是求 A_0 的特征方向, 以及 $X':Y'=(-Y,X)$(这是因为 $(X',Y',0)=(0,0,1)\wedge(X,Y,0)$). 如果主方向 $X:Y$ 不是渐近方向, 则根据前面关于直径的求法, 知道直径方程为 $\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}X\\Y\\0\end{pmatrix}=0$.

定义 29.2. 方程(29.1)及其解 λ 分别称为二次曲线的特征方程和特征值.

二次曲线的特征向量和特征值

命题 29.3. 二次曲线的特征值具有以下性质:

1. 特征值都是实数;
2. 特征值不能全为零;
3. 若 $\lambda \neq 0$, 则对应的特征向量为非渐近主方向; 若 $\lambda = 0$, 则对应的特征向量为渐近主方向;
4. 非中心二次曲线只有唯一一条主直径、中心二次曲线至少有两条主直径.

证明. 这些性质, 都是简单的代数推论.

1. 由于 A_0 是对称矩阵, 因此其特征值都是实数. 也可通过判别式得到:
$$\Delta = I_1^2 - 4I_2 = (a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$
2. 若特征值全为零, 则 $\Delta = 0$ 知道 $a_{12} = 0$ 且 $a_{11} = a_{22}$, 但 $I_2 = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ 知道 $a_{11} + a_{22} = 0$. 这样我们得到 $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$. 这与二次曲线的定义矛盾.

二次曲线的特征向量和特征值 (续)

3. 注意, 若 (X, Y) 是 A_0 的特征值为 λ 对应的特征向量 (即主方向), 则

$$\Phi(X,Y) = \begin{pmatrix} X & Y & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda(X^2 + Y^2).$$

因此, 若 $\lambda \neq 0$, 则 $\Phi(X, Y) \neq 0$, 故 $X : Y$ 为二次曲线的非渐近主方向.
若 $\lambda = 0$, 则 $\Phi(X, Y) = 0$, 可见 $X : Y$ 必是 (唯一的) 渐近方向. 此时, 上述直径方程变为渐近线方程. 因此, 非中心二次曲线 ($\lambda = 0 \implies I_2 = 0$) 的主方向为: 渐近方向 $X : Y = -a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{12}$ 和非渐近方向 $X' : Y' = a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22}$.

4. 根据上一条的讨论, 非中心二次曲线的主方向只有唯一非渐近方向, 该主方向作为平行弦方向对应的直径就是唯一主直径.
对中心二次曲线, 从 $\Delta \geq 0$ 分两种情况.

二次曲线的特征向量和特征值 (续)

- $\Delta = 0$, 即 $a_{11} = a_{22}$ 且 $a_{12} = 0$. 但 $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, 知 $a_{11} = a_{22} \neq 0, a_{12} = 0$. 故可假设 $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, 其中 $\mu = a_{11} = a_{22} \neq 0$. 由此容易得到特征值为 $\lambda = \mu \neq 0$, 从而特征子向量为任何方向 $X : Y$. 即任何方向 $X : Y$ 都是非渐近主方向, 此时它所对应的直径都是主直径.
  如果进一步分析, $\Delta = 0$ 时, 二次曲线的方程化为
  $$F(x, y) = \mu x^2 + \mu y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad \mu \neq 0.$$
  它所表示的是一个圆. 由于任何过中心 (即圆心) 的直线都是对称轴, 因此它们都是圆的主直径.
- 若 $\Delta \neq 0$, 即 $\Delta > 0$, 则有两个不同的 (非零) 特征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 它们对应的特征向量 X_1, X_2 必定是垂直的 (代数知识), 从而它们必定是相互共轭的, 即 $X_1^T A X_2 = \langle X_1, \lambda_2 X_2 \rangle = \lambda_2 \langle X_1, X_2 \rangle = 0$. 特征向量 X_1, X_2 所在方向就是二次曲线的两个互相垂直又互相共轭的主方向.

$\square$

一些例子

例子 29.1. 求二次曲线 $F(x,y)=x^2-xy+y^2-1=0$ 的主方向与主直径.

解. 由于 $A=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, 故特征方程

$$\lambda^2-\operatorname{tr}A_0\lambda+\det A_0=0 \iff \lambda^2-2\lambda+3/4=0 \implies \lambda_1=\frac{1}{2},\quad \lambda_2=\frac{3}{2}.$$

注意到, 特征方向 $X:Y$ 所满足的方程为 $\begin{cases}a_{11}X+a_{12}Y=\lambda X\\ a_{21}X+a_{22}Y=\lambda Y\end{cases}$, 故主方向分别可取为

$$X:Y=a_{12}:(\lambda-a_{11})=(\lambda-a_{22}):a_{12},$$
$$X':Y'=-Y:X=(a_{11}-\lambda):a_{12}=a_{12}:(a_{22}-\lambda).$$

一些例子 (续)

这样, 我们得到主方向分别为

$$X:Y=-1/2:-1/2=1:1,\quad X':Y'=-Y:X=-1:1.$$

代入直径方程分别得到

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}=0,$$

得到主直径分别为

$$x+y=0,\quad x-y=0.$$

□

例子 29.2. 求曲线 $F(x,y)=x^2-2xy+y^2-4x=0$ 的主方向与主直径.

一些例子 (续)

解. 由 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$, 知特征方程为 $\lambda^2-2\lambda=0 \implies \lambda_1=0, \quad \lambda_2=2$. 它们确定的主方向分别为 $X:Y=-1:-1=1:1, \quad X':Y'=-1:1$. 注意到 $\lambda=0$, 故 $X:Y$ 必是渐近主方向, 而 $X':Y'$ 必是非渐近主方向. 其实也可以直接验证 $\Phi(X,Y)=0$, 而 $\Phi(X',Y')\neq 0$ 得到结论.

将他们分别代入到直径的方程, 分别得到 $\begin{pmatrix}x&y&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=0, \quad \begin{pmatrix}x&y&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=0.$

第一个方程为矛盾方程. 因为渐近主方向作为平行弦方向, 此时平行弦与二次曲线没有两个交点, 从而不存在相应的直径. 第二个方程为主直径方程: $x-y-1=0$. □

注记. 我们说过, 若 $X:Y$ 为渐近方向, 则对应的直径方程就变成渐近线方程. 而上面的第一个方程为矛盾方程, 说明此时也不存在渐近线. 这是因为此时二次曲线为无心二次曲线, 它没有渐近线.

平面直角坐标变换

假设 $\mathcal{F} \equiv \{O; x, y\}$ 与 $\mathcal{F}' \equiv \{O'; x', y'\}$ 都是直角标架. 假设平面上一点 P 在 $\mathcal{F}$、$\mathcal{F}'$ 下的坐标分别为 (x, y) 和 (x', y'). 我们分两种情况来讨论它们之间的关系:

- 平移: 即 $\mathcal{F}'$ 是将 $\mathcal{F}$ 平移而得的直角标架. 若假设 O' 在 $\mathcal{F}$ 下的坐标为 (x_0, y_0), 则

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \implies \mathcal{T}_0 : \begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y'. \end{cases} \iff \mathcal{T}_0^{-1} : \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0. \end{cases}$$

- 旋转: 即 $\mathcal{F}'$ 是将 $\mathcal{F}$ 绕着原点 O 逆时针旋转 θ 而得到的. 则 $O = O'$, 且

$$x + iy = e^{i\theta}(x' + iy') \iff x' + iy' = e^{-i\theta}(x + iy),$$

即

$$\mathcal{T}_\theta := \begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta. \end{cases} \iff \mathcal{T}_\theta^{-1} : \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

平面直角坐标变换 (续)

由此, 容易得到将标架旋转再平移后的变换 $\mathcal{T}$ 的变换公式. 事实上, 假设 $P(x,y)$ 经过先旋转再平移后的新坐标为 (x',y'). 则 $\mathcal{T}^{-1} := (\mathcal{T}_0 \circ \mathcal{T}_\theta)^{-1} = \mathcal{T}_\theta^{-1} \circ \mathcal{T}_0^{-1}$, 故

$$\mathcal{T}_0^{-1}: \begin{cases} x_1 = x - x_0 \\ y_1 = y - y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_1 + x_0 \\ y = y_1 + y_0. \end{cases}$$

进而

$$\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}_\theta^{-1} \circ \mathcal{T}_0^{-1}: \begin{cases} x' = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta = x\cos\theta + y\sin\theta - (x_0\cos\theta + y_0\sin\theta) \\ y' = -x_1\sin\theta + y_1\cos\theta = -x\sin\theta + y\cos\theta - (-x_0\sin\alpha + y_0\cos\theta), \end{cases}$$

从而

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \circ \mathcal{T}_\theta: \begin{cases} x = x_1 + x_0 = x'\cos\theta - y'\sin\theta + x_0 \\ y = y_1 + y_0 = x'\sin\theta + y'\cos\theta + y_0. \end{cases} \tag{30.1}$$

二次曲线方程的化简

前面的讨论表明, 如果将标架先旋转再平移, 则同一点 P 再新标架的坐标 (x', y') 和旧标架下的坐标 (x, y) 的关系就是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{30.2}$$

由此, 还容易得到平面一个向量 $\vec{v}$ 再新标架下的坐标 $\{x', y'\}$ 和旧标架下的坐标 $\{x, y\}$ 的关系为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{30.3}$$

为了方便后面的应用, 我们引入矩阵 $\tilde{T} = \begin{pmatrix} T & \alpha_0^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_0 = (x_0, y_0)$, 则点的坐标变换坐标变换变为 (令 $\alpha_0 = 0$ 则表示向量的坐标变换)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{T} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{30.4}$$

二次曲线方程的化简 (续)

现在, 对二次曲线 $F(x,y)=0$, 其矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \implies \left[\tilde{T}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}\right]^t A \left[\tilde{T}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0 \iff \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \tilde{T}^t A T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

若令 $\alpha = (a_{31}, a_{32})$, $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 则 $A = \begin{pmatrix} A_0 & \alpha^t \\ \alpha & a_{33} \end{pmatrix}$. 这样, 若令 $\beta = (x,y)$, 则 $F(x,y) = \beta A_0 \beta^t + 2\alpha\beta^t + a_{33}$. 故将上式展开得到

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} T^t A_0 T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} T^t \left(A_0\alpha_0^t + \alpha^t\right) + F(x_0, y_0) = 0. \tag{30.5}$$

特别地, 对平移和旋转, 我们分别得到如下的变换规律:

二次曲线方程的化简 (续)

- 平移变换下 $T=E_{2\times 2}$, 在新标架下方程变为, 注意 $A_0\alpha_0^t+\alpha^t=\begin{pmatrix}F_1(x_0,y_0) & F_2(x_0,y_0)\end{pmatrix}^t$,

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+2F_1(x_0,y_0)x'+2F_2(x_0,y_0)y'+F(x_0,y_0)=0. \tag{30.6}$$

  可见, 对标架的平移, 不改变二次曲线二次项的系数. 特别地, 当二次曲线有中心时, 如果将标架移到中心 (x_0,y_0), 则 $F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$, 故一次项消失.
- 旋转变换下 $\alpha_0=(x_0,y_0)=(0,0)$, 二次曲线的方程在新标架下变为 (利用 $F(0,0)=a_{33}$)

$$\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}T^tA_0T\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}T^t\begin{pmatrix}a_{13}\\ a_{23}\end{pmatrix}+a_{33}=0. \tag{30.7}$$

  由此可见, 旋转变换不改变二次曲线的常数项. 而且二次曲线的一次项为零当且仅当旋转后的一次项系数也为零. 二次项的系数矩阵 A_0 变为合同矩阵 T^tA_0T.

由此, 我们可以先利用旋转标架消去交叉项 xy, 再利用配方 (平移) 消去一次项从而得到二次曲线的一个标准方程. 具体步骤如下:

二次曲线方程的化简 (续)

1. 若 $a_{12} \neq 0$, 即含有交叉项 xy, 则经过旋转变换(30.7), 注意到二次项的系数矩阵为,

$$\tilde{A}_0 = T^t A_0 T = \begin{pmatrix} a_{11}\cos^2\theta + a_{12}\sin 2\theta + a_{22}\sin^2\theta & a_{12}\cos 2\theta - \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\sin 2\theta \\ a_{12}\cos 2\theta - \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\sin 2\theta & a_{11}\sin^2\theta - a_{12}\sin 2\theta + a_{22}\cos^2\theta \end{pmatrix}.$$

故得到新的交叉项 $x'y'$ 的系数为

$$a'_{12} = \frac{1}{2}\left(2a_{12}\cos 2\theta - (a_{11} - a_{22})\sin 2\theta\right).$$

因此

$$a'_{12} = 0 \implies \cot 2\theta = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

由于 $2\theta \in (0, \pi)$ 时, $\cot 2\theta \in (-\infty, +\infty)$. 因此使得 $a'_{12} = 0$ 的转角 $\theta \in (0, \pi/2)$ 总是存在的.
这样, 经过将标架旋转 θ 角, 我们将二次曲线的方程化为

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0.$$

二次曲线方程的化简 (续)

2. 对上述方程再利用平移变换进行化简. 它又细分为两种情况:
   - 若 a'_{11}、a'_{22} 都不为零, 即 $a'_{11}a'_{22} \neq 0$. 则可以利用配方法得到

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 + a'_{22}\left(y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2 + a_{33} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}} = 0.$$

因此作平移变换

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a'_{13}}{a'_{11}} \\ y' = y'' - \frac{a'_{23}}{a'_{22}}, \end{cases}$$

将二次曲线的方程进一步化简为

$$a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a'_{33} = 0, \quad a'_{33} = a_{33} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}}. \tag{30.8}$$

二次曲线方程的化简 (续)

这样得到的二次曲线的情形如下表:

序号	$a'_{11}a'_{22}$	$a'_{11}a'_{33}$	标准方程	标准图形
1	>0	<0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	椭圆
2	>0	>0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	虚椭圆
3	>0	$=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	一个点 (或两共轭虚直线)
4	<0	$\neq 0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$	双曲线
5	<0	$=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	两相交直线

- 若 $a'_{11}a'_{22}=0$, 不妨设 $a'_{22}=0$. 注意, 此时必有 $a'_{11}\neq 0$(否则不是二次曲线), 则利用配方法得到

$$a'_{11}\left(x'+\frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2+2a'_{23}y'+a_{33}-\frac{a'^2_{13}}{a'_{11}}=0.$$

因此

二次曲线方程的化简 (续)

- 若 $a'_{23} \neq 0$, 则再经过标架的平移

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a'_{13}}{a'_{11}} \\ y' = y'' - \frac{1}{2a_{23'}} \left(a_{33} - \frac{a'_{13}}{a'_{11}} \right), \end{cases}$$

得到标准方程

$$a'_{11} x''^2 + 2a'_{23} y'' = 0. \tag{30.9}$$

它表示一条抛物线. 因此得到下表

序号	a'_{22}	a'_{23}	标准方程	标准图形
6	$= 0$	$\neq 0$	$x^2 = 2py$	抛物线

二次曲线方程的化简 (续)

- 若 $a'_{23}=0$, 则利用配方法得到

$$a'_{11}\left(x'+\frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2+a'_{33}=0,\quad a'_{33}=a_{33}-\frac{a'^2_{13}}{a'_{11}},$$

因此再经过标架的平移

$$\begin{cases} x'=x''-\frac{a'_{13}}{a'_{11}} \\ y'=y'', \end{cases}$$

得到标准方程

$$a'_{11}x''^2+a'_{33}=0. \tag{30.10}$$

根据 a'_{11}, a'_{33} 的符号, 它所表示的二次曲线如下表 (当 $a'_{22}=0$ 且 $a'_{23}=0$ 时):

序号	$a'_{11}a'_{33}$	标准方程	标准图形
7	>0	$x^2=-a^2$	两条平行共轭虚直线
8	<0	$x^2=a^2$	两条平行实直线
9	$=0$	$x^2=0$	两条重合实直线

注记. *通过前面的讨论, 我们得到: 任何二次曲线必属于上述 9 类中的某一类.*

一些例子

例子 30.1. 将二次曲线 $F(x,y)=5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0$ 化为标准型, 并写出相应的坐标变换公式, 作出它们的图形.

解. 我们按照化简二次曲线的过程, 分为两步. 首先作旋转使得交叉项 xy 的系数为零. 其旋转角度 θ 可由转角公式

$$\cot 2\theta=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=\frac{3}{4}\implies\cot 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}=\frac{3}{4},$$

得到 (注意 $\theta\in(0,\pi/2)$)

$$2\tan^2\theta+3\tan\theta-2=0\implies\tan\theta=\frac{1}{2}\implies\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

因此, 坐标变换公式为

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y')\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y').\end{cases}$$

一些例子 (续)

注意到, 此时变换可写为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

代入二次曲线的方程

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} T^t A T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

直接计算

$$\tilde{A} = T^t A T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 5 & 2 & -12 \\ 2 & 2 & -6 \\ -12 & -6 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -6\sqrt{5} & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

一些例子 (续)

即

$$6x'^2 + y'^2 - 12\sqrt{5}x' + 18 = 0.$$

配方得到

$$6(x' - \sqrt{5})^2 + y'^2 + 18 - 30 = 0.$$

从而通过平移变换

$$\begin{cases} x' = x'' + \sqrt{5} \\ y' = y'' \end{cases}$$

将方程进一步化简为

$$6x''^2 + y''^2 - 12 = 0 \iff \frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{12} = 1.$$

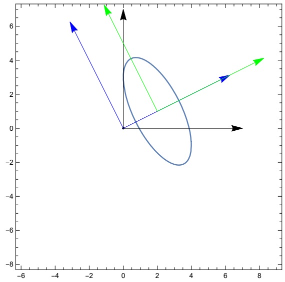
它是一个椭圆 Γ''.

一些例子 (续)

从上述过程, 我们得到坐标变换公式

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x'' - y'' + 2\sqrt{5}\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x'' + 2y'' + \sqrt{5}\right). \end{cases}$$

作图过程如下, 先将坐标系 $\{O; x, y\}$ 旋转角度 θ, 其中 $\tan\theta = 1/2$, 得到新标架 $\{O; x', y'\}$, 再将新标架的原点 O 平移到 $O''(\sqrt{5}, 0)$ 得到标架 $\{O''; x'', y''\}$, 在 $\{O''; x'', y''\}$ 中作出标准椭圆方程 Γ'' 的图形即可.



□

一些例子 (续)

注记. 我们可以利用如下方法简化计算:

- 在通过旋转消去二次曲线交叉项时, 我们也可不利用矩阵乘法, 直接求得

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}\cos^2\theta + a_{12}\sin 2\theta + a_{22}\sin^2\theta = a_{11} + (a_{22} - a_{11})\sin^2\theta + a_{12}\sin 2\theta \\ &= a_{11} - a_{12}\tan\theta\cos 2\theta + 2a_{12}\tan\theta\cos^2\theta = a_{11} + a_{12}\tan\theta. \end{aligned}$$

  类似地, $a'_{22} = a_{22}\cos^2\theta - a_{12}\sin 2\theta + a_{11}\sin^2\theta = -\tan\theta a_{12} + a_{22}$.
- 由(30.7)以及坐标变换公式 (30.2)(只考虑旋转时, 它变为(30.3)), 计算旋转得到的二次曲线的一次项 $2\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} T^t \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$, 可以通过将坐标变换公式 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, 代入到原来方程的一次项 $2a_{13}x + 2a_{23}y$ 得到;
- 通过旋转得到的二次曲线的常数项不改变.

通过主直径化简二次曲线的方程

前面的讨论我们知道, 若二次曲线存在交叉项, 则通过旋转恰当的角度, 我们可将二次曲线的交叉项消去. 它的几何意义如下:

通过角度为 θ 的旋转, 我们得到坐标变换 $\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$ 容易知道, 此时直线 $x\cos\theta + y\sin\theta - x' = 0$ 的方向为 $X' : Y' = -\sin\theta : \cos\theta$, 其垂直方向为 $X : Y = \cos\theta : \sin\theta$. 又注意到, 利用转角公式知

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X' & Y' \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\
&= -\sin\theta\,(a_{11}\cos\theta + a_{12}\sin\theta) + \cos\theta\,(a_{12}\cos\theta + a_{22}\sin\theta) \\
&= -(a_{11} - a_{22})\sin\theta\cos\theta + a_{12}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\
&= \boxed{a_{12}\cos 2\theta - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\sin 2\theta = 0}.
\end{aligned}$$

通过主直径化简二次曲线的方程 (续)

这表明 $A_0\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ 以及 $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ 都与 $\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$ 垂直, 而它们又共面, 从而 $X:Y$ 是二次曲线的主方向, 直线 $x\cos\theta+y\sin\theta-x'=0$ 平行于主直径.
在实际应用中, 我们可以先求特征值 λ, 然后得到主方向 (参考前面关于主方向的求法), 进而得到主直径. 若至少有两条主直径, 则可将主直径方程设为坐标变换方程. 否则, 若只有一条主直径, 取与它垂直且过它与二次曲线的交点的直线方程为另一个坐标变换方程. 这样可以将二次曲线化为标准型.

例子 30.2. 利用主直径化简二次曲线 $F(x,y)=5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0$.

解. 容易求得其特征方程为

$$\lambda^2-7\lambda+6=0 \implies \lambda_1=1,\ \lambda_2=6.$$

故主方向为

$$X:Y=a_{12}:(\lambda-a_{11})=2:-4=1:-2,\quad X':Y'=-Y:X=2:1.$$

通过主直径化简二次曲线的方程 (续)

由此求得主直径分别为

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies x - 2y = 0, \quad \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies 2x + y - 5 = 0.$$

因此, 取坐标变换 $\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y - 5), \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y' + 2\sqrt{5}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y' + \sqrt{5}), \end{cases}$ 代入得到二次曲线的方程化为

$$x'^2 + 6y'^2 - 12 = 0 \iff \frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{2} = 1.$$

$\square$

中心二次曲线方程的化简

如果二次曲线为中心二次曲线, 则还可以先将坐标原点移到中心可将一次项消掉, 再用转角公式 (或求主直径的方法) 化简二次曲线, 注意到旋转不会产生新的一次项.

例子 30.3. 判断二次曲线 $F(x,y)=5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0$ 是否为中心二次曲线, 若是利用利用先平移到中心再旋转的方法化简.

解. 由于 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -12 \\ 2 & 2 & -6 \\ -12 & -6 & 18 \end{pmatrix}$, 故 $I_2=10-4\neq 0$, 它是中心二次曲线. 其中心为 $(A_{13}^*/A_{33}^*, A_{23}^*/A_{33}^*)=(12/6,6/6)=(2,1)$. 故通过平移变换 $\begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'+1, \end{cases}$ 二次曲线化为 (不改变二次项, 且一次项消失, 常数项为 $F(2,1)$)

$$5x^2+4xy+2y^2-12=0.$$

中心二次曲线方程的化简 (续)

利用转角公式 (和前面一样), 容易求得旋转变换

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x'' - y'') \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x'' + 2y'') \end{cases}$$

代入得到

$$6x''^2 + y''^2 - 12 = 0 \iff \frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{12} = 1.$$

□

二次曲线的不变量

从前面关于二次曲线的化简我们看到，通过标架的平移、旋转坐标轴，二次曲线最终可以化为九种标准形式之一. 这表明在直角标架的平移、旋转过程中，二次曲线系数决定的某些量是保持不变的. 事实上，我们将证明，可以直接根据这些不变量决定二次曲线的标准类型.

回忆，平移、旋转后的坐标变换公式为(30.1)，即 $\mathcal{T}:\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + x_0 \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + y_0. \end{cases}$

定义 31.1. 假设 f 是由二次曲线 $F(x,y)=0$ 的系数决定的一个非常值的函数. 经过直角坐标变换(30.1)，二次曲线的方程变为

$$F'(x',y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0.$$

如果

$$f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}) = f(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{33}),$$

则称函数 f 为二次曲线 $F(x,y)=0$ 在直角坐标变换(30.1)下的一个不变量. 如果这个函数 f 的值，只在经过转轴变换下不变，那么称它为半不变量.

二次曲线的不变量 (续)

定理 31.2. 二次曲线 $F(x,y)=0$ 在直角坐标变换(30.1)下, 有三个不变量

$$I_1=\mathrm{tr}A_0=a_{11}+a_{22},\quad I_2=\det A_0=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\quad I_3=\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

以及一个半不变量

$$K_1=\det A_{11}+\det A_{22}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

证明. 我们知道, 直角坐标变换可以改写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\tilde{T}\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix},\quad \tilde{T}=\begin{pmatrix}T&\alpha_0^t\\0&1\end{pmatrix}.$$

二次曲线的不变量 (续)

因此, 代入到 $F(x,y) = 0 = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & \alpha^t \\ \alpha & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $\alpha = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, 得到 (参考(30.5), 事实上, 一般而言 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} T^t A_0 T & T^t(A_0\alpha_0^t + \alpha^t) \\ (\alpha_0 A_0 + \alpha)T & F(x_0, x_0) \end{pmatrix}$)

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} T^t A_0 T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} T^t \left(A_0 \alpha_0^t + \alpha^t\right) + F(x_0, y_0) = 0.$$

由此可见, 二次项的系数矩阵从 A_0 变为其相似 (注意 T 正交) 矩阵 $T^t A_0 T$, 从而其迹和行列式都不变, 这证明了 I_1、I_2 是不变量.
事实上, 整个二次曲线的系数矩阵 A 变为

$$\tilde{A} = \tilde{T}^t A \tilde{T} \implies |\tilde{A}| = |\tilde{T}^t||A||\tilde{T}| = |A|$$

因此 I_3 也保持不变.

二次曲线的不变量 (续)

当只有转轴变换时, 即 $\alpha_0 = 0$, 则 $\tilde{T} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 从而 $\tilde{A} = \tilde{T}^t A T = \begin{pmatrix} T^t A_0 T & T^t \alpha^t \\ \alpha T & a_{33} \end{pmatrix}$. 现在, 由于

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = (a_{11} + a_{22})a_{33} - (a_{13}^2 + a_{23}^2).$$

而从 $\tilde{A}$ 我们知道,

$$\begin{aligned} a'_{11} + a'_{22} &= \operatorname{tr} \tilde{A}_0 = \operatorname{tr} (T^t A_0 T) = \operatorname{tr} A_0 = I_1 = a_{11} + a_{22}, \\ a'_{33} &= a_{33}, \\ a'^2_{13} + a'^2_{23} &= |\alpha T|^2 = \langle \alpha T, \alpha T \rangle = \alpha T T^t \alpha^t = \alpha\alpha^t = \langle \alpha, \alpha \rangle = a_{13}^2 + a_{23}^2. \end{aligned}$$

可见 K_1 在旋转变换下也不变. □

二次曲线的不变量 (续)

命题 31.3. 若 $I_2 = I_3 = 0$, 则 K_1 也是平移不变量.

证明.

□

利用不变量化简二次曲线

从前面二次曲线的化简我们看到, 通过恰当的直角坐标变换, 可以将二次曲线的方程 $F(x,y)=0$ 化为如下几种情形之一:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33} = 0, \tag{30.8}$$

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{23}y' = 0, \tag{30.9}$$

$$a'_{11}x'^2 + a'_{33} = 0. \tag{30.10}$$

并根据它们系数的不同情形, 将其分为 9 中类型.
如果我们不需要写出具体的坐标变换, 那么也可以借助不变量来写出化简后的方程之系数, 并利用不变量来判别曲线的类型.
将方程(30.8)的系数表示为不变量的方法如下: 由于(30.8)是由 $F(x,y)=0$ 经过直角坐标变换后得到的, 故

$$I_1 = a'_{11} + a'_{22}, \quad I_2 = a'_{11}a'_{22}, \quad I_3 = a'_{11}a'_{22}a'_{33}.$$

因此 a'_{11}, a'_{22} 是下列方程

$$|\lambda E - A_0| = \lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$$

利用不变量化简二次曲线 (续)

的两个根, 设为 λ_1, λ_2. 而 $a_{33} = I_3/I_2$. 故(30.8)用不变量来表达为

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0.$$

完全类似地, (30.9)也是直角坐标变换得到的, 故

$$I_1 = a'_{11}, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = -a'_{11}a'^2_{23}.$$

因此(30.9)用不变量表示为

$$I_1 x^2 \pm \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}\, y = 0.$$

类似地, (30.10)也是直角坐标变换得到的, 故 (可以证明 $I_2 = I_3 = 0$ 时, K_1 是不变量)

$$I_1 = a'_{11}, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = 0, \quad K_1 = K'_1 = a'_{11}a'_{33}.$$

利用不变量化简二次曲线 (续)

因此(30.10)用不变量可表示为

$$I_1x^2+\frac{K_1}{I_1}=0.$$

由此, 容易根据 I_1, I_2, I_3, K_1 来判断二次曲线的类型, 我们总结如下表:

条件	标准方程	标准图形	类型
$I_2>0\&I_1I_3<0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	椭圆	椭圆型
$I_2>0\&I_1I_3>0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	虚椭圆	椭圆型
$I_2>0\&I_3=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	一个点或者两共轭虚直线	椭圆型
$I_2<0\&I_3\neq 0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$	双曲线	双曲型
$I_2<0\&I_3=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	两相交直线	双曲型
$I_2=0\&I_3\neq 0$	$x^2=2py$	抛物线	抛物型
$I_2=I_3=0\&K_1>0$	$x^2=-a^2$	两平行共轭虚直线	抛物型
$I_2=I_3=0\&K_1<0$	$x^2=a^2$	两平行实直线	抛物型
$I_2=I_3=0\&K_1=0$	$x^2=0$	两重合实直线	抛物型

利用不变量化简二次曲线 (续)

标准方程	渐近方向	中心	渐近线	主方向	主直径
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$X:Y=\pm a:bi$	$(0,0)$	$y=\pm\frac{b}{a}ix$	$X:Y=1:0\&0:1$	$y=0\&x=0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$					
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$					
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$	$X:Y=\pm a:b$	$(0,0)$	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$X:Y=1:0\&0:1$	$y=0\&x=0$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$					
$x^2=2py;y^2=2px$	$X:Y=0:1;1:0$	无	无	$X:Y=1:0;0:1$	$x=0;y=0$
$x^2=-a^2;y^2=-a^2$		$x=0;y=0$	$x=0;y=0$		
$x^2=a^2;y^2=a^2$					
$x^2=0;y^2=0$					

课后习题

1. P131: 2(1),(4), 3, 4;
2. P134: 3(1), (3), 5, 6, 8;
3. P137: 1(1), (3), 2(1); P138: 4;
4. P141: 2; P142: 5, 6, 8;
5. P146: 2(1), (3), 3, 4;
6. P159: 1(1), (3); 2(2), (4); 3;
7. P168: 3;

第六章 · 二次曲面的一般理论

- 二次曲面的一般方程
- 二次曲面与直线的位置关系
- 二次曲面的切线与切平面
- 渐近方向、中心与渐近线
- 二次曲面的径面与奇向
- 主直径面与主方向
- 二次曲线方程的化简与分类
- 二次曲面的不变量以及化简
- 课后习题

二次曲面的一般方程

空间中, 如下的三元二次方程 $F(x,y,z)=0$, 即

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \quad (33.1)$$

所表示的曲面称为二次曲面.

注记. (33.1)改写为矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad A = A^t. \quad (33.2)$$

二次曲面与直线的交点方程

我们将二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 与直线 $l:\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}=t$ 的交点方程为

$$\left(\begin{pmatrix}x_0 & y_0 & z_0 & 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}X & Y & Z & 0\end{pmatrix}\right)A\left(\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\0\end{pmatrix}\right)=0.$$

展开得到

$$\begin{pmatrix}X & Y & Z & 0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\0\end{pmatrix}t^2+2\begin{pmatrix}X & Y & Z & 0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\\1\end{pmatrix}t+F(x_0,y_0,z_0)=0.$$

二次曲面与直线的交点方程 (续)

引入如下记号

$$\Phi(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1(x_0,y_0,z_0) \\ F_2(x_0,y_0,z_0) \\ F_3(x_0,y_0,z_0) \\ F_4(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这样, 交点方程变为

$$\Phi(X,Y,Z)t^2 + 2(F_1(x_0,y_0,z_0)X + F_2(x_0,y_0,z_0)Y + F_3(x_0,y_0,z_0)Z)t + F(x_0,y_0,z_0) = 0. \tag{34.1}$$

二次曲面与直线的交点方程 (续)

- 若 $\Phi(X,Y,Z)\neq 0$, 则此时(34.1)是一个关于 t 的二次方程, 其判别式为

$$\Delta=[F_1(x_0,y_0,z_0)X+F_2(x_0,y_0,z_0)Y+F_3(x_0,y_0,z_0)Z]^2-\Phi(X,Y,Z)F(x_0,y_0,z_0).$$

  1. 若 $\Delta>0$, 则(12.2)有两个不同实根, 从而二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 与直线 l 有两个不同的实交点;
  2. 若 $\Delta=0$, 则(12.2)有两个相同实根, 从而二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 与直线 l 有两个相同的实交点;
  3. 若 $\Delta<0$, 则(12.2)有两个共轭虚根, 从而二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 与直线 l 有两个共轭的虚交点.
- 若 $\Phi(X,Y,Z)=0$, 此时也有三种情况:
  1. 若 $F_1(x_0,y_0,z_0)X+F_2(x_0,y_0,z_0)Y+F_3(x_0,y_0,z_0)Z\neq 0$, 则此时(34.1)有唯一实根, 从而二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 与直线 l 有唯一实交点;
  2. 若 $F_1(x_0,y_0,z_0)X+F_2(x_0,y_0,z_0)Y+F_3(x_0,y_0,z_0)Z=0$ 而 $F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 则此时(34.1)无解, 从而二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 与直线 l 没有交点;
  3. 若 $F_1(x_0,y_0,z_0)X+F_2(x_0,y_0,z_0)Y+F_3(x_0,y_0,z_0)Z=0$ 而 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, 则此时任意的 t 都满足(34.1), 从而直线 l 上的点都在二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 上.

二次曲面的切线

我们看到, 直线 l 与二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 有两个交点 (不同实、重合实、共轭虚) 的充要条件是 $\Phi(X,Y,Z)\neq 0$. 特别地,

定义 35.1. 若直线 l 与二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 有两个重合实交点, 则称 l 与二次曲面相切. 重合的实交点称为切点. 如果直线全部都在二次曲面上, 我们也称直线与二次曲面相切, 此时直线上每一个点都是切点.

因此, 根据交点方程(34.1), 我们得到直线 $l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}=t$ 与二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 相切的充要条件是:

- 若 $\Phi(X,Y,Z)\neq 0$, 则
  $0=\Delta=[F_1(x_0,y_0,z_0)X+F_2(x_0,y_0,z_0)Y+F_3(x_0,y_0,z_0)Z]^2-\Phi(X,Y,Z)F(x_0,y_0,z_0)$;
- 若 $\Phi(X,Y,Z)=0$, 则 $F_1(x_0,y_0,z_0)X+F_2(x_0,y_0,z_0)Y+F_3(x_0,y_0,z_0)Z=0$ 且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$.

因此, 对切点 (x_0,y_0,z_0) 在二次曲面上, 上述充要条件可以约化为

$$F_1(x_0,y_0,z_0)X+F_2(x_0,y_0,z_0)Y+F_3(x_0,y_0,z_0)Z=0. \tag{35.1}$$

二次曲面的切平面

从(35.1)我们知道, 对二次曲面上对点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 若 $F_1(x_0, y_0, z_0)$、$F_2(x_0, y_0, z_0)$、$F_3(x_0, y_0, z_0)$ 不全为零, 则该点处的切线的方向向量 $X : Y : Z$ 必定和 $\vec{n} := (F_1(x_0, y_0, z_0), F_2(x_0, y_0, z_0), F_3(x_0, y_0, z_0))$ 垂直. 因此, 过点 P_0 的切线都在过 P_0 且与 $\vec{n}$ 垂直的平面上, 该平面就称为二次曲面在 P_0 处的切平面. 容易得到, 切平面方程为

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \vec{n} = 0,$$

即

$$(x - x_0)F_1(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F_3(x_0, y_0, z_0) = 0. \tag{35.2}$$

定义 35.2. 我们称二次曲面上满足

$$0 = F_1(x_0, y_0, z_0) = F_2(x_0, y_0, z_0) = F_3(x_0, y_0, z_0),$$

的点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为二次曲面的奇异点, 简称奇点; 非奇异点称为正则点. 在奇异点 P_0 处, 任何通过 P_0 的直线都满足切线条件(35.1), 从而都是切线.

二次曲面的切平面 (续)

我们可以利用矩阵形式, 将二次曲面在正则点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程(35.2)改写为

$$\left[\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix}\right] A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

即

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{35.3}$$

容易知道, 类似以前关于二次曲线的切线方程的求法, 将二次曲面方程中 $x^2, y^2, z^2, 2xy, 2xz, 2yz, 2x, 2y, 2z$ 换成 $xx_0, yy_0, zz_0, x_0y + xy_0, x_0z + xz_0, y_0z + yz_0, x + x_0, y + y_0, z + z_0$ 的求切平面方法仍然成立.

二次曲面的切锥面

若 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 不在二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 上, 即 $F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 则过 P_0 的直线 $l:\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}=t$ 与二次曲线相切的充要条件是

$$\begin{cases}\Phi(X,Y,Z)\neq 0\\ [F_1(x_0,y_0,z_0)X+F_2(x_0,y_0,z_0)Y+F_3(x_0,y_0,z_0)Z]^2-\Phi(X,Y,Z)F(x_0,y_0,z_0)=0.\end{cases}$$

将上式第二个等式同乘以 t^2, 并注意到

$$tX=x-x_0,\quad tY=y-y_0,\quad tZ=z-z_0,$$

我们得到

$$\begin{aligned}&[(x-x_0)F_1(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)F_3(x_0,y_0,z_0)]^2\\ &\qquad\qquad -\Phi(x-x_0,y-y_0,z-z_0)F(x_0,y_0,z_0)=0.\end{aligned}$$

若它不是一个恒等式, 上述方程是关于 $x-x_0,y-y_0,z-z_0$ 的齐次方程. 因而表示一个锥面. 它是由过 P_0 的所有切线构成的, 称为二次曲面的切锥面.

一些例子

例子 35.1. 求二次曲面 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4xy-4xz-4yz+2x+2y+2z+18=0$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面方程.

解. 容易验证 $F(1,2,3)=0$, 故所求的切平面方程为

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix}=0,$$

化简得到 $8x+5y+2z-24=0$. □

另解. 容易验证 $F(1,2,3)=0$, 从而所求的切平面为

$$x+2y+3z-2(y+2x)-2(z+3x)-2(2z+3y)+(x+1)+(y+2)+(z+3)+18=0,$$

化简得到同样的结果. □

二次曲面的渐近线

我们称二次曲面在无穷远点处的切线为二次曲面的渐近线. 由于当切点趋于无穷时, $1/t \to 0$. 因此我们考虑 $1/t$ 满足的方程

$$F(x_0,y_0,z_0)t^2 + 2\left(F_1(x_0,y_0,z_0)X + F_2(x_0,y_0,z_0)Y + F_3(x_0,y_0,z_0)Z\right)t + \Phi(X,Y,Z) = 0. \tag{36.1}$$

$t=0$ 是二重根当且仅当

$$\begin{cases} \Phi(X,Y,Z) = 0 \\ F_1(x_0,y_0,z_0)X + F_2(x_0,y_0,z_0)Y + F_3(x_0,y_0,z_0)Z = 0. \end{cases} \tag{36.2}$$

定义 36.1. 对二次曲面 $F(x,y,z)=0$, 我们称满足 $\Phi(X,Y,Z)=0$ 的方向 $X:Y:Z$ 为该二次曲面的渐近方向.

二次曲面的渐近线 (续)

注意到过任意定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以渐近方向 $X:Y:Z$ 为方向的直线 l 的方程为 $\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}=t$. 即, $tX=x-x_0, tY=y-y_0, tZ=z-z_0$. 注意到 $\Phi(X,Y,Z)$ 是二次齐次的, 从而由渐近方向所满足的方程 $\Phi(X,Y,Z)=0$, 得到 (两边同乘以 t^2)

$$\Phi(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0.$$

它是关于 $x-x_0,y-y_0,z-z_0$ 的二次齐次方程, 从而表示的是一个以 P_0 为顶点的锥面, 该锥面是由过 P_0 且以渐近方向为方向的直线构成的, 称为渐近方向锥面.
上述渐近方向锥面的直母线只是方向为渐近方向, 它们还不一定是渐近线. 若构成上述锥面的直母线还是渐近线, 则称该锥面为二次曲面的渐近锥面.

二次曲面的中心

与二次曲线的情形一样, 二次曲面的中心就是对称中心, 它平分过它的所有弦. 下面我们来推导中心所满足的方程. 考察过 $P_c(x_c, y_c, z_c)$ 且以非渐近方向 $X : Y : Z$ 为方向的直线 $l : \frac{x-x_c}{X} = \frac{y-y_c}{Y} = \frac{z-z_c}{Z} = t$, 它与二次曲面 $F(x, y, z) = 0$ 有两个交点 (假设对应的参数为 t_1, t_2). 按照中心的定义, 类似二次曲面的情形, 容易得到

$$t_1 + t_2 = 0 \iff F_1(x_c, y_c, z_c)X + F_2(x_c, y_c, z_c)Y + F_3(x_c, y_c, z_c)Z = 0.$$

由于非渐近方向 $X : Y : Z$ 的任意性, 得到

$$\begin{cases} F_1(x_c, y_c, z_c) = 0, \\ F_2(x_c, y_c, z_c) = 0, \\ F_3(x_c, y_c, z_c) = 0. \end{cases} \tag{36.3}$$

它就是中心所满足的方程, 称为二次曲面的中心方程组.

二次曲面的中心 (续)

若将中心方程组展开, 容易得到

$$\begin{cases} a_{11}x_c + a_{12}y_c + a_{13}z_c + a_{14} = 0, \\ a_{21}x_c + a_{22}y_c + a_{23}z_c + a_{24} = 0, \\ a_{31}x_c + a_{32}y_c + a_{33}z_c + a_{34} = 0. \end{cases}$$

因此, 我们有如下

推论 36.2. 二次曲面的中心在原点, 当且仅当该二次曲面的方程不含有一次项.

由于中心方程组每一个方程都表示一个平面 (除非是矛盾方程或者恒等式的情形), 故中心方程组的解的情况分为唯一解、无解、解是一条直线、解是一个平面, 此时二次曲面分别称为独心、无心、线心、面心二次曲面. 独心二次曲面也称为中心二次曲面, 其它情形称为非中心二次曲面. 显然, 中心二次曲面当且仅当 $I_3 \neq 0$.

二次曲面的中心 (续)

事实上, 根据线性代数的基本知识, 中心方程中解的情况依赖于系数矩阵 A_0 以及增广矩阵 $\tilde{A}_0$ 的秩的情况

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & -a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & -a_{34} \end{array}\right).$$

令 $r = r_{A_0}, \tilde{r} = r_{\tilde{A}_0}$, 则

- 若 $r = \tilde{r} = 3$, 则 $I_3 = \det A_0 \neq 0$, 此时中心方程组有唯一解;
- 若 $r = \tilde{r} = 2$, 则中心方程组有无穷多解, 且解空间的维数为 1, 它们构成一条直线;
- 若 $r = \tilde{r} = 1$, 则中心方程组有无穷多解, 且解空间的维数为 2, 它们构成一个平面;
- 若 $r < \tilde{r}$, 则中心方程组没有解.

二次曲面的中心 (续)

通过考察渐近线方程组(36.2)和中心方程组(36.3), 容易得到

命题 36.3. *若二次曲面有中心, 则*

- *通过中心且方向为渐近方向的直线必为渐近线;*
- *顶点在中心的渐近方向锥面必是渐近锥面.*

一些例子

例子 36.1. 考察双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

的中心和渐近线.

解. 容易知道, 双曲面的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & & & \\ & \frac{1}{b^2} & & \\ & & -\frac{1}{c^2} & \\ & & & \pm 1\end{pmatrix}$, 因此中心方程组为

$$\begin{cases} F_1(x_c,y_c,z_c)=\frac{1}{a^2}x_c=0 \\ F_2(x_c,y_c,z_c)=\frac{1}{b^2}y_c=0 \\ F_3(x_c,y_c,z_c)=-\frac{1}{c^2}z_c=0 \end{cases} \implies (x_c,y_c,z_c)=(0,0,0).$$

从而有唯一中心在原点.

一些例子 (续)

渐近方向 $X:Y:Z$ 满足

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0.$$

因此, 以 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为顶点的渐近方向锥面 $C_0:\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$ 其实就是将双曲面的渐近锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 的锥顶点移动到 P_0 而得.
考察渐近方向锥面 C_0 上的直线 $l:\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$, 它是渐近线当且仅当

$$\begin{cases}\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0\\ \frac{x_0}{a^2}X+\frac{y_0}{b^2}Y-\frac{z_0}{c^2}Z=0\end{cases}\iff\begin{cases}\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0\\ \frac{1}{a^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)X^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)Y^2+2\frac{x_0y_0}{a^2b^2}XY=0.\end{cases}$$

这里是将第一个联立方程中第二个等式移项平方而得. 因此, 渐近锥面上满足上述条件的直母线都是渐近线.
此外, 通过考察上述关于 X,Y 的二次方程的判别式, 容易知道 $\frac{z_0^2}{c^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)\geq 0$ 时, 有实渐近方向 $X:Y:Z$. 这表明, 对二次曲面而言, 并非所有的渐近线都通过中心.

一些例子 (续)

例如, 令 $x_0=a^2Z, y_0=0, z_0=c^2X$, 则当 $Y\neq 0$ 时, 过 $P_0(a^2Z,0,c^2X)$ 且以渐近方向 $X:Y:Z$ 为方向的直线就是不通过中心的渐近线, 这是因为

$$\frac{x_0}{a^2}X+\frac{y_0}{b^2}Y-\frac{z_0}{c^2}Z=ZX+0-XZ=0.$$

而且若它通过中心, 则方向向量为 $\overrightarrow{OP_0}$

$$X:Y:Z=a^2Z:0:c^2X$$

这与 $Y\neq 0$ 矛盾. $\square$

(直) 径面

注意到, 若直线 $l:\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}=t$ 的方向是渐近方向, 则 $\Phi(X,Y,Z)=0$, 因此它或者与二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 没有交点, 或者只有唯一交点, 或者整个直线都在二次曲面上. 而对非渐近方向 $X:Y:Z$, 即 $\Phi(X,Y,Z)\neq 0$, 直线与二次曲面有两个交点 (可能为重合或者共轭虚交点), 因此我们可以讨论以 $X:Y:Z$ 为方向的弦的中点方程. 由于交点方程为

$$\Phi(X,Y,Z)t^2+2\left(F_1(x_0,y_0,z_0)X+F_2(x_0,y_0,z_0)Y+F_3(x_0,y_0,z_0)Z\right)t+F(x_0,y_0,z_0)=0.$$

因此若 (x_0,y_0,z_0) 为中点, 则

$$\begin{aligned}(x_0,y_0,z_0)&=\frac{1}{2}\left((x_0+t_1X,y_0+t_1Y,z_0+t_1Z)+(x_0+t_2X,y_0+t_2Y,z_0+t_2Z)\right)\\&=(x_0,y_0,z_0)+\frac{t_1+t_2}{2}(X,Y,Z).\end{aligned}$$

因此得到

$$0=t_1+t_2=-\frac{F_1(x_0,y_0,z_0)X+F_2(x_0,y_0,z_0)Y+F_3(x_0,y_0,z_0)Z}{\Phi(X,Y,Z)}.$$

(直) 径面 (续)

故以 $X:Y:Z$ 为方向的弦之中点 (x_0,y_0,z_0) 所满足的方程为

$$F_1(x_0,y_0,z_0)X+F_2(x_0,y_0,z_0)Y+F_3(x_0,y_0,z_0)Z=0.$$

将其改写为矩阵形式, 中点 (x_0,y_0,z_0) 所满足的方程为

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

若我们引入记号

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(X,Y,Z) \\ \Phi_2(X,Y,Z) \\ \Phi_3(X,Y,Z) \\ \Phi_4(X,Y,Z) \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{pmatrix},$$

(直) 径面 (续)

则上述方程可写为

$$\Phi_1(X,Y,Z)x + \Phi_2(X,Y,Z)y + \Phi_3(X,Y,Z)z + \Phi_4(X,Y,Z) = 0.$$

注意到由于 $X:Y:Z$ 是非渐近方向, 故

$$0 \neq \Phi(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi_1(X,Y,Z)X + \Phi_2(X,Y,Z)Y + \Phi_3(X,Y,Z)Z,$$

从而 $\Phi_1(X,Y,Z)$、$\Phi_2(X,Y,Z)$、$\Phi_3(X,Y,Z)$ 不全为零, 从而表示一个平面.

定义 37.1. 二次曲面平行弦的中点轨迹是一个平面, 称为共轭于平行弦的直径面, 平行弦叫做这个直径面的共轭弦, 平行弦的方向叫做这个直径面的共轭方向.

直径面与中心

若二次曲面有中心 (x_c, y_c, z_c), 则 $\begin{cases} F_1(x_c, y_c, z_c) = 0 \\ F_2(x_c, y_c, z_c) = 0 \\ F_3(x_c, y_c, z_c) = 0 \end{cases}$, 因此

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_c & y_c & z_c & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= XF_1(x_c, y_c, z_c) + YF_2(x_c, y_c, z_c) + ZF_3(x_c, y_c, z_c) = 0.\end{aligned}$$

可见直径面必定通过中心.

推论 37.2. 线心二次曲面的任何直径面都通过它的中心直线; 面心二次曲面的直径面与它的中心平面重合.

直径面与奇向

前面我们看到, 若 $X:Y:Z$ 为非渐近方向, 则

$$0 \neq \Phi(X,Y,Z) = \Phi_1(X,Y,Z)X + \Phi_2(X,Y,Z)Y + \Phi_3(X,Y,Z)Z.$$

可见使 $\Phi_1(X,Y,Z)$、$\Phi_2(X,Y,Z)$、$\Phi_3(X,Y,Z)$ 都为零的方向 $X:Y:Z$ 必为渐近方向. 我们称其为奇异方向, 简称奇向. 因此 $\vec{v} = \{X,Y,Z\}$ 是二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 的奇向当且仅当

$$\begin{cases} \Phi_1(\vec{v}) := \Phi_1(X,Y,Z) = a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z = 0 \\ \Phi_2(\vec{v}) := \Phi_2(X,Y,Z) = a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z = 0 \\ \Phi_3(\vec{v}) := \Phi_3(X,Y,Z) = a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z = 0 \end{cases}$$

推论 37.3. 二次曲面有奇向当且仅当 $I_3 = 0$, 即当且仅当二次曲面是非中心二次曲面.

直径面与奇向 (续)

命题 37.4. $\vec{v}$ 是二次曲面的奇向当且仅当它与该二次曲面的任意直径面都平行. 特别地, 线心二次曲面的奇向就是中心直线的方向; 面心二次曲面的奇向就是所有与中心平面平行的方向.

证明. 假设 $\vec{v}_0=\{X_0,Y_0,Z_0\}$ 是二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 的奇向, 而以 $\vec{v}=\{X,Y,Z\}$ 为共轭方向的直径面的法向量为 $\vec{n}=\{\Phi_1(X,Y,Z),\Phi_2(X,Y,Z),\Phi_3(X,Y,Z)\}$. 因此,

$$\begin{aligned}\vec{v}_0\cdot\vec{n}&=\begin{pmatrix}X_0 & Y_0 & Z_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1(X,Y,Z)\\ \Phi_2(X,Y,Z)\\ \Phi_3(X,Y,Z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_0 & Y_0 & Z_0 & 0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & Y & Z & 0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}X_0\\ Y_0\\ Z_0\\ 0\end{pmatrix}\\ &=X\Phi_1(X_0,Y_0,Z_0)+Y\Phi_2(X_0,Y_0,Z_0)+Z\Phi_3(X_0,Y_0,Z_0)=0.\end{aligned}$$

因此, $\vec{v}_0$ 与直径面平行.

直径面与奇向 (续)

反过来, 若 $\vec{v}_0$ 与任意直径面平行, 则对任意的共轭方向 $X:Y:Z$, 都有

$$X\Phi_1(X_0,Y_0,Z_0)+Y\Phi_2(X_0,Y_0,Z_0)+Z\Phi_3(X_0,Y_0,Z_0)=0.$$

由于 $X:Y:Z$ 可以取为任意的非渐近方向, 而渐近方向构成一个锥面. 故, 特别地我们可以取三个线性无关的非渐近方向, 得到 $\Phi_1(X_0,Y_0,Z_0)=\Phi_2(X_0,Y_0,Z_0)=\Phi_3(X_0,Y_0,Z_0)=0$, 即 $\vec{v}_0$ 为奇向.

后两个结论是推论37.2的直接推论. □

一些例子

例子 37.1. 给定二次曲面 $F(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2-2xy-2yz-2xz-4x-1=0$. 求分别满足下列条件的直径面:

1. 共轭于方向 $1:-1:0$ 的直径面;
2. 平行于平面 $x+2y-z+1=0$ 的直径面; 并指出其共轭方向;
3. 通过点 $(0,0,0)$ 以及 $(1,1,0)$ 的直径面.

解.

1. 共轭于方向 $1:-1:0$ 的直径面即平行弦方向为 $1:-1:0$, 从而根据直径面的方程, 我们知道所求的直径面为

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

一些例子 (续)

即

$$2x - 3y - 2 = 0.$$

2. 由于平面的法向量为 $(1, 2, -1)$, 因此假设所求的直径面的共轭方向为 $X : Y : Z$, 则直径面的方程为,

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

即

$$(X - Y - Z)\,x + (-X + 2Y - Z)\,y + (-X - Y - Z)\,z + (-2X + 0Y + 0Z) = 0.$$

从而由法向量平行得到

$$\frac{X - Y - Z}{1} = \frac{-X + 2Y - Z}{2} = \frac{-X - Y - Z}{-1} \Longrightarrow X : Y : Z = 1 : 1 : -1,$$

一些例子 (续)

故所求直径面为

$$x + 2y - z - 2 = 0.$$

其共轭方向即为 $X : Y : Z = 1 : 1 : -1$.

3. 由于前面求得共轭方向为 $X : Y : Z$ 的直径面方程为

$$(X - Y - Z)\,x + (-X + 2Y - Z)\,y + (-X - Y - Z)\,z + (-2X + 0Y + 0Z) = 0.$$

代入点 $(0, 0, 0)$ 以及 $(1, 1, 0)$, 得到

$$\begin{cases} -2X = 0 \\ Y - 2Z - 2X = 0 \end{cases} \implies X : Y : Z = 0 : 2 : 1,$$

故所求的直径面为

$$-3x + 3y - 3z = 0 \implies x - y + z = 0.$$

$\square$

二次曲面的主直径面与主方向

定义 38.1.

- 如果二次曲面的直径面垂直于它的共轭方向，那么这个直径面就称为二次曲面的一个*主直径面*.
- 二次曲面的主直径面就是二次曲面的对称面.
- 二次曲面的主直径面的共轭方向 (即主直径面的法向) 和二次曲面的奇向都称为二次曲面的*主方向*.

回忆,

$$\begin{pmatrix}\Phi_1(X,Y,Z)\\ \Phi_2(X,Y,Z)\\ \Phi_3(X,Y,Z)\\ \Phi_4(X,Y,Z)\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\\ 0\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A_0 & \alpha \\ \hline \alpha^T & a_{44}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} X\\ Y\\ Z\\ \hline 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A_0\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix} \\ \hline a_{14}X + a_{24}Y + a_{34}Z + a_{44}\end{array}\right).$$

二次曲面的主直径面与主方向 (续)

由于主直径面的法方向 $\vec{n} = (\Phi_1(X,Y,Z), \Phi_2(X,Y,Z), \Phi_3(X,Y,Z))$ 即为其共轭方向, 从而存在 $\lambda \neq 0$ 使得

$$\vec{n} = \lambda(X,Y,Z) \iff \begin{pmatrix} \Phi_1(X,Y,Z \\ \Phi_2(X,Y,Z \\ \Phi_3(X,Y,Z \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

反过来, 若存在 $\lambda \neq 0$, 使得 $\vec{n} = \lambda(X,Y,Z)$. 则

$$\begin{aligned} \Phi(X,Y,Z) &= \begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1(X,Y,Z) \\ \Phi_2(X,Y,Z) \\ \Phi_3(X,Y,Z) \\ \Phi_4(X,Y,Z) \end{pmatrix} \\ &= \lambda(X^2 + Y^2 + Z^2) \neq 0. \end{aligned}$$

二次曲面的主直径面与主方向 (续)

可见 $X:Y:Z$ 是非渐近方向, 从而存在以它为共轭方向的径面. 而且该径面的法向量 $\vec{n}$ 平行于 $X:Y:Z$, 因此它还是主径面.
通过上面的讨论, $X:Y:Z$ 为主径面的共轭方向当且仅当它是 A_0 的非零特征值所对应的特征向量.
另一方面, A_0 的零特征值 $\lambda=0$ 所对应的特征向量 $X:Y:Z$, 满足

$$0=A_0\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi_1(X,Y,Z)\\\Phi_2(X,Y,Z)\\\Phi_3(X,Y,Z)\end{pmatrix}.$$

可见此时 $\Phi_1(X,Y,Z)=\Phi_2(X,Y,Z)=\phi_3(X,Y,Z)=0$, 即 $X:Y:Z$ 为奇向. 由于 $\Phi(X,Y,Z)=\Phi_1(X,Y,Z)X+\Phi_2(X,Y,Z)Y+\phi_3(X,Y,Z)Z$, 可见此时 $X:Y:Z$ 必是渐近方向.

二次曲面的主直径面与主方向 (续)

总结

$X:Y:Z$ 是主方向, 要么它是主径面的共轭方向, 对应于 A_0 的非零特征值的特征向量; 要么它是奇向, 对应于 A_0 的零特征值的特征向量. 即, 当且仅当它是 A_0 的特征向量.

从而, 我们称特征方程组

$$A_0\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\iff\begin{cases}(\lambda-a_{11})X-a_{12}Y-a_{13}Z=0\\-a_{21}X+(\lambda-a_{22})Y-a_{23}Z=0\\-a_{31}X-a_{32}Y+(\lambda-a_{33})Z=0.\end{cases}\tag{38.1}$$

为二次曲面的主方向方程组. 其中, λ 满足如下的特征方程

$$|\lambda I-A_0|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & +\lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & +\lambda-a_{33}\end{vmatrix},$$

二次曲面的主直径面与主方向 (续)

展开得到

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \tag{38.2}$$

其中

$$I_1 = \mathrm{tr}A_0, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \det A_0.$$

(38.2)称为二次曲面的特征方程, 其解称为二次曲面的特征值.

对称矩阵的特征值与特征根

命题 38.2. 假设 A 是二次曲面的系数矩阵, 它是对称矩阵. 则 A_0 的特征值都是实数, 且不全为零. 即二次曲面至少有一个非奇主方向.

证明. 假设 λ 是 A_0 的特征值, 相应的特征向量为 $\xi \neq 0$. 定义复向量的埃米尔特内积 $\langle \xi, \eta \rangle = \bar{\xi}^T \eta$, 则 $\langle \xi, \xi \rangle > 0$, 且

$$\lambda \langle \xi, \xi \rangle = \bar{\xi}^T \lambda \xi = \bar{\xi}^T A_0 \xi = \overline{A_0 \xi}^T \xi = \overline{\lambda \xi}^T \xi = \bar{\lambda} \langle \xi, \xi \rangle ,$$

因此 $\lambda = \bar{\lambda}$, 即 λ 为实数.

若特征值全为零, 即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. 则从特征方程, 我们知道

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \\
I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = a_{22}a_{33} - a_{23}^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \\
I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

对称矩阵的特征值与特征根 (续)

因此

$$I_1^2 - 2I_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{23}^2 + 2a_{13}^2 + 2a_{12}^2 = 0,$$

由此可见

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0.$$

这与二次曲面的二次项系数不全为零矛盾. □

命题 38.3. 实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量必定正交.

证明. 假设 A 为实对称矩阵, λ_1, λ_2 是其两不同实特征值, 它们对应的特征向量为 ξ_1, ξ_2, 则

$$\langle \lambda_1 \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle A\xi_1, \xi_2 \rangle = (A\xi_1)^T \xi_2 = \xi_1^T A \xi_2 = \langle \xi_1, A\xi_2 \rangle = \lambda_2 \langle \xi_1, \xi_2 \rangle ,$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 故 $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = 0$, 即 $\xi_1 \perp \xi_2$. □

一些例子

例子 38.1. 求二次曲面
$F(x,y,z)=3x^2+y^2+3z^2-2xy-2xz-2yz+4x+14y+4z-23=0$ 的主方向与主径面.

解. 二次曲面对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1 & 7\\ -1 & -1 & 3 & 2\\ 2 & 7 & 2 & -23\end{pmatrix}$, 从而特征方程为

$$0=|\lambda I-A_0|=\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=\lambda^3-7\lambda^2+(2+8+2)\lambda-0,$$

即

$$\lambda^3-7\lambda^2+12\lambda=0 \implies \lambda_1=0,\quad \lambda_2=3,\quad \lambda_3=4.$$

将它们分别代入到 $\lambda I-A$ 中, 求解得到特征向量

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ Y_1\\ Z_1\end{pmatrix}=0 \implies \begin{cases}X_1-Z_1=0\\ Y_1-2Z_1=0\end{cases} \implies X_1:Y_1:Z_1=1:2:1,$$

一些例子 (续)

由于 $\lambda_1 = 0$, 故主方向 $1:2:1$ 是二次曲面的奇向.
类似求得 $\lambda_2 = 3$ 对应的特征向量 (主方向) 为 $X_2 : Y_2 : Z_2 = 1 : -1 : 1$, 从而与之共轭的主直径面为

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies x - y + z - 1 = 0.$$

类似地, $\lambda_3 = 4$ 对应的特征向量 (主方向) 为 $X_3 : Y_3 : Z_3 = 1 : 0 : -1$, 与之共轭的主直径面为 $x - z = 0$. □

注记. 由于属于不同特征值的特征向量是垂直的, 故 (X_3, Y_3, Z_3) 可取为 $(X_1, Y_1, Z_1) \wedge (X_2, Y_2, Z_2) = (3, 0, -3)$.

例子 38.2. 求二次曲面 $F(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz + 9 = 0$ 的主方向与主径面.

一些例子 (续)

证明. 容易求得二次曲面对应的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, 从而其特征方程为

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0.$$

解得特征根分别为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2.$
将 $\lambda = -1$ 代入 $\lambda I - A_0$ 得到特征向量 (X, Y, Z) 满足

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0 \implies X + Y + Z = 0.$$

这表明, 所有与 $(1,1,1)$ 垂直的方向都是主方向, 或者说所有与平面 $x + y + z = 0$ 平行的方向都是主方向.

一些例子 (续)

由于 λ_3 对应的特征向量 (主方向) 应与 λ_1, λ_2 的特征向量都垂直, 故必为 $X_3 : Y_3 : Z_3 = 1 : 1 : 1$.
假设 $X : Y : Z$ 为平行于 $x + y + z = 0$ 的主方向, 则 $X + Y + Z = 0$, 其共轭的主直径面满足

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies x(Y+Z) + y(X+Z) + z(X+Y) = 0,$$

从而所有满足 $X + Y + Z = 0$ 的平面 $Xx + Yy + Zz = 0$ 都是主直径面.
最后, 与 $X_3 : Y_3 : Z_3 = 1 : 1 : 1$ 共轭的主直径面是

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff x + y + z = 0.$$

一些例子 (续)

□

注记. 容易求得 A 的 $I_3 = 2 \neq 0$, 从而它是中心二次曲面. 其中心方程组为

$$\begin{cases} F_1(x_c, y_c, z_c) = 0 \\ F_2(x_c, y_c, z_c) = 0 \\ F_3(x_c, y_c, z_c) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_c + z_c = 0 \\ x_c + z_c = 0 \\ x_c + y_c = 0 \end{cases} \implies x_c = y_c = z_c = 0.$$

因此与 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 所对应的主方向共轭的主直径面可以描述为过中心 $(0,0,0)$ 且与 $(1,1,1)$ 平行的平面 (或与 $x+y+z=0$ 垂直的平面).

空间直角坐标变换

和二次曲线一样, 二次曲面的方程可以通过选取恰当的直角坐标, 使其变为标准的形式. 考虑空间中两个标架 $\mathcal{F}=\left\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}, \mathcal{F}'=\left\{O';\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right\}$ 都是右手直角标架. 假设空间中一点 P 在 $\mathcal{F},\mathcal{F}'$ 下的坐标分别为 $(x,y,z),(x',y',z')$. 我们分两种情况来讨论它们之间的关系:

- 平移: 即 $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{F}$ 平移而得的直角标架. 若 O' 在 $\mathcal{F}$ 下的坐标为 (x_0,y_0,z_0), 则

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P} \implies \mathcal{T}_0:\begin{cases} x=x_0+x' \\ y=y_0+y' \\ z=z_0+z' \end{cases} \iff \mathcal{T}_0^{-1}:\begin{cases} x'=x'-x_0 \\ y'=y'-y_0 \\ z'=z'-z_0. \end{cases}$$

空间直角坐标变换 (续)

- 旋转: 假设 $\vec{i}'$ 在 $\mathcal{F}$ 下的方向角 (即与 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 的夹角) 分别为 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$, 则

$$\vec{i}'=\cos\alpha_1\vec{i}+\cos\beta_1\vec{j}+\cos\gamma_1\vec{k},$$

类似地, 若 $\vec{j}',\vec{k}'$ 在 $\mathcal{F}$ 下的方向角分别为 $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ 以及 $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$, 则

$$\begin{aligned}\vec{j}'&=\cos\alpha_2\vec{i}+\cos\beta_2\vec{j}+\cos\gamma_2\vec{k},\\ \vec{k}'&=\cos\alpha_3\vec{i}+\cos\beta_3\vec{j}+\cos\gamma_3\vec{k},\end{aligned}$$

这样, 由于

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x'\vec{i}'+y'\vec{j}'+z'\vec{k}',$$

得到

$$\begin{aligned}x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=&\left(x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3\right)\vec{i}+\left(x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3\right)\vec{j}\\&+\left(x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3\right)\vec{k},\end{aligned}$$

空间直角坐标变换 (续)

即

$$\mathcal{T}_{\theta,\phi,\psi}:\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3. \end{cases}$$

注意到, $\vec{i}$ 在 $\mathcal{F}'$ 下的方向角分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; $\vec{j}$ 在 $\mathcal{F}'$ 下的方向角分别为 β_1,β_2,β_3; $\vec{k}$ 在 $\mathcal{F}'$ 下的方向角分别为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$. 事实上, 我们可以列表如下

方向角	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}'$	α_1	β_1	γ_1
$\vec{j}'$	α_2	β_2	γ_2
$\vec{k}'$	α_3	β_3	γ_3

方向余弦	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}'$	$\cos\alpha_1$	$\cos\beta_1$	$\cos\gamma_1$
$\vec{j}'$	$\cos\alpha_2$	$\cos\beta_2$	$\cos\gamma_2$
$\vec{k}'$	$\cos\alpha_3$	$\cos\beta_3$	$\cos\gamma_3$

方向余弦	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}'$	v_{11}	v_{12}	v_{13}
$\vec{j}'$	v_{21}	v_{22}	v_{23}
$\vec{k}'$	v_{31}	v_{32}	v_{33}

空间直角坐标变换 (续)

从而, 我们得到

$$\begin{aligned}
\vec{i} &= \cos\alpha_1\vec{i}' + \cos\alpha_2\vec{j}' + \cos\alpha_3\vec{k}',\\
\vec{j} &= \cos\beta_1\vec{i}' + \cos\beta_2\vec{j}' + \cos\beta_3\vec{k}',\\
\vec{k} &= \cos\gamma_1\vec{i}' + \cos\gamma_2\vec{j}' + \cos\gamma_3\vec{k}',
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\\
&= (x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1)\vec{i}' + (x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2)\vec{j}'\\
&\quad + (x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3)\vec{k}'
\end{aligned}$$

空间直角坐标变换 (续)

故

$$\mathcal{T}_{\theta,\phi,\psi}^{-1}:\begin{cases} x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 \\ y' = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 \\ z' = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3. \end{cases}$$

标架的旋转公式 $\mathcal{T}_{\theta,\phi,\psi}$ 以及其逆公式 $\mathcal{T}_{\theta,\phi,\psi}^{-1}$ 中的系数并不是独立的. 为了叙述方便, 我们将利用方向余弦的表格中的 v_{ij} 来表示方向余弦, 其对应的矩阵记为 $T=(v_{ij})$, 则由于 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 都是彼此正交的单位向量而且还是右手系, 我们知道

$$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1,\quad \left\langle\vec{i},\vec{j}\right\rangle=\left\langle\vec{i},\vec{k}\right\rangle=\left\langle\vec{j},\vec{k}\right\rangle=0,\quad \left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)=1.$$

即

$$\begin{aligned} v_{11}^2+v_{21}^2+v_{31}^2&=1, & v_{11}v_{12}+v_{21}v_{22}+v_{31}v_{32}&=0,\\ v_{12}^2+v_{22}^2+v_{32}^2&=1, & v_{11}v_{13}+v_{21}v_{23}+v_{31}v_{33}&=0,\\ v_{13}^2+v_{23}^2+v_{33}^2&=1, & v_{12}v_{13}+v_{22}v_{23}+v_{32}v_{33}&=0, \end{aligned}$$

空间直角坐标变换 (续)

而且

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix} = 1.$$

这表明 T 是一个正交矩阵, 而且其行列式为 1. 即 $TT^t = I, |T| = 1$. 因此 $T^{-1} = T^t$. 另一个事实是, T 可由三个参数决定. 事实上, 由于

$$v_{11}^2 + v_{21}^2 + v_{31}^2 = 1,$$

我们可以假设

$$\begin{cases} v_{11} = \sin\phi\cos\theta \\ v_{21} = \sin\phi\sin\theta \qquad \phi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi). \\ v_{31} = \cos\phi, \end{cases}$$

空间直角坐标变换 (续)

接下来, (v_{12}, v_{22}, v_{32}) 在垂直于 (v_{11}, v_{21}, v_{31}) 的平面上, 可以假设它是 $(\sin\theta, -\cos\theta, 0)$ 绕 (v_{11}, v_{21}, v_{31}) 逆时针旋转 $\psi \in [0, 2\pi)$ 而得到的, 则

$$\begin{cases} v_{12}^2 + v_{22}^2 + v_{32}^2 = 1 \\ v_{12}\sin\theta - v_{22}\cos\theta = \cos\psi \\ v_{12}v_{11} + v_{22}v_{21} + v_{32}v_{31} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} v_{12} = \cos\psi\sin\theta + \sin\psi\cos\theta\cos\phi \\ v_{22} = -\cos\psi\cos\theta + \sin\psi\sin\theta\cos\phi \\ v_{33} = -\sin\psi\sin\phi. \end{cases}$$

从而 $(v_{13}, v_{23}, v_{33}) = (v_{11}, v_{21}, v_{31}) \wedge (v_{12}, v_{22}, v_{32})$, 得到

$$\begin{cases} v_{13} = \cos\psi\cos\theta\cos\phi - \sin\psi\sin\theta \\ v_{23} = \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\cos\theta \\ v_{33} = -\cos\psi\sin\phi. \end{cases}$$

空间直角坐标变换 (续)

现在, 考虑先旋转再平移标架后的变换为 $\mathcal{T} := \mathcal{T}_0 \circ \mathcal{T}_{\theta,\phi,\psi}$, 并假设 $P(x, y, z)$ 通过旋转后的坐标为 (x_1, y_1, z_1), 再经过平移后的坐标为 (x', y', z'), 则根据平移与旋转的坐标变换公式

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0 \\ y = y_1 + y_0 \\ z = z_1 + z_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = v_{11}x' + v_{21}y' + v_{31}z' \\ y_1 = v_{12}x' + v_{22}y' + v_{32}z' \\ z_1 = v_{13}x' + v_{23}y' + v_{33}z', \end{cases}$$

因此

$$\mathcal{T} : \begin{cases} x = v_{11}x' + v_{21}y' + v_{31}z' + x_0 \\ y = v_{12}x' + v_{22}y' + v_{32}z' + y_0 \\ z = v_{13}x' + v_{23}y' + v_{33}z' + z_0, \end{cases} \quad \mathcal{T}^{-1} : \begin{cases} x' = v_{11}(x - x_0) + v_{12}(y - x_0) + v_{13}(z - x_0) \\ y' = v_{21}(x - y_0) + v_{22}(y - y_0) + v_{23}(z - y_0) \\ z' = v_{31}(x - z_0) + v_{32}(y - z_0) + v_{33}(z - z_0). \end{cases}$$

二次曲面的化简

为了计算二次曲面在 $\mathcal{T}$ 变换下的方程, 我们仍然采用矩阵形式. 首先, 将 $\mathcal{T}$ 改写为矩阵形式, 得到

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

为了方便计算, 我们可以引入

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^t, \quad \beta' = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}^t, \quad \tilde{T} = \left(\begin{array}{c|c} T^t & \alpha_0^t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

则 $\mathcal{T}$ 的矩阵形式等价于

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \tilde{T} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \hline 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \beta \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} T^t & \alpha_0^t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \beta' \\ \hline 1 \end{pmatrix}.$$

二次曲面的化简 (续)

这样, 我们将其代入到二次曲面的方程,

$$0 = \left(\begin{array}{c|c} \beta^t & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A_0 & \alpha^t \\ \hline \alpha & a_{44} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \beta \\ \hline 1 \end{array} \right) = \beta^t A_0 \beta + 2\beta\alpha^t + a_{44},$$

其中 $\alpha = \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$, 得到

$$0 = \left(\begin{array}{c|c} \beta'^t & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline \alpha_0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A_0 & \alpha^t \\ \hline \alpha & a_{44} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} T^t & \alpha_0^t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \beta' \\ \hline 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \beta'^t & 1 \end{array} \right) \tilde{A} \left(\begin{array}{c} \beta' \\ \hline 1 \end{array} \right),$$

从而,

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}_0 & \tilde{\alpha}_0^t \\ \hline \tilde{\alpha}_0 & \tilde{a}_{44} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline \alpha_0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A_0 & \alpha^t \\ \hline \alpha & a_{44} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} T^t & \alpha_0^t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

直接计算, 得到

$$\tilde{A}_0 = T A_0 T^t, \quad \tilde{\alpha} = (\alpha + \alpha_0 A_0) T^t, \quad \tilde{a}_{44} = F(x_0, y_0, z_0).$$

由此, 仿照二次曲线的情形, 容易知道

二次曲面的化简 (续)

- 平移不改变二次项的系数;
- 旋转不改变常数项.

在二次曲线的化简中, 我们证明过消去交叉项的几何意义就是将轴转动到主方向. 现在, 我们直接利用如下代数结论, 将二次曲面的轴转到它的主方向, 消去交叉项.

命题 39.1. 任何 n 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 都是实数, 而且可以选取对应的特征向量, 使得它们作为行组成的矩阵是一个正交矩阵 T. 这样

$$TA = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)T \iff TAT^t = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

特别地, 二次曲面的二阶项系数矩阵 A_0 也是一个对称矩阵, 因此它必有三个实特征值, 将它们对应的特征向量 (即主方向) 作为行向量组成矩阵 T, 则

$$\tilde{A}_0 = TA_0T^t = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

二次曲面的化简 (续)

因此, 我们若取坐标变换

$$\mathcal{T}_{\theta,\phi,\psi}:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_{11}&v_{21}&v_{31}\\v_{12}&v_{22}&v_{32}\\v_{13}&v_{23}&v_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=T^t\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix},$$

即变换矩阵是主方向组成的列向量.

二次曲面方程的化简步骤

若作单位主方向为列向量构成的旋转变换, 变换后的二次项系数变为主方向对应的特征值构成的对角矩阵. 而由于旋转后的常数项不变, 故在通过旋转化简方程的过程中, 只需计算一次项系数.

然后, 再利用平移将其配方, 即可得到最终化简后的方程.

具体而言, 二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 的方程的化简步骤如下:

二次曲面的化简 (续)

1. 计算 A_0 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 以及对应的特征向量, 将它们作为列向量组成矩阵 T, 注意我们要求 $|T| = 1$;
2. 构造坐标变换 $(x, y, z) = (x', y', z')T^t$, 则新坐标系中的二次项无交叉项, 假设方程变为

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0.$$

下面, 分情况讨论如下:

- 若 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都不为零, 则通过平移 (配方),

$$x'' = x' + a'_{14}, \quad y'' = y' + a'_{24}, \quad z'' = z' + a'_{34},$$

可将方程进一步化为

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + a'_{44} = 0, \quad a'_{44} = a_{44} - \lambda_1 a'^2_{14} - \lambda_2 a'^2_{24} - \lambda_3 a'^2_{34}.$$

此时, 根据情况可以得到标准方程如下 ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 异号时, 始终假设 $\lambda_3 < 0$):

二次曲面的化简 (续)

序号	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	$a'_{44}\lambda_3$	标准方程	标准图形
1	同号	>0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	虚椭球面
2	同号	$=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	一个点或虚母线二次锥面
3	同号	<0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	椭球面
4	不同号	>0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	单叶双曲面
5	不同号	$=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	二次锥面
6	不同号	<0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	双叶双曲面

- 若 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 有一个为零, 不妨设 $\lambda_3 = 0$. 此时通过平移 ($a'_{34} \neq 0$)

$$x'' = x' + a'_{14}, \quad y'' = y' + a'_{24}, \quad z'' = z' + \frac{a'_{44}}{2a'_{34}}, \quad a'_{44} = a_{44} - \lambda_1 a'^2_{14} - \lambda_2 a'^2_{24},$$

可将方程进一步化为

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2a'_{34} z'' = 0,$$

或平移 ($a'_{34} = 0$)

$$x'' = x' + a'_{14}, \quad y'' = y' + a'_{24}, \quad z'' = z', \quad a'_{44} = a_{44} - \lambda_1 a'^2_{14} - \lambda_2 a'^2_{24},$$

二次曲面的化简 (续)

可将方程进一步化为

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a'_{44} = 0,$$

此时, 根据情况可以得到标准方程如下:

序号	$\lambda_1\lambda_2$	λ_3	a'_{34}	$\lambda_1 a'_{44}$	标准方程	标准图形
7	>0	$=0$	$\neq 0$		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	椭圆抛物面
8	>0	$=0$	$=0$	>0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	虚椭圆柱面
9	>0	$=0$	$=0$	<0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	椭圆柱面
10	<0	$=0$	$=0$	$=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	一条实直线或一对共轭虚平面
11	<0	$=0$	$\neq 0$		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	双曲抛物面
12	<0	$=0$	$=0$	$\neq 0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$	双曲柱面
13	<0	$=0$	$=0$	$=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	一对相交平面

二次曲面的化简 (续)

- 若 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中有两个为零, 不妨设 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. 则通过 O'-$x'y'$ 坐标面上的直角坐标变换 (若 a'_{14}, a'_{24} 不全为零)

$$x'' = x' \cos\theta + y' \sin\theta + \frac{a_{44}}{2\sqrt{a'^2_{14} + a'^2_{24}}}, \quad y'' = -x' \sin\theta + y' \cos\theta, \quad z'' = z' + a'_{34},$$

其中

$$\cos\theta = \frac{a'_{14}}{\sqrt{a'^2_{14} + a'^2_{24}}}, \quad \sin\theta = \frac{a'_{24}}{\sqrt{a'^2_{14} + a'^2_{24}}},$$

可将方程进一步化为

$$\lambda_3 z'' + 2\sqrt{a'^2_{14} + a'^2_{24}} x'' = 0$$

或通过平移 (若 $a'_{14} = a'_{24} = 0$)

$$x'' = x', \quad y'' = y', \quad z'' = z' + a'_{34},$$

可将方程进一步化为

$$\lambda_3 z''^2 + a_{44} = 0$$

此时, 根据情况可以得到标准方程如下:

二次曲面的化简 (续)

序号	λ_1, λ_2	a'_{14}, a'_{24}	$\lambda_3 a_{44}$	标准方程	标准图形
14	$=0$	不全为零		$z^2=2px$	抛物柱面
15	$=0$	全为零	>0	$z^2=-1$	一对平行的共轭虚平面
16	$=0$	全为零	<0	$z^2=1$	一对平行平面
17	$=0$	全为零	$=0$	$z^2=0$	一对重合平面

综上讨论, 任意一个三元二次方程都可以通过标架的旋转与平移将其化为如上的 17 种类型的标准方程之一.

一些例子

例子 39.1. 化简二次曲面的方程
$F(x,y,z)=2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0.$

解. 由 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, 我们知道 $I_1=\mathrm{tr}A_0=7$, $I_2=5+5+0=10$, $I_3=0$, 因此特征方程为

$$\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda=0 \implies \lambda_1=5, \quad \lambda_2=2, \quad \lambda_3=0.$$

令 $\lambda=\lambda_1=5$, 我们得到特征向量 (X,Y,Z) 满足的方程

$$\begin{cases} 3X-2Y-1Z=0 \\ -2X+3Y-1Z=0 \\ -1X-1Y+2Z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} X+Y-2Z=0 \\ 5Y-5Z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} Y=Z \\ X=Z \end{cases}$$

一些例子 (续)

故对应的单位主方向为 $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^t$. 完全类似地, 求得 λ_2, λ_3 对应的单位主方向为 $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^t$, $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^t$, 这样我们得到旋转公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

这样, 原方程化为 (注意旋转不改变常数项, 二次项的交叉项消失)

$$\begin{aligned} 5x'^2 + 2y'^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) + 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) \\ - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{2}{\sqrt{6}}y'\right) + 3 = 0. \end{aligned}$$

整理得到

$$5x'^2 + 2y'^2 + \sqrt{6}y' + 5\sqrt{2}z' + 3 = 0.$$

一些例子 (续)

配方得到

$$5x'^2 + 2\left(y' + \sqrt{6}/4\right)^2 + 5\sqrt{2}\left(z' + 9\sqrt{2}/40\right) = 0.$$

从而, 若平移

$$x'' = x', \quad y'' = y' + \frac{\sqrt{6}}{4}, \quad z'' = z' + \frac{9\sqrt{2}}{40},$$

则得到

$$5x''^2 + 2y''^2 + 5\sqrt{2}z'' = 0,$$

它是一个椭圆抛物面.
将原方程化简的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' = \frac{1}{\sqrt{3}}x'' + \frac{1}{\sqrt{6}}y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'' - \frac{1}{40} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' = \frac{1}{\sqrt{3}}x'' + \frac{1}{\sqrt{6}}y'' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'' - \frac{19}{40} \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{2}{\sqrt{6}}y' = \frac{1}{\sqrt{3}}x'' - \frac{2}{\sqrt{6}}y'' + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

□

利用主直径面化简方程

如果特征根互不相同且不为零, 则对应的主方向可以作为直径面的共轭方向而且是彼此垂直的. 这样, 我们得到三个两两垂直的主直径面 $\pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$. 若将它们分别作为新坐标系的 O'-$y'z'$ 面、O'-$x'z'$ 面、O'-$x'y'$ 面. 我们可以求得其坐标变换公式.
假设空间中任意点 $P(x, y, z)$ 到平面 π_i 距离为 d_i, P 在新坐标系 O'-$x'y'z'$ 下的坐标为 (x', y', z'), 则

$$d_1 = |x'| = \frac{|A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}},$$
$$d_2 = |y'| = \frac{|A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$
$$d_3 = |z'| = \frac{|A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3|}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2 + C_3^2}},$$

利用主直径面化简方程 (续)

由此得到

$$\begin{cases} x' = \dfrac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}, \\ y' = \dfrac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}, \\ z' = \pm\dfrac{A_3x+B_3y+C_3z+D_3}{\sqrt{A_3^2+B_3^2+C_3^2}}, \end{cases}$$

其中符号的取法要使得系数行列式 T 大于零, 即 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} > 0$ 时取正, 否则取负.

例子 39.2. 化简二次曲面的方程
$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z + 10 = 0.$

利用主直径面化简方程 (续)

解. 由 $A=\begin{pmatrix}1&-3&-1&-3\\-3&1&1&3\\-1&1&5&-3\\-3&3&-3&10\end{pmatrix}$, 知道 $I_1=\mathrm{tr}A_0=7$, $I_2=4+4-8=0$,
$I_3=\det A_0=-36$, 故特征方程为 $\lambda^3-7\lambda^2+36=0 \implies \lambda^2(7-\lambda)=36 \implies \lambda_1=-2 \implies (\lambda+2)(\lambda^2-9\lambda+18)=0 \implies \lambda_2=3, \lambda_3=6$.
由于是三个非零且互不相同的特征值, 我们可以利用主直径面作为坐标面而得到坐标变换公式.
首先, 特征向量 (主方向) 分别为

$$\vec{v}_1=(1,1,0),\quad \vec{v}_2=(1,-1,1),\quad \vec{v}_3=\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2=(1,-1,-2).$$

直接计算主直径面分别为

$$\begin{pmatrix}x&y&z&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=0 \iff \begin{pmatrix}x&y&z&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3&6\\-2&-3&-6\\0&3&-12\\0&-9&0\end{pmatrix}=0,$$

利用主直径面化简方程 (续)

即

$$x+y=0,\quad x-y+z-3=0,\quad x-y-2z=0.$$

由此, 我们得到坐标变换公式 (注意行列式大于零的要求)

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y'=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-\sqrt{3} \\ z'=\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{1}{\sqrt{6}}y-\frac{2}{\sqrt{6}}z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y'+\sqrt{3} \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y'+\sqrt{3} \\ z' \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'+1 \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{1}{\sqrt{6}}z'-1 \\ z=\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{2}{\sqrt{6}}z'+1. \end{cases}$$

利用主直径面化简方程 (续)

明显, 该坐标变换可以理解为由 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 依次作为列向量构成的矩阵 T 诱导的旋转变换, 再作平移 (到中心的) 变换. 因此该变换下二次项的交叉项消失. 因为新标架下的三个坐标平面是对称面, 因而其交点必是曲面的中心 (作为新标架的原点), 故一次项也消失. 这样, 我们知道方程可化简为

$$-2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 + F(x_c, y_c, z_c) = 0.$$

这是因为, 在先旋转再平移的变换 $\mathcal{T}$ 下, 常数项等于 $F(x_0, y_0, z_0)$. 由前面的坐标变换公式, 我们知道中心坐标为 $(1, -1, 1)$, 故 $F(1, -1, 1) = 1$, 故最终化简后的方程为

$$-2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 + 1 = 0.$$

它是一个双叶双曲面. □

例子 39.3. 化简二次曲面的方程
$F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy + 4xz - 8yz + 6x + 6z - 5 = 0.$

利用主直径面化简方程 (续)

证明. 由于 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2&3\\-2&4&-4&0\\2&-4&4&3\\3&0&3&-5\end{pmatrix}$, 得到 $I_1=\mathrm{tr}A_0=9$, $I_2=0$, $I_3=0$. 故特征方程为

$$\lambda^3-9\lambda^2=0 \implies \lambda_1=9,\quad \lambda_2=\lambda_3=0.$$

解得 λ_1 对应的单位特征向量为 $\vec{v}_1=\frac{1}{3}(1,-2,2)$; 二重特征根 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 确定的无穷多主方向 (垂直于法向量 $\vec{n}=(1,-2,2)$) 中任取一个单位向量 $\vec{v}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)$, 则 $\vec{v}_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,5,4)$. 以它们作为列向量构成矩阵 T, 得到坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}\\-\frac{2}{3}&0&\frac{5}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \implies \begin{cases}x=\frac{1}{3}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'+\frac{2}{3\sqrt{5}}z'\\y=-\frac{2}{3}x'+\frac{5}{3\sqrt{5}}z'\\z=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'+\frac{4}{3\sqrt{5}}z'.\end{cases}$$

利用主直径面化简方程 (续)

化简后的方程为

$$9x'^2+6\left(\frac{1}{3}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'+\frac{2}{3\sqrt{5}}z'\right)+6\left(\frac{2}{3}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'+\frac{4}{3\sqrt{5}}z'\right)-5=0,$$

即

$$9x'^2+6x'+\frac{6}{\sqrt{5}}y'+\frac{12}{\sqrt{5}}z'-5=0 \iff 9\left(x'^2+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{6}{\sqrt{5}}(y'+2z'-\sqrt{5})=0.$$

由于每个括号里的坐标与另一个括号内的坐标不同名, 故其法向量 (坐标系数构成)$(1,0,0)$、$(0,2,1)$ 互相垂直, 相应的单位向量就可作为新坐标系的基向量, 即标架的变换

$$\begin{cases} x''=x'+\frac{1}{3}, \\ y''=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(y'+2z'-\sqrt{5}\right) \\ z''=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2y'+z') \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x''-\frac{1}{3} \\ y''+1 \\ z'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

利用主直径面化简方程 (续)

这里关于 y'', z'' 的坐标变换也可理解为在 O'-$y'z'$ 平面的一个旋转符合上平移. 这样, 方程最终化简为

$$3x''^2 + 2y'' = 0,$$

它是一个抛物面柱面. 最后, 坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y' + \dfrac{2}{3\sqrt{5}}z' \\ \quad = \dfrac{1}{3}\left(x'' - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\left((y''+1)/\sqrt{5} - 2z''/\sqrt{5}\right) + \dfrac{2}{3\sqrt{5}}\left(2(y''+1)/\sqrt{5} + z''/\sqrt{5}\right) \\ \quad = \dfrac{1}{3}(x'' + 2y'' - 2z'' + 5/3) \\ y = -\dfrac{2}{3}x' + \dfrac{5}{3\sqrt{5}}z' = \dfrac{1}{3}\left(-2x'' + 2y'' + z'' + 8/3\right) \\ z = \dfrac{2}{3}x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' + \dfrac{4}{3\sqrt{5}}z' = \dfrac{1}{3}\left(2x'' + y'' + 2z'' + 1/3\right). \end{cases}$$

二次曲面的不变量系统

给定二次曲面 $F(x,y,z)=0$, 假设其对应的系数矩阵为 $A=(a_{ij})_{4\times 4}$. 在上节我们利用直角坐标变换公式

$$\mathcal{T}:\begin{cases} x=v_{11}x'+v_{21}y'+v_{31}z'+x_0=\cos\alpha_1 x'+\cos\alpha_2 y'+\cos\alpha_3 z'+x_0\\ y=v_{12}x'+v_{22}y'+v_{32}z'+y_0=\cos\beta_1 x'+\cos\beta_2 y'+\cos\beta_3 z'+x_0\\ z=v_{13}x'+v_{23}y'+v_{33}z'+z_0=\cos\gamma_1 x'+\cos\gamma_2 y'+\cos\gamma_3 z'+x_0,\end{cases}$$

可以将其化为 17 种标准形式之一. 自然地, 在这种变换过程种, 方程所刻画的几何性质是保持不变的. 这些刻画几何不变性的量正是二次曲面的不变量, 我们希望证明这些不变量完全决定了二次曲面.

我们知道, 直角坐标变换将系数矩阵 A 变为

$$\tilde{A}=\tilde{T}^t A\tilde{T}=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & 0\\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & 0\\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & 0\\ x_0 & y_0 & z_0 & 1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & x_0\\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & y_0\\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & z_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

二次曲面的不变量系统 (续)

定义 40.1. 假设 f 是由二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 中的系数组成的一个非常值函数, 即 $f=f(A)$. 如果经过直角坐标变换 $\mathcal{T}$, 有 $f(A)=f(\tilde{A})$, 则称 f 为二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 的一个不变量, 如果这个函数 f 只在旋转变换下不变, 则称其为二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 的一个半不变量.

前面我们看到, 二次曲面二次项系数矩阵 A_0 的特征值是不变量, 因此由它们定义的量都是不变量, 即 $I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}A_0$, $I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3$, $I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det A_0$ 都是不变量. 然而我们已经看到, 这些不变量只能确定 A_0 的特征值, 它们只是 A 在 $\mathcal{T}$ 下的部分不变量, 即二次曲面方程最简式中二次项的系数, 还不能完全决定最简式中的常数项和一次项系数 (涉及平移).

为了研究二次曲面的完全不变量, 我们还需要考虑到系数 $a_{14},a_{24},a_{34},a_{44}$ 这些一次项和常数项. 事实上, 我们可以利用下面的行列式来得到半不变量 (证明见后)

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix} = -(a_{44}\lambda^3-K_1\lambda^2+K_2\lambda-I_4), \tag{40.1}$$

二次曲面的不变量系统 (续)

其中

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$I_4 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

回忆, A_0 的特征方程也称为二次曲面的特征方程, 即

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0.$$

二次曲面的不变量系统 (续)

其中

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \mathrm{tr} A_0 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\
I_2 &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \\
I_3 &= \det A_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

定理 40.2. 假设二次曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的系数矩阵为 A, 则 I_1, I_2, I_3, I_4 都是二次曲面在坐标变换 $\mathcal{T}$ 下的不变量.

证明. 注意到, 二次曲面经过坐标变换 $\mathcal{T}$ 后的系数矩阵为

$$
\tilde{A} = \tilde{T}^t A \tilde{T}, \quad \tilde{T} = \left(\begin{array}{c|c} T^t & \alpha_0^t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad \alpha_0 = (x_0, y_0, z_0).
$$

二次曲面的不变量系统 (续)

故新方程的二次项系数矩阵 $\tilde{A}_0 = TA_0T^t$, 从而

$$|\lambda I - \tilde{A}_0| = |\lambda I - T^t A_0 T| = |T^t(\lambda I - A_0)T| = |T|^2|\lambda I - A_0|,$$

可将特征多项式在 $\mathcal{T}$ 下是不变的, 即 I_1, I_2, I_3 是不变量.
最后, 注意到

$$|\tilde{A}| = |\tilde{T}|^2|A| = |T|^2|A| = |A|,$$

这里, 我们应用了上三角分块矩阵的行列式等于对角块矩阵的行列式之乘积 (线性代数结论, 试用初等变换给出一个证明, 或者参考这里). 由于 $\mathcal{T}$ 是保持右手系的, 故 $|T| = 1$, 从而 $I_4 = \det A$ 也是不变量. □

定理 40.3. 假设二次曲面 $F(x,y,z) = 0$ 的系数矩阵为 A, 则 K_1, K_2 都是二次曲面在坐标变换 $\mathcal{T}$ 下的半不变量.

证明. 首先证明关于 K_1, K_2 的行列式公式(40.1)成立.

二次曲面的不变量系统 (续)

事实上, 根据行列式基本性质, 容易知道

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & \lambda - a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & 0 \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & \lambda \end{vmatrix},$$

而按照行列式的展开公式, 我们知道

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & \lambda - a_{44} \end{vmatrix} &= \lambda^4 - \lambda^3 \mathrm{tr} A \\ &+ \lambda^2 \left(\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) \\ &- \lambda \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + \det A \end{aligned}$$

二次曲面的不变量系统 (续)

$$= \lambda^4 - \lambda^3(I_1 + a_{44}) + \lambda^2\left(K_1 + I_2\right) - \lambda(K_2 + I_3) + I_4,$$

以及

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & 0 \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3\right).$$

由此易得结论.

现在, 注意到旋转变换下 $\tilde{T} = \left(\begin{array}{c|c} T^t & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$, 它满足 $\tilde{T}^t\tilde{T} = I$. 因此由 $\tilde{A} = \tilde{T}^t A\tilde{T}$, 知道

$$|\lambda I - \tilde{A}| = |\tilde{T}^t(\lambda I - A)\tilde{T}| = |\tilde{T}|^2|\lambda I - A| = |\lambda I - A|,$$

可见 $|\lambda I - A|$ 的系数是一个半不变量, 而我们以及证明 I_1, I_2, I_3 是不变量, 它们当然也是半不变量, 故(40.1)中的系数都是半不变量, 特别地 K_1, K_2(以及 a_{44}) 都是半不变量. □

二次曲面的不变量系统 (续)

定理 40.4. 当 $I_3 = I_4 = 0$ 时, K_2 也是平移变换下的不变量; 当 $I_2 = I_3 = I_4 = K_2 = 0$ 时, K_1 也是平移变换下的不变量.

利用二次曲面的不变量化简方程

是否 I_1, I_2, I_3, I_4 这些不变量以及 K_1, K_2 这些半不变量能够完全确定二次曲面?
我们知道, 二次曲面的一般方程可以化为如下几种情形之一:

1. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + a_{44} = 0$;
2. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2a_{34} z = 0$;
3. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a_{44} = 0$;
4. $\lambda_3 z^2 + 2a_{14} x = 0$;
5. $\lambda_3 z^2 + a_{44} = 0$.

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 A_0 的特征值, 而且上述情况中的系数除了常数项可能为零以外, 其它系数都不为零.
由于直角坐标系的选择不影响不变量, 我们只需证明上述各种情况中的系数可以由不变量表示出来即可. 而且, 由于特征值完全由 I_1, I_2, I_3 决定, 因此只需看其它系数.

1. $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, $I_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 a_{44} = I_3 a_{44}$, 故 $a_{44} = \frac{I_4}{I_3}$;
2. $I_2 = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$, $I_3 = 0$, $I_4 = -\lambda_1\lambda_2 a_{34}^2 = -I_2 a_{34}^2$, 故 $a_{34} = \pm\sqrt{-I_4/I_2}$;
3. $I_2 = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$, $I_3 = I_4 = 0$, 故 K_2 是不变量, 由于 $K_2 = \lambda_1\lambda_2 a_{44} = I_2 a_{44}$, 知 $a_{44} = \frac{K_2}{I_2}$;

利用二次曲面的不变量化简方程 (续)

4. $I_1 = \lambda_3 \neq 0, I_2 = I_3 = I_4 = 0$, 故 K_2 是不变量, 由 $K_2 = -\lambda_3 a_{14}^2$, 知 $a_{14} = \pm\sqrt{-K_2/I_1}$;
5. $I_1 = \lambda_3 \neq 0, I_2 = I_3 = I_4 = K_2 = 0$, 故 K_1 是不变量, 由 $K_1 = \lambda_3 a_{44}$, 知 $a_{44} = K_1/I_1$.

由此, 利用二次曲面的完全不变量系统 (即可以完全决定二次曲面类型的不变量或者半不变量构成的系统), 可以将二次曲面分类如下:

特征值条件	不变量条件	最简方程	中心类型	标准方程	标准图形
同号	$I_3I_4 < 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$	独心	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	椭球面
	$I_3I_4 > 0$			$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	虚椭球面
	$I_3I_4 = 0$			$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	虚二次锥面
异号	$I_3I_4 > 0$			$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	双叶双曲面
	$I_3I_4 < 0$			$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	单叶双曲面
	$I_3I_4 = 0$			$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	二次锥面
一个为零	$I_2 > 0, I_4 < 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{-I_4/I_2}z = 0$	无心	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm 2z$	椭圆抛物面
	$I_2 < 0, I_4 > 0$			$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 2z$	双曲抛物面
	$I_2 > 0, I_4 = 0, K_2 > 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + K_2/I_2 = 0$	线心	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	虚椭圆柱面
	$I_2 > 0, I_4 = 0, K_2 = 0$			$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	一对虚相交平面
	$I_2 > 0, I_4 = 0, K_2 < 0$			$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	椭圆柱面
	$I_2 < 0, I_4 = 0, K_2 \neq 0$			$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	双曲柱面
	$I_2 < 0, I_4 = 0, K_2 = 0$			$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	一对相交平面

利用二次曲面的不变量化简方程 (续)

特征值条件	不变量条件	最简方程	中心类型	标准方程	标准图形
两个为零	$I_2 = I_3 = 0, K_2 \neq 0$	$I_1 z^2 \pm 2\sqrt{-K_2/I_1}x = 0$	面心	$z^2 = 2px$	抛物柱面
	$I_2 = I_3 = 0, K_2 = 0, K_1 I_1 > 0$	$I_1 z^2 + K_2/I_2 = 0$		$z^1 = -1$	一对平行的共轭虚平面
	$I_2 = I_3 = 0, K_2 = 0, K_1 I_1 < 0$			$z^1 = 1$	一对平行平面
	$I_2 = I_3 = 0, K_2 = 0, K_1 = 0$			$z^1 = 0$	一对重合平面

课后习题

1. P178:1, 3, 5, 7;
2. P175: 1,3; P176: 5,7;
3. P185: 1(1), (3);
4. P197: 1,3,5;