微积分授课讲义

艾万君

上海交通大学 • 数学科学学院

2018 年 11 月

授课教师基本信息

学院	数学科学学院
姓名	艾万君
联系方式	aiwanjun@sjtu.edu.cn
授课学期	秋
办公室	数学楼 1201
上课时间	每周二/四 18:00-20:20
上课地点	中院 213
课后时间	每周五下午 14:00-17:00

概要

- 第一类曲线积分与曲面积分
  - 第一类曲线积分
  - 第一类曲面积分
- 第二类曲线积分与曲面积分
  - 第二类曲线积分
  - 第二类曲面积分
- Green 公式
  - 平面联通区域边界的定向
  - Green 公式及其证明
  - Green 公式的应用
- Gauss 公式与 Stokes 公式
  - 外微分的公理化定义

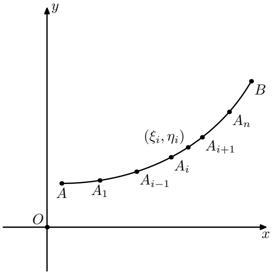
概要续

- Gauss 公式
- Stokes 公式
- Gauss 公式与 Stokes 公式的向量值形式

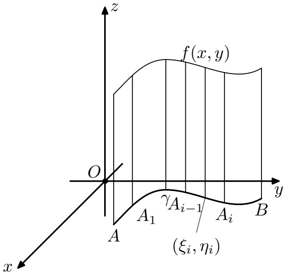
- 课后习题

第一类曲线积分的定义及其几何意义

第一类曲线积分的物理意义为密度为 $\mu(x,y)$ 的平面曲线 $\gamma(s)=\gamma(x(s),y(s))$ 的质量. 几何上可看作以 γ 为底边 $\mu(x,y)$ 为高的柱面的面积. 严格的定义和一元函数的定积分类似.



(a) 平面曲线的质量



(b) 柱面的面积

第一类曲线积分的定义及其几何意义续

定义 1.1. 假设 γ 是 Oxy 平面上以 A, B 为端点的光滑曲线, 函数 $f(x,y)$ 在 γ 上有界. 若对任意的分划 $\{A_i : A_i \in \gamma\}_{i=1}^n$, $A_0 = A, A_n = B$, 以及任意的点列 $B_i(\xi_i, \eta_i) \in \gamma_i$, 都存在极限

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i, \quad \lambda = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \Delta s_i := |\overparen{A_{i-1}A_i}| \right\}.$$

则称函数 $f(x,y)$ 在曲线 γ 上可积, I 称为 f 在 γ 上的第一类曲线积分. 记作

$$I = \int_\gamma f(x,y) ds, \text{ 或者 } I = \oint_\gamma f(x,y) ds, \quad \text{当 } \gamma \text{ 为闭曲线时.}$$

第一类曲线积分的基本性质

曲线 γ 上的第一类曲线积分值是一个数. 且具有如下基本性质:

- **线性性**: 假设 f, g 都在曲线 γ 上可积, 则
$$\int_\gamma \big(af(x,y)+bg(x,y)\big)ds = a\int_\gamma f(x,y)ds + b\int_\gamma g(x,y)ds;$$
- **路径可加性**: 假设 $\gamma=\gamma_1\sqcup\gamma_2$, 则 f 在 γ 上可积当且仅当 f 同时在 γ_1 和 γ_2 可积, 且
$$\int_\gamma f(x,y)ds = \int_{\gamma_1} f(x,y)ds + \int_{\gamma_2} f(x,y)ds.$$
- **中值定理**: 设函数 f 是光滑曲线 $\gamma=\bar\gamma$ 上的连续函数, 则存在 $(\xi,\eta)\in\gamma$, 使得
$$\int_\gamma f(x,y)ds = f(\xi,\eta)|\gamma|, \quad |\gamma| = \int_\gamma 1ds.$$

第一类曲线积分的计算

假设曲线 γ 由参数方程

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b],$$

给出, 其中 $x(t), y(t) \in C^1([a, b])$, 且对任意的 $t \in [a, b]$, $\nabla\gamma(t) = (x'(t), y'(t)) \neq 0$. 回忆, 曲线 γ 的弧长微元为

$$ds = |\gamma'(t)|ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

从而,

$$\int_\gamma f(x, y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

例子 1. 计算曲线积分

$$I_1 = \oint_{x^2+y^2=r^2} ds, \quad I_2 = \oint_{x^2+y^2=r^2} r ds.$$

并解释其几何意义.

例子 1. 计算曲线积分

$$I_1 = \oint_{x^2+y^2=r^2} ds, \quad I_2 = \oint_{x^2+y^2=r^2} r ds.$$

并解释其几何意义.

证明. 我们首先将积分路径参数化 $x(\theta) = r\cos\theta, y(\theta) = r\sin\theta,$ $\theta \in [0, 2\pi]$. 易见

$$ds = \sqrt{r^2\sin^2(\theta) + r^2\cos\theta^2(\theta)d\theta} = r d\theta,$$

从而

$$I_1 = \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = 2\pi r^2.$$

几何意义是 $I_1, I_2/2$ 分别为半径为 r 的圆的周长和面积.

两曲面交线上的第一类曲线积分

例子 2 (p. 184: 例 10.3). 假设曲线 γ 是由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+z=2$ 的交线给出的, 试计算曲线积分

$$I=\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)ds.$$

两曲面交线上的第一类曲线积分

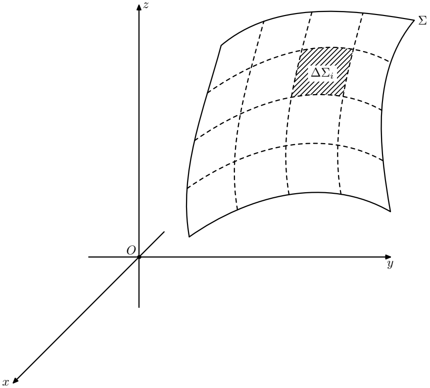
例子 2 (p. 184: 例 10.3). 假设曲线 γ 是由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+z=2$ 的交线给出的, 试计算曲线积分

$$I=\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)ds.$$

关键是求出交线的参数化. 由图已知交线可通过其在 Oxy 平面上的投影曲线参数化. 回忆教材 p. 44 页关于求解空间曲线的投影曲线的过程, 我们知道 γ 在 Oxy 平面投影曲线包含在消去 z 的方程组 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2/2=1,\\ x+z=2.\end{cases}$ 而根据图示知道, 投影曲线就是 Oxy 平面上的整个椭圆 $(x-1)^2+y^2/2=1$. 由此容易写出 γ 在广义极坐标下的参数方程.

第一类曲面积分的定义及其几何意义

第一类曲面积分和第一类曲线积分的定义是类似的, 只需将积分路径换做空间曲面. 其物理意义是密度为 $\mu(x, y, z)$ 的曲面形薄片的质量. 其定义完全是类似的:



第一类曲面积分的定义及其几何意义续

定义 1.2. 假设函数 $f(x,y,z)$ 是定义在光滑曲面 Σ 上的有界函数. 若对 Σ 上任意的曲线网划分 $\sigma=\sqcup_{i=1}^{n}\Delta\Sigma_i$, 以及任意的点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta\Sigma_i$, 存在极限

$$I=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda=\max\limits_{1\le i\le n} d_i}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)|\Delta\Sigma_i|,$$

其中 d_i 为曲面片 $\Delta\Sigma_i$ 的直径. 则称 f 在曲面 Σ 上可积, I 称为 f 在 Σ 上的第一类曲面积分, 记作

$$I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS, \text{ 或者 } \quad I=\oiint_{\Sigma} f(x,y,z)dS, \quad \text{当 } \Sigma \text{ 为闭曲面时.}$$

第一类曲面积分的基本性质

曲面 Σ 上的第一类曲面积分是一个数. 且具有如下基本性质:

- **线性性**: 假设 f, g 都在曲面 Σ 上可积, 则
$$\iint_{\Sigma} \big(af(x,y,z) + bg(x,y,z)\big) dS = a \iint_{\Sigma} f dS + b \iint_{\Sigma} g dS;$$
- **区域可加性**: 假设 $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$, 则 f 在 Σ 上可积当且仅当 f 同时在 Σ_1 和 Σ_2 可积, 且
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z) dS.$$
- **中值定理**: 设函数 f 是光滑闭曲面 $\Sigma = \overline{\Sigma}$ 上的连续函数, 则存在 $(\xi, \eta) \in \Sigma$, 使得
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z) dS = f(\xi, \eta)|\Sigma|, \quad |\Sigma| = \iint_{\Sigma} 1 dS.$$

第一类曲面积分的计算

第一类曲面积分的计算和前面第一类曲线积分的计算类似, 都是将其参数化, 然后利用坐标变换公式求积分.
假设光滑曲面 Σ 的参数方程由 $r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, $(u,v)\in\Omega$ 参数化, 这里 Ω 为 uv-平面上的有界区域. 若函数 f 在 Σ 上连续, 则 f 在 Σ 上的第一类曲面积分存在且

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Omega} f(r(u,v))|r_u\times r_v|dudv,$$

其中 $dS=|r_u\times r_v|dudv$ 是曲面 Σ 的面积微元. 特别地, 若 Σ 是函数 $z=z(x,y)$, $(x,y)\in\Omega$, 的图像所成之曲面, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Omega} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy.$$

例子 3 (p. 188: 例 10.5). 假设 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $R>0$. 试计算第一类曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS.$$

分析, 关键是适当的参数化 Σ. 第一种是利用直角坐标系看作 $z = z(x, y)$, 此时

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

故

$$I = \iint_{x^2+y^2\leq R^2} (x + y + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

然后利用函数奇偶性和积分区域的对称性.

另一种是利用球坐标系参数化 Σ, $\vec{r}(\varphi,\theta)=(R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)$, $\phi\in[0,\pi/2]$, $\theta\in[0,2\pi]$. 容易算出

$$dS=|\vec{r}_\phi\times\vec{r}_\theta|=R^2\sin\phi d\phi d\theta.$$

事实上, 利用球坐标变换的体积元

$$dV=dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right|d\rho d\phi d\theta=\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=dSd\rho.$$

因此利用对称性知,

$$I=\int_\Sigma zdS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}R\cos\phi\cdot R^2\sin\phi\cos\theta d\phi d\theta.$$

第二类曲线积分的物理意义

第二类曲线积分的物理意义是变力 $\vec{F}(M) = (P(M), Q(M))$ 沿着平面曲线 γ 从 A 到 B 移动时做的功.

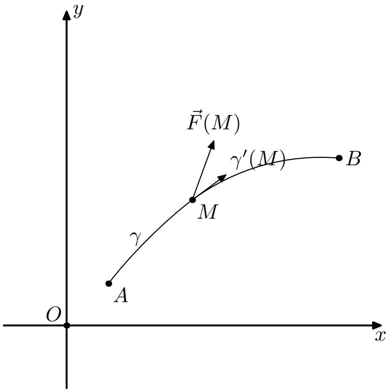


图 1: 变力 $\vec{F}$ 沿着曲线 γ 做功

第二类曲线积分的定义

根据第二类曲线积分的物理意义, 我们注意到如下要点:

- 第二类曲线积分与曲线的定向有关 (对比, 第一类曲线/曲面积分与定向无关). 这里曲线的定向相当于指定了沿着曲线的移动方向, 一般我们将曲线 γ 的正/负定向曲线分别记作 $\gamma^{\pm}$. 在具体的计算过程中, 一般规定参数曲线参数增加方向为正定向;
- 第二类曲线/曲面积分是向量值函数在定向曲线/曲面上的积分. 其定义是该向量值函数和有向微元的内积在曲线/曲面上的积分;
- 特别地, 给定向量值函数, 它沿着 γ^- 的第二类曲线积分与沿着 γ^+ 的积分相差一个符号.

第二类曲线积分的定义续

例子 4. 假设 γ 是 Oxy 平面上以 A 为起点 B 为终点的分段光滑曲线. $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 是定义在 γ 上的向量值函数.

- 若对任意的有向分点 $\{M_i(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$, 即它们将 γ 依次分为 n 个小弧段 γ_i; 以及任意的点列 $\{(\xi_i,\eta_i)\in\gamma_i\}_{i=1}^n$;
- 当最大的弧段 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{|\gamma_i|\}\to 0$ 时, 如下极限存在 $I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$,

则称 I 为向量值函数 $\vec{F}$ 沿着曲线 γ 从 A 到 B 的第二类曲线积分. 记作 (这里 $\vec{r}$ 为 γ 的位置向量),

$I=\int_{\widehat{AB}}\vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$,   或者 $I=\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

其中, $d\vec{r}=\gamma'(s)ds$ 称为 γ 的有向弧长微元, 它的方向和 γ 的切方向相同, 大小等于弧长微元 ds. 这里 s 是 γ 的弧长参数.

第二类曲线积分的计算

第二类曲线积分的计算和前面想法一致: 选取适当的参数化然后利用换元公式.

假设平面光滑曲线 $\gamma = \gamma(t)$ 的参数方程 (不一定是弧长参数) 是 $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$. 则弧长微元 $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = |\gamma'(t)| dt$, 因此

$$d\vec{r} = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} |\gamma'(t)| dt = (x'(t), y'(t)) dt$$

于是, 向量值函数 $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ 在 γ 上沿着正定向 (参数增加方向) 的积分为如下的**定积分**

$$I = \int_{\gamma^+} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \left(P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)\right) dt.$$

第二类曲线积分的计算例子

例子 5 (p. 194: 例 10.8). 计算曲线积分

$$\int_\gamma xydy + xdy,$$

其中 γ 是曲线 $y = x^3$ 上从点 $A(-1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的定向弧.

空间曲线上的第二类曲线积分

例子 6 (p. 197: 例 10.12). 计算从 $A(1,1,1)$ 到 $B(2,3,4)$ 的直线段 γ 上的曲线积分

$$\int_\gamma \vec{F}(x,y,z)d\vec{r}, \quad \vec{F}(x,y,z) = (x, y, x+y-1).$$

第二类曲线积分与奇点的关系

例子 7 (p. 208: 例 10.20, 改编). 试分别对下列道路计算曲线积分

$$I = \int_\gamma \frac{1}{x^2+y^2}(xdy - ydx).$$

1. γ 为圆周 $x^2+y^2=a^2, a>0$;
2. γ 为圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2, a>0$;

第二类曲线积分与第一类曲线积分的关系

按照第二类曲线积分的定义, 我们知道它和第一类曲线积分的关系如下

$$\int_\gamma \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F}(x,y)\cdot \frac{\gamma'}{|\gamma'|}ds.$$

这里, γ' 是曲线的切向量, 而 ds 是曲线 γ 的弧长参数.

例子 8 (p. 231:10(1)). 将第二类曲线积分

$$\int_\gamma x^2ydx - xdy,$$

其中 γ 为曲线 $y=x^3$ 上从点 $A(-1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的线段, 转为第一类曲线积分.

第二类曲面积分的物理意义

第二类曲面积分和第二类曲面积分类似, 它是关于向量值函数在曲面上的积分. 其物理意义如下: 假设 Σ 是三维空间中一曲面, 现若有一流体以速度 $\vec{V}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ 流过 Σ, 则单位时间流过侧面 Σ 的体积为

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{S}.$$

其中 $\vec{S}$ 为有向面积微元, 其方向为曲面 Σ 的法向, 而大小为曲面的面积微元 dS.

第二类曲面积分的定义

和前面关于第二类曲线积分的定义类似, 第二类曲面积分也和曲面的定向有关. 只是需要注意, 与曲线不同之处在于: 曲面可能有两个定向[1](我们称为**定向曲面**, 一般我们把外法向称为曲面的**正定向**, 其相反定向称为**负定向**, 分别记作 $\Sigma^{\pm}$), 也可能曲面不可定向, 此时不能谈曲面的内侧与外侧 (例如 Möbius 带就是非双侧的曲面). 在非定向曲面上我们无法定义第二类曲面积分.

特别地,

$$\iint_{\Sigma^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S} = -\iint_{\Sigma^-} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}.$$

[1]所谓曲面的定向是指可以在曲面上连续的指定曲面的法方向.

第二类曲面积分的计算

第二类曲面积分的计算和前面类似, 都是通过将曲面参数化, 然后利用变量替换公式来计算. 具体而言: 假设定向光滑曲面 Σ 的参数方程由 $\vec{G}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in D$ 给出, 其中 D 为 uv 平面上具有分段光滑边界的有界区域. 回忆, 此时曲面 Σ 在 $P(x,y,z) \in \Sigma$ 处的单位法向和体积微元分别为

$$\vec{n} = \frac{\vec{G}_u \times \vec{G}_v}{|\vec{G}_u \times \vec{G}_v|}, \quad dS = |\vec{G}_u \times \vec{G}_v| du dv.$$

因此向量值函数 $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ 在定向曲面 Σ 上的第二类曲面积分可表示为

$$\iint_\Sigma \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \vec{G}_u \times \vec{G}_v du dv.$$

注意上述计算中要求参数化下的法向 $\vec{n}$ 和曲面的定向一致.

第二类曲面积分的计算续

$$d\vec{S}=\vec{G}_u\times\vec{G}_v dudv=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_u du & y_u du & z_u du\\ x_v dv & y_v dv & z_v dv\end{vmatrix}$$
$$=\Big((y_u z_v-z_u y_v)\vec{i}+(z_u x_v-x_u z_v)\vec{j}+(x_u y_v-x_v y_u)\vec{k}\Big)\,dudv.$$

又注意到, 外积的运算法则 (满足反交换性的二元双函数线性运算, 且 $d\omega=0$, $d(f(x,y)\omega)=df\wedge\omega$, 其中 ω 是一次微分形式, 即 dx, dy 的函数线性组合.),

$$dx\wedge dy=(x_u du+x_v dv)\wedge(y_u du+y_v dv)$$
$$=(x_u y_v-x_v y_u)du\wedge dv.$$

这表明 $dx\wedge dy$ 是 $d\vec{S}$ 在 $\vec{k}$ 上的投影. 类似地, $dy\wedge dz$, $dz\wedge dx$ 分别是 $d\vec{S}$ 在 $\vec{i},\vec{j}$ 上的投影. 一般地, 我们称 $dx\wedge dy=\pm dx\wedge dy$ 是

第二类曲面积分的计算续

这样, 我们得到

$$\begin{aligned}\vec{G}_u \times \vec{G}_v du dv &:= (\vec{G}_u du) \wedge (\vec{G}_v dv) \\ &= dy \wedge dz \vec{i} + dz \wedge dx \vec{j} + dx \wedge dy \vec{k}.\end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_\Sigma P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy \\ &= \iint_{D_{yz}} P dy \wedge dz + \iint_{D_{zx}} Q dz \wedge dx + \iiint_{D_{xy}} R dx \wedge dy,\end{aligned}$$

其中, D_{yz} 是 Σ 在 Oyz 平面的投影. 类似理解 D_{zx}, D_{xy}.

第二类曲面积分的计算续

特别地, 当 Σ 可视为 x, y 的函数时, 由于曲面此时可参数化为

$$G(x,y) = (x, y, z(x,y)), \implies \vec{n} := G_x \times G_y = (-z_x, -z_y, 1).$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \pm \iint_\Sigma \vec{F} \cdot G_x \times G_y dxdy \\
&= \pm \iint_{D_{xy}} (-Pz_x - Qz_y + R) dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} \vec{F} \cdot \vec{n} dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

当此法向与曲面的定向一致时取正号, 否则取负号.

第二类曲面积分的例子

特别地, 当 $P, Q = 0$ 而且 Σ 可视为 x, y 在区域 D_{xy} 上的函数时, 我们曲面积分得到

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pm \iint_{D_{xy}} R dx dy = \iint_{D_{xy}} R dx \wedge dy.$$

即此时它就是区域 D_{xy} 上关于函数 $R(x, y, z(x, y))$ 的二重积分, 只是需要注意曲面定向与参数化曲面的定向相反时可能会相差一个符号.

例子 9 (p. 202: 例 10.13). 假设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$, 外侧并满足 $x \geq 0, y \geq 0$. 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} xyz dx dy.$$

第二类曲面积分的例子

- 参数化: 明显我们可将 $\Sigma = \Sigma_+ \sqcup \Sigma_-$ 分别参数化为:

$$(x, y) \in D_{xy} = \left\{x^2 + y^2 \leq R^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0\right\},$$

$$z_\pm = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}).$$

第二类曲面积分的例子

- 参数化: 明显我们可将 $\Sigma = \Sigma_+ \sqcup \Sigma_-$ 分别参数化为:
$$(x, y) \in D_{xy} = \left\{x^2 + y^2 \le R^2,\, x \ge 0,\, y \ge 0\right\},$$
$$z_\pm = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}).$$
- 判断曲面定向与参数化后的自然定向的关系: 因为 $\Sigma_\pm$ 上, 法向分别为 $(-z_{\pm x}, -z_{\pm y}, 1)$, 因此在 Σ_+ 上, 它和曲面的定向一致; 在 Σ_- 上和曲面的定向相反. 从而
$$\begin{aligned} I = & \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy \\ & - \int_{D_{xy}} xy(-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})dxdy. \end{aligned}$$

第二类曲面积分的例子

例子 10 (p. 203: 例 10.15). 假设 Σ 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 2y$ 所截取的部分的下侧. 求曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 3x dy dz - y dz dx - 2z dx dy.$$

第二类曲面积分的例子

例子 10 (p. 203: 例 10.15). 假设 Σ 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 2y$ 所截取的部分的下侧. 求曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 3x dydz - y dzdx - 2z dxdy.$$

- 参数化: 作图可知 Σ 可看作 x, y 的函数图像. 消去 z 得到投影区域 $D_{xy} = \{x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$,
$$z = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in D_{xy}.$$
- 判断定向与法向关系: $\vec{n} = (-z_x, -z_y, 1)$ 与曲面定向相反. 故
$$I = -\iint_{D_{xy}} (3x, -y, -2z) \cdot \vec{n} dxdy.$$

平面连通区域边界的定向

Green 公式揭示了平面区域上的第一类曲面积分 (即二重积分) 与积分区域的边界曲线上第二类曲线积分的关系. 由于第二类曲线积分涉及到曲线的定向. 我们首先给出平面连通区域的分类: 假设 D 为平面区域 (即 (道路) 连通集), 我们称其为

- **单连通区域**: 若 D 中任一闭曲线围成的区域都包含在 D 内, 即 D 没有洞;
- **复连通区域**: 非但连通区域, 即 D 有洞.

我们规定平面连通区域的边界曲线的**正定向**如下: 沿着边界曲线走动, 区域始终位于我们的左手边. 参考教材图 10.16.

Green 公式

定理 3.1. 假设 D 为平面有界闭区域, 且其边界曲线是由有限条分段光滑曲线组成的简单闭曲线. 若函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内有连续的偏导数 (即它们在 D 内部可微: 定理 8.3). 则

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中 $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$.

Green 公式的证明

第一步: 我们先对比较简单的 x-型区域证明

$$\oint_{\partial D} P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \tag{3.1}$$

如教材图 10.17 所示, 假设

$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, 则

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} P dx &= \int_{\overset{\frown}{AB} + \overline{BB'} + \overset{\frown}{B'A'} + \overline{A'A}} P dx = \int_{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B'A'}} P dx \\
&= \int_a^b P(x, y_1(x)) dx - \int_a^b P(x, y_2(x)) dx \\
&= \int_a^b \left(P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x)) \right) dx.
\end{aligned}$$

Green 公式的证明续

另一方面, 根据 x-型区域上二重积分的计算方法

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\right) dx\end{aligned}$$

可见结论成立.

Green 公式的证明续

完全类似地, 对 y-型区域
$D=\{(x,y):\alpha\le y\le\beta,\ x_1(y)\le y\le x_2(y)\}$, 我们可证明

$$\oint_{\partial D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy. \tag{3.2}$$

事实上, 根据 y-型区域上二重积分的计算方法

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy &= \int_\alpha^\beta dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \\ &= \int_\alpha^\beta \left(Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)\right) dy.\end{aligned}$$

Green 公式的证明续

另一方面, 按照曲线积分的计算方法

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} Q dy &= \int_{\overline{AB}+\widehat{BB'}+\overline{B'A'}+\widehat{A'A}} Q dy = \int_{\widehat{BB'}+\widehat{A'A}} Q dy \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} Q(x_2(y), y) dy - \int_{\alpha}^{\beta} Q(x_1(y), y) dy \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \left(Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)\right) dy.
\end{aligned}$$

可见结论成立.

Green 公式的证明续

第二步: 现在, 对一般的有界闭区域 D. 我们先通过不断的移动平行于 y 轴的直线使得它与 ∂D 相切于某一点. 这样就将 D 分割成了不相交的 x-型开区域 $\{D_i\}$. 且在相邻的两个开区域上, 若 D_i 与 D_j 有公共的边界曲线, 则它们的定向相反, 于是在这些公共的边界曲线上积分相互抵消. 这样在每个 D_i 上应用(3.1), 我们得到

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial D} P dx &= \int_{\sum_i \partial D_i} P dx = \sum_i \int_{\partial D_i} P dx \\
&= -\iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.
\end{aligned}
$$

Green 公式的证明续

完全类似地, 通过将 D 利用平行于 x 轴且与 ∂D 相切的直线分成互不相交的 y-型开区域 $\{D^j\}$, 并在每个 D^j 上面应用(3.2), 我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} Q dy &= \int_{\sum_j \partial D^j} Q dy = \sum_j \int_{\partial D^j} Q dy \\ &= \sum_j \iint_{D^j} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy\end{aligned}$$

相加即得我们要证的 Green 公式.

Green 公式的证明续

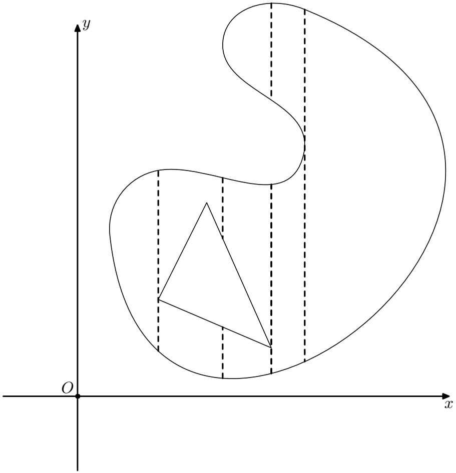


图 2: 划分为 x-型区域

利用 Green 公式求平面有界区域的面积

注意到 Green 公式中右端项是一个二重积分, 当被积函数 $\partial_x Q - \partial_y P = 1$ 时, 就得到积分区域的面积可以用边界上的第二类曲线积分来表示. 比较简单的取法是

- $P = 0, Q = x$: 此时
$$|D| = \iint_D 1dxdy = \oint_{\partial D} xdy;$$
- $P = -y, Q = 0$: 此时
$$|D| = \iint_D 1dxdy = -\oint_{\partial D} ydx;$$
- $P = -y/2, Q = x/2$: 此时
$$|D| = \iint_D 1dxdy = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} (xdy - ydx).$$

利用 Green 公式计算椭圆的面积

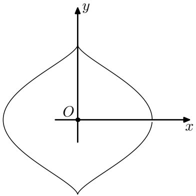
例子 11 (p. 207: 例 10.17). 计算椭圆 $\gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$ 的面积.

利用 Green 公式计算椭圆的面积

例子 11 (p. 207: 例 10.17). 计算椭圆 $\gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$ 的面积.

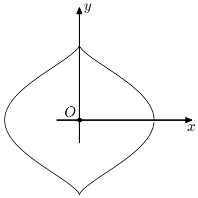
提示: 直接利用上面的第三个面积公式.

计算曲线围成的面积



例子 12 (p. 224: 19(2)). 求曲线 $\gamma : x(t) = \cos^3 t, y(t) = \sin t$ 围成的图形的面积.

计算曲线围成的面积



例子 12 (p. 224: 19(2)). 求曲线 $\gamma : x(t) = \cos^3 t, y(t) = \sin t$ 围成的图形的面积.

观察知曲线是以 2π 为周期的, 故围成的

$$S = \frac{1}{2}\oint_\gamma xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^4 t + 3\sin^2 t\cos^2 t)dt = \frac{3\pi}{4}.$$

Green 公式的应用

例子 13 (p. 208: 例 10.19). 计算从 $A(2R,0)$ 到原点 $O(0,0)$ 的上半圆周 γ 上的曲线积分

$$I=\int_{\gamma}(e^{x}\sin y-my)dx+(e^{x}\cos y+mx)dy.$$

Green 公式的应用

例子 14 (p. 208: 例 10.20). 假设 γ 是任一条不过原点的光滑简单闭曲线. 计算曲线积分

$$I = \oint_\gamma \frac{1}{x^2+y^2}(xdy - ydx).$$

Green 公式的应用

例子 15 (p. 233: 20(1)). 假设 $\gamma : x^2 + y^2 = 3$ 是正定向曲线, 计算曲线积分

$$I = \oint_\gamma (2x\sin y - 4y)dx + (x^2\cos y + x)dy.$$

Green 公式的应用

例子 16 (p. 233: 20(5)). 假设 γ 是从 $P_0(\pi+1,0)$ 沿着曲线 $y=\sin(x-1)$ 到 $P_1(1,0)$ 的路径, 计算曲线积分

$$I=\int_\gamma y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy+\sqrt{x^2+y^2}dx.$$

Green 公式的应用

例子 16 (p. 233: 20(5)). 假设 γ 是从 $P_0(\pi+1,0)$ 沿着曲线 $y=\sin(x-1)$ 到 $P_1(1,0)$ 的路径, 计算曲线积分

$$I=\int_\gamma y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy+\sqrt{x^2+y^2}dx.$$

提示: 需要补全区域, 并利用 Green 公式.

关于三角函数的方幂的积分

注意积分公式 (Wallis), 对非负整数 m,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^m t dt = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & m \mod 2 = 0, \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, & m \mod 2 = 1. \end{cases}$$

更一般地, 对非负整数 m, n,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t dt = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\Gamma(\frac{m+n+2}{2})}.$$

其中 Gamma 函数满足

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = 2^{-n}\sqrt{\pi}(2n-1)!!.$$

Green 公式的向量形式

我们可以利用向量的运算将 Green 公式改写成向量值的形式: 假设平面有界区域 D 是由有限条光滑闭曲线围成的. 则我们知道边界曲线 ∂D 上的切向量为 (dx, dy), 从而其外法向 (顺时针旋转 90 度) 为 $\vec{n} = \frac{(dy,-dx)}{|(dy,-dx)|}$, $ds = |(dy, -dx)| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. 现在若向量值函数 $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ 在 D 内有连续的偏导数, 则根据第一类曲线积分的定义以及 Green 公式知道,

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \oint_{\partial D} (-Q dx + P dy) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D \nabla \cdot \vec{F} dx dy, \quad \nabla = (\partial_x, \partial_y).\end{aligned}$$

平面曲线上的第二类曲线积分与道路无关的条件

假设函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 是由逐段光滑的简单闭曲线围成的单连通开区域 D 内的连续可微函数 (即具有连续偏导数). 则如下条件等价:

1. 对 D 内任一条分段光滑简单闭曲线 γ,

$$\oint_\gamma P dx + Q dy = 0.$$

平面曲线上的第二类曲线积分与道路无关的条件续

2. 对 D 内任一简单曲线 γ, 曲线积分
$$\int_\gamma Pdx + Qdy$$
与路径曲线 γ 的路径无关, 即只与起点和终点有关.
3. 一次微分形式 $Pdx + Qdy$ 存在 D 内的原函数, 即存在 D 内的连续可微函数 u, 使得
$$du = Pdx + Qdy.$$
4. 在 D 内处处成立
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

曲线积分与路径无关性的证明

证明. **(1)** $\Longrightarrow$ **(2)**: 假设 γ_1, γ_2 是 D 中具有相同起点与终点的两条曲线, 则我们可在 D 中取一条曲线 γ 使得它和 γ_1, γ_2 都不想交且与它们有相同的起点与终点. 于是我们得到 D 中两条简单闭曲线 $\tilde{\gamma}_i = \gamma_i \cup \gamma^-, i = 1, 2$. 因此由第二类曲线积分的道路可加性得到

$$0 = \oint_{\tilde{\gamma}_i} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_i} Pdx + Qdy + \int_{\gamma^-} Pdx + Qdy,$$

这表明

$$\int_{\gamma_i} Pdx + Qdy = \int_{\gamma} Pdx + Qdy, \quad i = 1, 2.$$

曲线积分与路径无关性的证明续

因此, 上述曲线积分与路径现在无关.

(2) $\Longrightarrow$ **(3):** 为了利用条件 2, 任取定一点 $P_0(x_0, y_0) \in D$, 假设 γ 是连接 P_0 与 D 中任意动点 $P(x, y)$ 的简单曲线. 定义 D 内的函数

$$u(x, y) = \int_{\gamma} P dx + Q dy.$$

我们将证明它就是要求的原函数. 为此注意到, D 是开区域, 故当 $(\Delta x, \Delta y)$ 充分小时, 直线段 $\overline{PP'}$, $P' = (x + \Delta x, y + \Delta y)$, 包含在 D 中, 并与 γ 一起组成了 D 中的一条新的简单闭曲线. 考察

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) &= \int_{\gamma + \overline{PP'}} P dx + Q dy - \int_{\gamma} P dx + Q dy \\ &= \int_{\overline{PP'}} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

曲线积分与路径无关性的证明续

现在, 我们将线段 $\overline{PP'}$ 参数化为

$$\begin{cases} x(t) = x + t\Delta x, \\ y(t) = y + t\Delta, \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

则我们可将第二类曲线积分转为第一类曲线积分

$$\int_{\overline{PP'}} Pdx + Qdy = \int_0^1 \Big(P(x+t\Delta x, y+t\Delta y)\Delta x \\ + Q(x+t\Delta x, y+t\Delta y)\Delta y\Big)dt.$$

曲线积分与路径无关性的证明续

注意到 P, Q 都是连续函数, 从而被积函数是 t 的连续函数. 于是由定积分的积分中值定理知, 存在 $\theta \in [0,1]$,

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = P(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta x \\ + Q(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta y.$$

由此, 再次利用 P, Q 的连续性, 易知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} = P(x,y).$$

完全类似地

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

曲线积分与路径无关性的证明续

u 的连续可微性可由 P, Q 的连续性得到.

(3) $\Longrightarrow$ (4): 由于 $du = Pdx + Qdy$, 按照全微分的定义

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q.$$

由于 P, Q 具有连续的偏导数, 故可对上式再次求偏导数得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

曲线积分与路径无关性的证明续

由于 P, Q 的偏导数连续, 故上式表明 u 的二阶混合偏导数连续, 从而相等 (见习题). 即

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1): 假设 γ 是 D 中任一条分段光滑的简单闭曲线, 注意到 D 单连通, 因此 γ 围成的区域 D_γ 包含在 D 中, 且其边界只有 γ. 在 D_γ 上应用 Green 公式我们得到

$$\oint_\gamma P dx + Q dy = \iint_{D_\gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0.$$

可见结论成立.

利用曲线积分的道路无关性计算积分

例子 17 (p. 213: 例 10.22). 假设 γ 是星型线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 上从 $A(a,0)$ 到 $B(0,a)$ 的一段弧, 其曲线积分

$$I=\int_\gamma (y\cos x-y^2e^x)dx+(\sin x-2ye^x)dy.$$

全微分求积

根据前面关于曲线积分与道路选择的无关性, 我们知道: 若 P, Q 是单连通区域 D 内具有连续偏导数的两个函数. 若

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

则一次微分 $Pdx + Qdy$ 存在原函数 u. 它可由从任一固定的 $P_0(x_0, y_0)$ 出发的曲线 γ 上积分得到

$$u(x, y) = \int_\gamma Pdx + Qdy := \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy.$$

全微分求积续

因此, 全体原函数可表示为 (C 是一个常数)

$$u(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy + C.$$

一般而言, 我们可取平行于坐标轴的直线段路径, 此时得到

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C,$$

以及

$$u(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + C.$$

全微分求积续

命题 3.2 (牛顿–莱布尼兹公式). 假设 $u(x,y)$ 是一次微分形式 $Pdx+Qdy$ 在 D 内的一个原函数, 则对任意的 $P_0(x_0,y_0)$, $P_1(x_1,y_1)\in D$, 我们有

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx+Qdy = u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0).$$

证明. 由于 u 是 $Pdx+Qdy$ 在 D 内的原函数, 故曲线积分只与起点与终点有关, 而与路径的选择无关. 特别地, 选取从 P_0 到 P_1 的

全微分求积续

一条光滑曲线 $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \subset D, t \in [a, b], \gamma(a) = P_0$, $\gamma(b) = P_1$. 注意到, 由一阶微分式的形式不变性,

$$du = Pdx + Qdy \implies du(x(t), y(t)) = (Px' + Qy')dt$$

按照第二类曲线积分的计算

$$\begin{aligned}\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy &= \int_\gamma Pdx + Qdy \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt \\ &= \int_a^b du(x(t), y(t)) = u(P_1) - u(P_0).\end{aligned}$$

利用曲线积分求原函数

例子 18 (p. 215 例 10.23). 验证右半平面内 $Pdx + Qdy = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$ 存在原函数, 并求出以 $(0, 1)$ 为起点的原函数.

利用积分方法求全微分

例子 19 (p. 215: 例 10.24). 求全微分 $(x+y)^2dx+(x^2+2xy-y^2)dy$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的原函数.

牛顿–莱布尼兹公式求曲线积分

例子 20 (p. 216: 例 10.25). 计算曲线积分

$$I = \int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

其中 γ 是上半平面内从 $(-1, 1)$ 出发到 $(3, \sqrt{3})$ 的光滑曲线.

利用积分与路径无关确定函数

例子 21 (p. 234: 23(2) 改编). 假设 D 是平面区域. 根据 D 的不同情况, 讨论是否存在 D 上的连续可微函数 $f(x)$, 使得 $f(1)=1$, 且下列曲线积分与路径无关:

$$I=\int_{\gamma} f(x)\,(y dx - x dy)\,.$$

利用积分与路径无关确定函数续

提示: 先假设积分与路径无关, 则必有 $P_y = Q_x$, 解出 $f(x) = 1/x^2$. 由此可知, 当 D 为不包含原点的单连通区域时, $f(x) = 1/x^2$ 满足条件. 但当 D 为挖掉原点的复连通区域时, 由于

$$\int_{x^2+y^2=r^2} \frac{ydx - xdy}{x^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = +\infty,$$

这是因为, 被积函数是一个非负函数且当 $\theta \to \pi/2$ 或者 $3\pi/2$ 时, 函数值趋于正无穷. 总之, 对挖掉原点的复联通区域, 不存在满足条件的 f.

求解全微分方程

利用全微分求积, 如果 $P_y = Q_x$, 那么我们可以得到一阶微分方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{3.3}$$

的通解. 事实上, 根据前面的讨论, 此时一次微分式存在原函数 u, 即

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

因此, (3.3)的通解为 $u = c$.

全微分方程求积

例子 22 (p. 234:26(1)). 求解微分方程

$$[y + \ln(1 + x)]dx + (x + 1 - e^y)dy = 0$$

全微分方程求积

例子 22 (p. 234:26(1)). 求解微分方程

$$[y + \ln(1 + x)]dx + (x + 1 - e^y)dy = 0$$

两种办法: 一种是验证它是全微分方程, 并利用曲线积分求解; 另一种是凑微分法 (注意到 $\ln(1 + x)dx = d((x + 1)\ln(1 + x)) - dx$);

积分因子与求解全微分方程

对微分方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, 如果其系数 P, Q 不满足 $\partial_y P = \partial_x Q$, 则我们不能应用曲线积分与道路无关来求解全微分方程. 但是此时可能通过在方程两端同乘以一个处处非零的函数 $\mu = \mu(x,y)$ 使得

$$\partial_y(\mu P) = \partial_x(\mu Q).$$

这时, 就将原微分方程转为为标准的全微分方程, 进而可以恰当的选取道路来求解. 我们称上面的辅助函数 μ 为原微分方程的积分因子.

利用积分因子法求解微分方程

例子 23 (p. 234: 26(3)). 求解全微分方程

$$y(2xy + e^x)dx - e^x dy = 0.$$

利用积分因子法求解微分方程

例子 23 (p. 234: 26(3)). 求解全微分方程

$$y(2xy + e^x)dx - e^x dy = 0.$$

提示: 积分因子 $1/y^2$.

外微分的公理化定义

我们称 $\mathbb{R}^3$ 空间中形如 $dx, dy, dz, dx \wedge dy, dx \wedge dy \wedge dz$ 的微分式为单纯微分形式, 根据外积 (和叉积类似, 满足线性性和反交换性) 的个数定义次数, 例如 dx 等称为一次微分式, $dx \wedge dz$ 称为二次微分式等等. 我们又将所有的单纯微分形式和可微函数的线性组合称为微分形式. 例如 $Pdx + Qdy$, $Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ 等. 在所有的微分形式组成的环上, 我们可以定义外微分运算 d, 它是一个线性算子, 且满足如下性质:

- 对 0 次微分形式 f(即光滑函数), 定义 $df = \partial_{x^i} f dx^i$;
- 对任何微分形式 ω, $d(d\omega) = 0$;
- 假设 α 是 p 次微分形式, 则对任一微分形式 β, 有

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p(\alpha \wedge d\beta).$$

Gauss 公式

回忆, Green 公式将平面连通区域上的二重积分与在其边界上的第二类曲线积分联系起来. 我们采用外微分的记号, 将其改写为

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D d(P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx \wedge dy.$$

完全类似地, Gauss 公式将分片光滑曲面围成的空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的第二类曲面积分联系起来.

Gauss 公式续

定理 4.1 (Gauss 公式). 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是由分片光滑的曲面 Σ 围成的空间区域, 如果向量值函数

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

在 Ω 上具有连续的偏导数. 则 (这里 $\partial\Omega$ 的外法向为正定向)

$$\begin{aligned}
&\iint_{\partial\Omega} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy \\
&= \iint_{\Omega} d(P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy) \\
&= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

利用高斯公式计算第二类曲面积分

例子 24 (p. 220: 例 10.30). 假设 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧, 计算第二类曲面积分

$$I=\int_{\Sigma} xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy.$$

Stokes 公式

完全类似地, 我们可以将 Green 公式推广为更一般的联系可定向有界闭曲面上的第二类曲面积分与其边界曲线上的第二类曲线积分.

Stokes 公式续

定理 4.2 (Stokes 公式). 假设 Σ 是分片光滑的可定向曲面, 且其边界曲线 $\gamma = \partial\Sigma$ 是分段光滑的闭曲线. 如果向量值函数

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

在 Σ 上具有连续的一阶偏导数, 则 (这里曲线 $\partial\Sigma$ 的定向和曲面 Σ 的法向成右手系)

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\Sigma} P dx + Q dy + R dz &= \iint_{\Sigma} d\left(P dx + Q dy + R dz\right) \\
&= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

利用 Stokes 公式计算第二类曲线积分

例子 25 (p. 227: 例 10.34). 假设 γ 是平面 $2x+3y+z=6$ 与坐标平面所截三角形的整个边界, 其定向为从 x 正轴看, 正方向为逆时针方向. 试利用 Stokes 公式计算第二类曲线积分

$$I = \oint_{\gamma} z dx + x dy + y dz.$$

Gauss 公式与 Stokes 公式的向量值形式

Gauss 公式和 Stokes 公式也有类似 Green 公式的向量值形式: 对向量值函数

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$$

我们定义散度

$$\mathrm{div}\vec{F} := \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

以及旋度

$$\mathrm{rot}\vec{F} := \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Gauss 公式与 Stokes 公式的向量值形式续

这样, Gauss 公式可以改写为

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F} dV,$$

我们称左侧积分为 $\vec{F}$ 的**通量**, 它表示向量场 $\vec{F}$(例如磁场) 单位时间内流经边界曲面 $\partial\Omega$ 的流量 (磁通量).

类似地, Stokes 公式可改写为

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

我们称左侧积分为 $\vec{F}$ 的**环量**.

课后习题

第一次: p. 230: 1(7),(8); 2(3);
p. 231: 6(2),(5); 7; 10(2); 11(2); 12(4);
补充题:

1. 计算例子7中第二问的曲线积分.

第二次: p. 232: 16(2); 17(1), (3), (8);
补充题

1. 假设 Q, D 满足书上 Green 公式的条件. 对 y-型正则区域 D 证明如下的 Green 公式:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{\partial D} Q dy.$$

课后习题续

第三次: p. 233: 19(1), (3); 20(2), (4), (6), (7), (8).
p. 234: 21(2),(3);
补充题:

1. 假设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内存中偏导数 f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}. 证明: 若 f_{xy}, f_{yx} 是 D 内的连续函数, 则

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

提示: 参考 [1, 定理 6.7].

课后习题续

第四次: p. 234: 22(1), (4); 23(3)[提示 Bernoulli 方程 $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \alpha \neq 0, 1$ 可通过换元 $z = y^{1-\alpha}$ 转为一阶线性微分方程, 它可通过常数变易法求解]; 24; 25; 26(2), (4).

p. 235: 29(2), (8).

p. 236: 34(2), (3).

补充题:

1. 证明若 $u(x, y), v(x, y)$ 都是平面单连通有界区域 D 上一次微分 $Pdx + Qdy$ 的原函数, 其中 P, Q 是 D 上的连续函数, 则 $u - v$ 是一个常数.
2. 利用 Gauss 公式重新计算 p. 203 例 10.14.

[1] 小平邦彦, 裴东河. 微积分入门 II: 多元微积分[M]. 北京, 中国: 人民邮电出版社, 2008.